ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

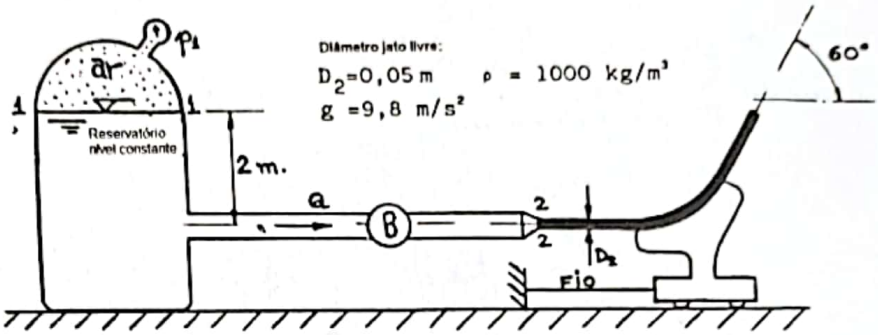
PME 3230 – Mecânica dos Fluidos I

2ª Prova (P2) - 08/12/2022 - Cursos: Eng. Mecânica, Mecatrônica, Naval e Produção

RIENTAÇÕES para realização da prova:

- Preencha com seus dados a primeira folha do caderno de resposta. **Tempo total de prova (P2 + E): 150 minutos**
- Responda cada questão no local destinado para sua resolução, inclusive indicando o item da questão que está resolvendo.
- A resolução pode ser feita a lápis, e as resposta finais devem estar indicadas com destaque, **com as unidades explícitas**.
- A prova é individual, e não são permitidos uso de computadores, e de equipamentos eletrônicos que possibilitam comunicação.
- Todos os telefones celulares devem estar desligados durante a realização da prova

ª Questão: (3,0 pontos)



Um jato livre de água é produzido por um bocal que recebe o fluido de uma tubulação que está conectada a um reservatório pressurizado de grandes dimensões. Um manômetro metálico (tipo *bourdon*) mede a pressão do ar no reservatório, e indica pressão p_1 = **19.600 N/m²**. Uma bomba proporciona a vazão exigida para a operação do sistema fornecendo para o fluido energia correspondente a W_B = **100 W**. O jato incide em um desviador que está montado sobre rodas. Estas rodas não apresentam atrito com o plano horizontal onde está apoiado. O desviador é mantido fixo, parado, por um fio de aço que está suportando uma força de tração de **35 N**. Dados adicionais estão na figura.

Pede-se:

1.1 Qual a vazão em volume na tubulação? (1,5 pontos)

1.2 Qual a perda de carga total entre as seções **1-1** e 2-2 ($\Delta H_{1\text{-}2}$), indicadas na figura? (1,5 pontos)

2ª Questão: (3,0 pontos)

Um fluido incompressível de viscosidade absoluta **μ** e massa específica **ρ**, escoa em regime permanente por uma canaleta de seção hemisférica, com raio ***R***, inclinada de um ângulo **α** em relação à horizontal, conforme ilustra a figura. As velocidades do fluido nas direções perpendiculares à direção **z** indicada são nulas. O escoamento é laminar e a tensão de cisalhamento na superfície livre (em contato com o ar) do fluido é nula. Nestas condições, pede-se:

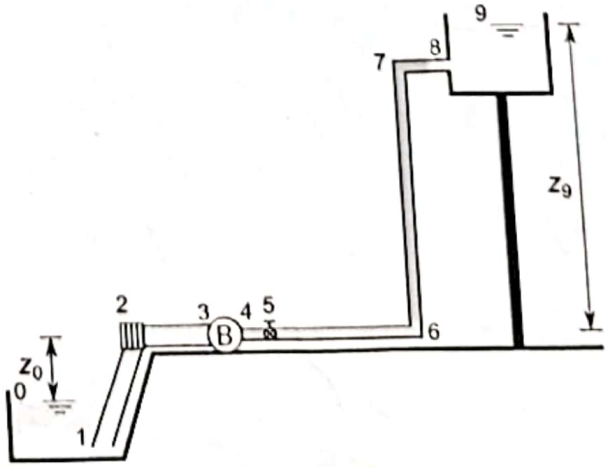
2.1 A equação do perfil de velocidades da componente axial do escoamento; (1,5 ponto)

2.2 A equação da distribuição da tensão de cisalhamento na superfície ortogonal à direção radial, na direção axial; (0,5 ponto)

2.3 A equação para cálculo da vazão volumétrica veiculada pela canaleta. (1,0 ponto)

Expresse todos os resultados em função de **ρ, g, α, μ** e **R**.

3ª Questão: (4,0 pontos)



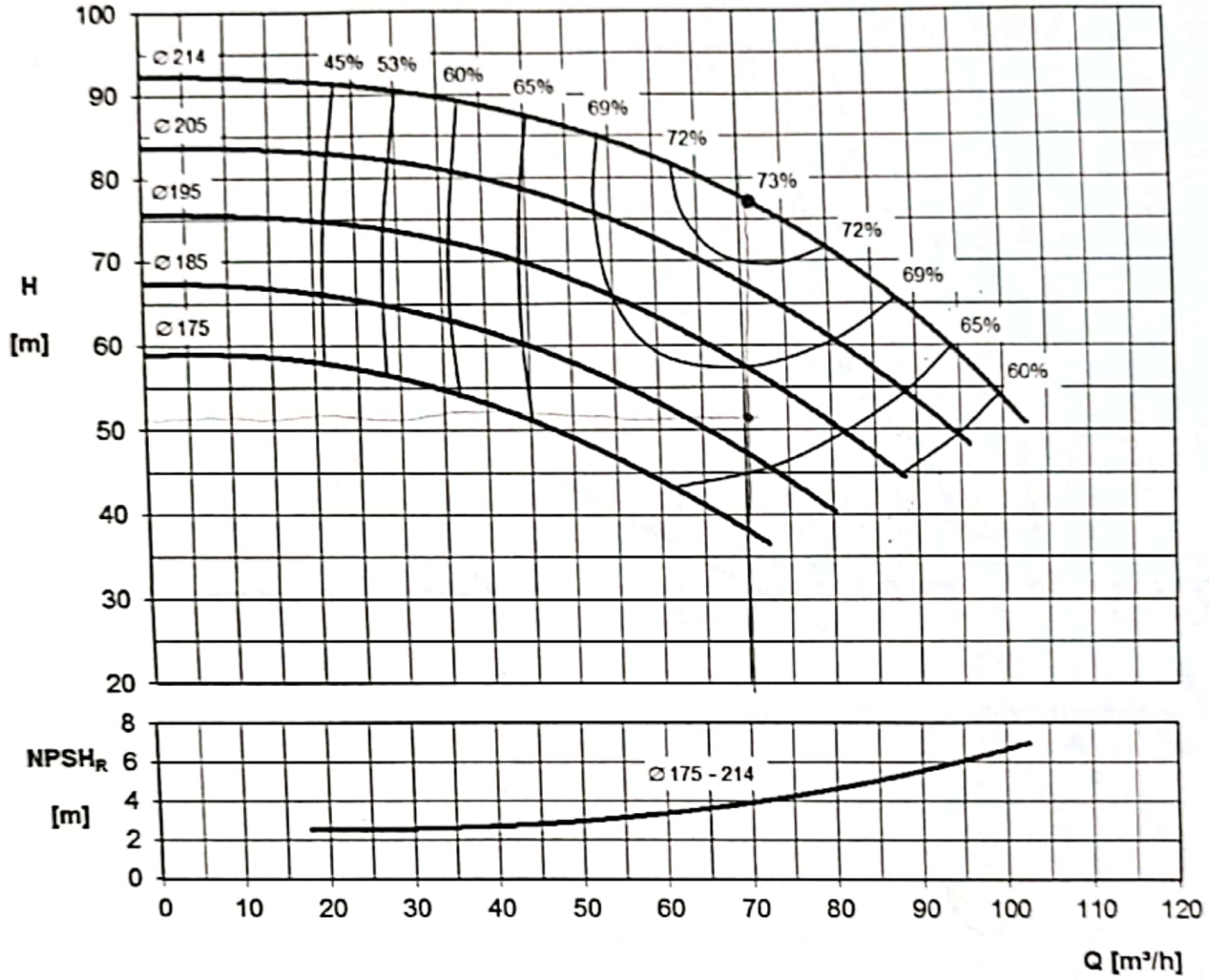
A figura ao lado mostra um sistema de recalque utilizado para transportar água a 20ºC (ρ = **998 kg/m³**, ν = **10⁻⁶ m²/s**, P_v = **2,34 kPa**) de um reservatório baixo, cujo nível (**0**) está **4 m** abaixo da bomba (**B**), para um reservatório alto, cuja superfície livre (**9**) está a uma altura de **35 m** em relação à bomba, com uma vazão de **70 m³/h**. A tubulação a montante da bomba tem diâmetro $D_{1\text{-}3}$ = **260 mm** e comprimento total $L_{1\text{-}3}$ = **20 m**, e a tubulação a jusante da bomba tem diâmetro $D_{4\text{-}8}$ = **100 mm** e comprimento total $L_{4\text{-}8}$ = **180 m**. Ambas as tubulações são feitas de aço comercial, com

rugosidade média de ε = **0,045 mm**. São conhecidos os coeficientes de perda localizada da entrada, K_1 = **0,7**, do filtro, K_2 = **25**, da válvula reguladora de vazão totalmente aberta, K_5 = **4,5**, dos cotovelos, $K_6 = K_7$ = **0,5**, e da saída para o reservatório elevado, K_8 = **1**. No local de instalação do sistema, a aceleração da gravidade é g = **9,8 m/s²** e a pressão atmosférica é igual a P_{atm} = **100 kPa**.

3.1 Determine o valor mínimo de carga que a bomba deve fornecer para que o sistema opere com a vazão especificada. (1,7 pontos)

3.2 Dentre os diâmetros de rotor disponíveis nas curvas de bomba abaixo, selecione aquele mais apropriado para a utilização no sistema, justificando sua escolha. Qual será a potência consumida pela bomba na vazão de projeto usando o rotor selecionado? (1,2 pontos)

3.3 Considerando a seleção feita no item anterior, determine o valor absoluto máximo da cota z_0 em que a bomba pode operar sem cavitação na vazão de projeto. (1,1 ponto)



FORMULÁRIO:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0\ ; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\vec{V}\rho\, d\forall + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = \sum\vec{F}_{ext}\ ;\ p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{constante}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\cdot\rho\cdot d\forall + \int_{SC} e\cdot\rho\cdot\vec{v}\cdot\vec{n}\cdot dA = \left(\dot{q}_{liq,e} + \dot{w}_{liq,e}\right); \qquad \vec{R} + \vec{G} = \phi_E\vec{n}_E + \phi_S\vec{n}_S + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\vec{v}\cdot\rho\cdot d\forall\ ;$$

$$\phi = p\cdot A + \beta\cdot\dot{m}\cdot V \qquad \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g} + z_2\right) + H_{maq} = \Sigma\text{perdas}\ ;$$

$$h_L \text{ ou } h_f = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g}\ ; \qquad h_m \text{ ou } h_s = K_S\frac{\bar{V}^2}{2g}\ ; \qquad H_{maq} = H_B = \frac{\dot{W}_B}{\gamma Q} \text{ ou } H_T = \frac{\dot{W}_T}{\gamma Q}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right); \qquad f = \frac{64}{Re}\ ; \quad Re = \frac{V\cdot D}{\nu}; \qquad NPSH_D = \frac{p_S}{\gamma} + \frac{\bar{V}_S^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma}; \qquad \tau = \mu\frac{dv_x}{dy}$$

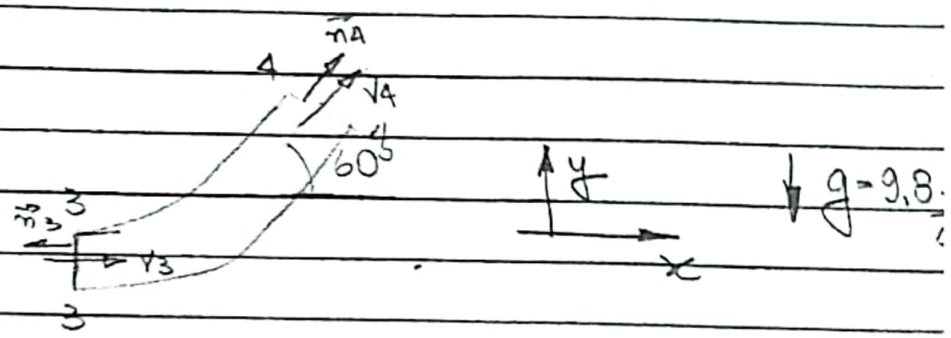
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

1ª QUESTÃO:

$D_2 = 0.05\,m \rightarrow S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 0.00196\,m^2$

$F_{Fio} = 35\,N$

Eq. Desviador



$\vec{G} + \vec{R} = \Phi_3 \vec{n}_3 + \Phi_4 \vec{n}_4$

Na direção x:

$-R_x = -\beta_3 M_3 V_3 + \beta_4 M_4 V_4 \cos 60°$

Hip: Mov. turbulento: $\beta_i \cong 1$

$-R_x = -V_3^2 S\rho + V_4^2 S\rho \cos 60°$ $\qquad V_3 = V_4 = V$

$-R_x = F_{Fio} = \rho V^2 S(-1 + \cos 60°) = -0.5\rho V^2 S$

$35 = 0.5 \cdot 1000 \cdot V^2 \cdot 1.96 \times 10^{-3}$

$V^2 = 35.7$

$V = 5.98\,m/s \cong 6.0\,m/s$

a) $Q = 0.0117\,m^3/s$ ou $11.7\,L/s$ (1,5 ptos)

b) Perda de carga total $\Delta H_{1,2}$

Eq. Energia entre 1-1 e 2-2:

$-H_1 + H_2 = \frac{W_m}{\gamma Q} - \frac{W_a}{\gamma Q}$ $\qquad W_m = 100\,W$

$H_1 = \frac{19.600}{10^4} + 2 = 3.96\,m$

$H_2 = \frac{5.98^2}{2 \cdot 9.8} = 1.82\,m$

$-3.96 + 1.82 = \frac{100}{10^4 \times 11.7 \times 10^{-3}} \cdot 0.85 - \Delta H_{1,2}$

$\boxed{\Delta H_{1,2} = 3.0\,m}$ (1,5 ptos)

$$H_2 = \frac{5{,}98^2}{2 \cdot 3{,}8} = 1{,}82 \text{ m}$$

$10^4 \times 11{,}7 \times 10^{-3}$

$$\boxed{\Delta H_{1,2} = 3{,}0 \text{ m}}$$ (1,5 ptos)

2ª QUESTÃO

(a) Eq. Navier-Stokes em coord. cilíndricas na dir. axial z:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial V_z}{\partial t}}_{=0\,(RP)} + \underbrace{V_r \frac{\partial V_z}{\partial r}}_{=0\,(V_r=0)} + \underbrace{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}}_{=0\,(V_z=0)} + \underbrace{V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}}_{=0\,(FI)}\right) = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{=0\,(\text{sup. livre})} + \rho g_z +$$

$$+\mu\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}}_{=0}\right] \quad ; \text{ com } g_z = g \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu}$$

$$r\frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu} r^2 + C_1$$

$$V_z = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Cond. Cont:

1) $r = 0 \Rightarrow \partial V_z / \partial r = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

2) $r = R \Rightarrow V_z = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} R^2 + C_2$

$$C_2 = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} R^2$$

Assim $$\boxed{V_z(r) = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}(R^2 - r^2)}$$

(b) $$\tau_{rz} = -\mu\left(\underbrace{\frac{\partial V_r}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = -\mu\frac{\partial V_z}{\partial r}$$

Obs: o sinal (-) é porque y = -r uma vez que y é medido a partir do fundo da canaleta e r a partir da superfície.

$$\tau_{rz} = -\mu\left(-\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot 2r}{4\mu}\right) \Rightarrow \boxed{\tau_{rz} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha\, r}{2}}$$

$$\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}$$

Assim $\boxed{V_z(r) = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)}$

(b) $\tau_{rz} = -\mu\left(\underbrace{\frac{\partial V_r}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = -\mu \frac{\partial V_z}{\partial r}$

Obs: o sinal (-) é porque y = -r uma vez que y é medido a partir do fundo da canaleta e r a partir da superfície.

$$\tau_{rz} = -\mu\left(-\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha \cdot 2r}{4\mu}\right) \Rightarrow \boxed{\tau_{rz} = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha\, r}{2}}$$

(c)

$$Q = \int_0^R V_z(r) \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha R^2}{4\mu} \cdot \pi \cdot r\, dr - \int_0^R \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha\, r^2}{4\mu} \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$Q = \left[\frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} \cdot R^2 \cdot \frac{r^2}{2}\right]_0^R - \left[\frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha R^4}{8\mu} - \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha R^4}{16\mu}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha R^4}{16\mu}}$$

3ª Questão (3,5 pontos)

(a) A equação da energia entre os pontos 0 e 9 fornece

$$\left(\cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_0 \bar{V}_0^2}{2g}} + z_0\right) - \left(\cancel{\frac{p_9}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_9 \bar{V}_9^2}{2g}} + z_9\right) - h_{b,m} = h_{L_t}|_{1-3} + h_{L_t}|_{4-8}$$

$$h_{b,m} = z_9 - z_0 + \left(f_{1-3}\frac{L_{1-3}}{D_{1-3}} + K_1 + K_2\right)\frac{\bar{V}_{1-3}^2}{2g} + \left(f_{4-8}\frac{L_{4-8}}{D_{4-8}} + K_5 + K_6 + K_7 + K_8\right)\frac{\bar{V}_{4-8}^2}{2g} \quad (1)$$

As velocidades médias podem ser calculadas pela vazão

$$\bar{V}_{1-3} = \frac{4Q}{\pi D_{1-3}^2} = \frac{4 \times 70/3600}{\pi \times 0{,}260^2} = 0{,}366\,\text{m/s} \quad \boxed{0{,}3\ \text{pt}}$$

$$\bar{V}_{4-8} = \frac{4Q}{\pi D_{4-8}^2} = \frac{4 \times 70/3600}{\pi \times 0{,}100^2} = 2{,}48\,\text{m/s} \quad \boxed{0{,}3\ \text{pt}}$$

Os fatores de atrito podem ser obtidos pelo diagrama de Moody ou equação de Colebrook

$$Re_{1-3} = \frac{\bar{V}_{1-3}D_{1-3}}{\nu} = \frac{0{,}366 \times 0{,}260}{10^{-6}} = 9{,}52 \times 10^4; \qquad \frac{\varepsilon}{D_{1-3}} = \frac{0{,}045}{260} = 1{,}73 \times 10^{-4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_{1-3}}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_{1-3}}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re_{1-3}\sqrt{f_{1-3}}}\right) \Rightarrow f_{1-3} = 0{,}0191 \quad \boxed{0{,}3\ \text{pt}}$$

$$Re_{4-8} = \frac{\bar{V}_{4-8}D_{4-8}}{\nu} = \frac{2{,}48 \times 0{,}100}{10^{-6}} = 2{,}48 \times 10^5; \qquad \frac{\varepsilon}{D_{4-8}} = \frac{0{,}045}{100} = 4{,}50 \times 10^{-4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_{4-8}}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D_{4-8}}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re_{4-8}\sqrt{f_{4-8}}}\right) \Rightarrow f_{4-8} = 0{,}0182 \quad \boxed{0{,}3\ \text{pt}}$$

Substituindo os valores numéricos na eq. (1):

$$h_{b,m} = (35+4) + \left(0{,}0191 \times \frac{20}{0{,}260} + 0{,}7 + 25\right)\frac{0{,}366^2}{2 \times 9{,}8}$$
$$+ \left(0{,}0182 \times \frac{180}{0{,}100} + 4{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 1\right)\frac{2{,}48^2}{2 \times 9{,}8} = 51{,}5\,\text{m} \quad \boxed{0{,}5\ \text{pt}}$$

(b) No gráfico de carga e rendimento, na linha vertical de $Q = 70\,\text{m}^3/\text{h}$, o ponto correspondente a $h_{b,m} = 51{,}5\,\text{m}$ fica entre as curvas dos rotores de diâmetro 185 mm e 195 mm. Tomamos o rotor de diâmetro maior, ou seja, $D_r = 195\,\text{mm}$ e ajustamos a vazão para o valor de projeto fechando parcialmente a válvula. Este rotor é o que permite a operação do sistema na vazão de projeto com o menor gasto energético. Rotores maiores apresentariam maior rendimento, mas a carga da bomba também seria maior (a válvula teria que ser mais fechada, provocando maior perda de carga, para que a vazão ficasse no ponto de projeto) e resultaria numa maior potência

perda de carga, para que a vazão ficasse no ponto de projeto) e resultaria numa maior potência consumida, pois o aumento relativo de carga superaria o aumento relativo de rendimento. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

Ainda no gráfico de carga e rendimento, vemos que o rotor de 195 mm numa vazão de 70 m³/h fornece uma carga $h_b = 57{,}5\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$, e tem um rendimento de $\eta_b = 69\%$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$. Portanto, a potência consumida será:

$$\dot{W}_m = \frac{\gamma Q h_b}{\eta_b} = \frac{998 \times 9{,}8 \times 70/3600 \times 57{,}5}{0{,}69} = 15850\,\mathrm{W} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

(c) Para que a bomba não cavite, $\mathrm{NPSH}_D \geq \mathrm{NPSH}_R$, e a cota máxima z_0 será aquela para a qual $\mathrm{NPSH}_D = \mathrm{NPSH}_R$. Matematicamente,

$$\frac{p_3}{\gamma} + \frac{\bar{V}_3^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma} = \mathrm{NPSH}_R \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{\gamma} + \frac{\bar{V}_3^2}{2g} = \mathrm{NPSH}_R + \frac{p_v}{\gamma} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}} \tag{2}$$

Aplicando a equação de energia entre os pontos 0 e 3, lembrando que devemos usar valores absolutos de pressão:

$$\left(\frac{p_0}{\gamma} + \cancel{\frac{\alpha_0 \bar{V}_0^2}{2g}} + z_0\right) - \left(\frac{p_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3 \bar{V}_3^2}{2g} + \cancel{z_3}\right) = \left(f\frac{L_{1,3}}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} + K_1 + K_2\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

Substituindo a eq. (2) na expressão acima e isolando z_0:

$$z_0 = \mathrm{NPSH}_R + \frac{p_v}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} + \left(f_{1-3}\frac{L_{1-3}}{D_{1-3}} + K_1 + K_2\right)\frac{\bar{V}_{1-3}^2}{2g} \tag{3}$$

Para a vazão de $70\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$, a curva da bomba fornece $\mathrm{NPSH}_R = 4\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$. Substituindo os valores numéricos na eq. (3):

$$z_0 = 4 + \frac{2340}{998 \times 9{,}8} - \frac{100000}{998 \times 9{,}8} + \left(0{,}0191 \times \frac{20}{0{,}260} + 0{,}7 + 25\right)\frac{0{,}366^2}{2 \times 9{,}8} = -5{,}80\,\mathrm{m}$$

Portanto, o valor absoluto máximo da cota z_0 (distância vertical entre o nível do reservatório inferior e o plano horizontal que contém a bomba) é de 5,80 m $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$.