ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3230 – MECÂNICA DOS FLUIDOS I

2ª PROVA – 17/10/2018 – Duração de 120 minutos

RECOMENDAÇÕES

- Preencha todas as informações da capa do Caderno de Respostas
- Cada questão deve ser resolvida na página identificada do Caderno de Respostas
- Todos aparelhos de comunicação devem permanecer desligados durante toda a prova

1ª Questão (3,0 pontos)

Em um sistema de movimentação de ar apresentado na figura há entrada de ar pela seção **1-1**, seguida de um trocador de calor que pode aquecer o ar (***condição A***) ou não aquecer (***condição B***). Em seguida o ar é inserido em uma caixa de distribuição de ar podendo escoar para três saídas nas seções **3-3**, **4-4** e **6-6**. Na seção **5-5** há um pistão que pode movimentar-se ou estar travado em repouso. Na seção **6-6** há um tubo de Pitot posicionado de modo a medir uma velocidade que tem valor muito próximo ao valor da velocidade média nesta seção transversal, seguido por um ventilador auxiliar.

São dados:

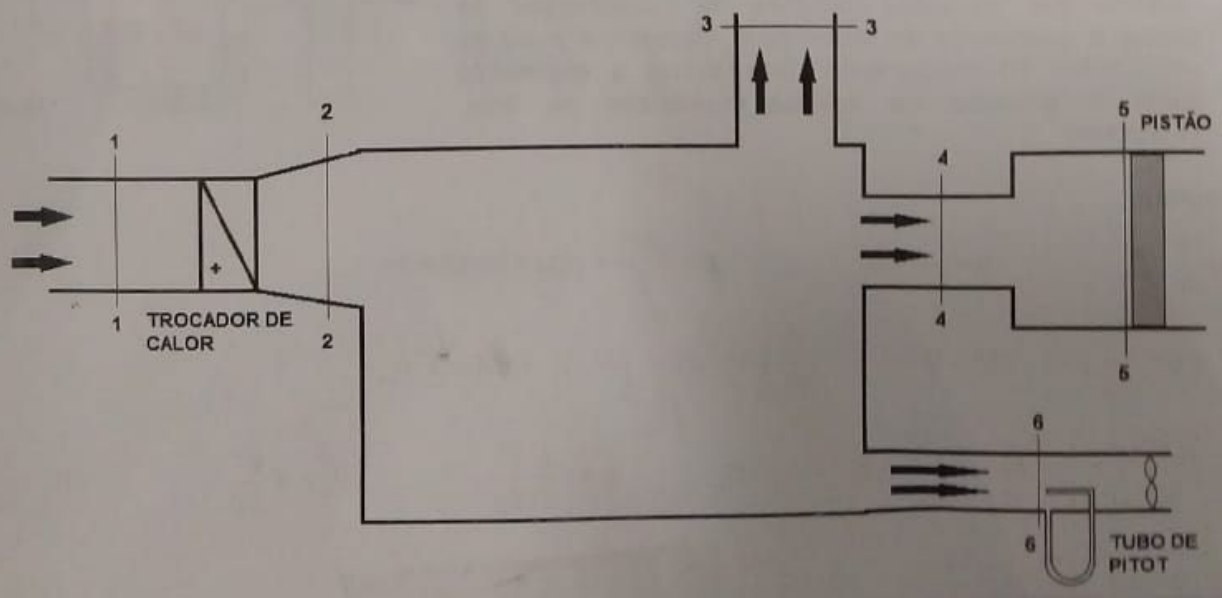
- Na seção **1-1**: vazão em massa $\dot{m}_1$ = **6 kg/s**, massa específica ρ_1 = **1,2 kg/m³** e área A_1 = **0,5 m²**;
- Na ***condição A*** o trocador de calor aquece o ar e sua massa específica na seção **2-2** é ρ_2 = **0,8 kg/m³**;
- As áreas das seções de saída são: $A_3 = A_4$ = **0,375 m²**, A_5 = **1,5 m²** e A_6 = **0,25 m²**;

Pede-se:

1.1. Para ***condição A***, com o trocador de calor aquecendo o ar, o pistão movendo-se com velocidade constante, e as vazões mássicas de saída sendo $\dot{m}_3 = \dot{m}_4$ e $\dot{m}_6 = 2\dot{m}_3$, determinar os valores para a vazão em massa $\dot{m}_3$, a vazão volumétrica Q_3, a velocidade média na seção V_3 e a velocidade V_5 do pistão na seção **5-5**; (1,5 ponto)

1.2. Desenvolver uma expressão para calcular a velocidade medida com o tubo de Pitot a partir da equação de Bernoulli aplicada na seção **6-6**, na qual são medidas as pressões estática e total. Considerando a mesma condição do item 1.1, calcular o valor da pressão dinâmica medida por este instrumento (p_{din}); (1,0 ponto)

1.3. Para a ***condição B*** em que o ar não é aquecido e o pistão está travado, e considerando que as vazões em massa de saída são $\dot{m}_6 = 4\dot{m}_3$ neste caso, determinar qual a vazão volumétrica Q_6 e a velocidade média V_6. (0,5 ponto)

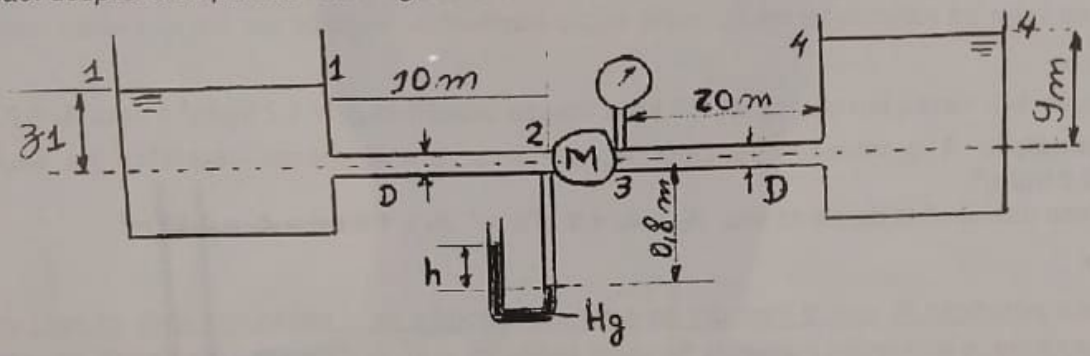


2ª Questão (3,5 pontos)

Dois reservatórios de água abertos para a atmosfera são conectados por uma tubulação de mesmo material e diâmetro constante D = **50 mm** e uma máquina hidráulica **M**, garantindo-se um escoamento permanente, conforme esquematizado na figura abaixo. Os seguintes dados são fornecidos para essa instalação: Q = **6,1 L/s**; p_3 = **120 × 10³ Pa**; ρ = **1000 kg/m³**; γ_{Hg} = **133000 N/m³**; g = **10 m/s²**; h = **20 cm**; μ = **1 × 10⁻³ Pa·s**. Pede-se:

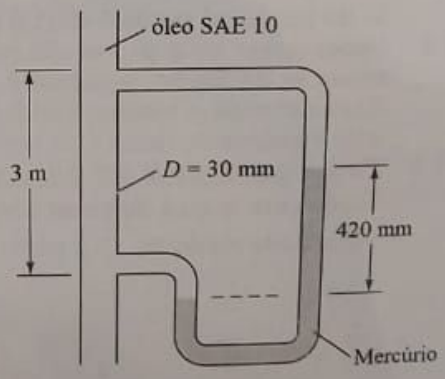
2.1. Mostrar por meio de cálculo o sentido do escoamento. Justificar o valor do coeficiente de energia cinética adotado. (1,0 ponto)
2.2. Calcular a perda de carga entre as seções 3 e 4, ou 4 e 3. (0,5 ponto)
2.3. Calcular a carga da máquina e o tipo de máquina. (0,5 ponto)
2.4. Calcular a potência hidráulica trocada pela máquina com o fluido, em watts. (0,5 ponto)
2.5. Calcular a cota z_1 do reservatório indicada na figura. (1,0 ponto)

Observação: despreze as perdas nas singularidades.



3ª Questão (3,5 pontos)

Óleo SAE 10 a 20 °C (ρ_o = **870 kg/m³**, μ_o = **0,104 Pa·s**) escoa no interior do tubo vertical liso de **30 mm** de diâmetro interno mostrado na figura. O desnível do manômetro de mercúrio (ρ_{Hg} = **13600 kg/m³**) é de **420 mm**, conforme mostrado na figura. A aceleração da gravidade no local é **9,8 m/s²**. Determine:



3.1. O sentido do escoamento. (1,0 ponto)
3.2. A vazão volumétrica de óleo. (1,0 ponto)
3.3. Partindo das equações integrais de conservação de massa e quantidade de movimento, obtenha o perfil de velocidades do escoamento. Desenvolva a expressão literal e substitua os valores numéricos no final. (1,5 ponto)

Formulário:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad p_1 = \gamma h + p_2 \qquad p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{constante}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V} \rho \, d\forall + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} \, dA = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g} + z_2\right) + h_m = h_{L_T} \qquad h_L = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad h_s = K \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad h_m = \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad f = \frac{64}{Re}$$

PME 3230 - 2ª PROVA - 17/10/2018

RESOLUÇÃO

1ª QUESTÃO

CONDIÇÃO A → $\rho_2 = 0{,}8\ kg/m^3$

1.1) $\dot{m}_3 = ?$ $Q_3 = ?$ $V_3 = ?$ e $V_5 = ?$

Eq. CONSERVAÇÃO da MASSA:

$\dot{m}_1 = \dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_6$, sendo $\dot{m}_4 = \dot{m}_3$ e $\dot{m}_6 = 2 \cdot \dot{m}_3$

$m_1 = 4 \cdot \dot{m}_3 \Rightarrow \dot{m}_3 = \frac{\dot{m}_1}{4} \Rightarrow \dot{m}_3 = \frac{6}{4} = \boxed{1{,}5\ \frac{kg}{s}}$

$Q_3 = \frac{\dot{m}_3}{\rho_3} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = \boxed{1{,}875\ \frac{m^3}{s}}$

$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{1{,}875}{0{,}375} = \boxed{5\ \frac{m}{s}}$

$\dot{m}_5 = \dot{m}_4 = \dot{m}_3 \rightarrow \dot{m}_5 = 1{,}5\ \frac{kg}{s}$

$V_5 = \frac{\dot{m}_5}{\rho_5 \cdot A_5} = \frac{1{,}5}{0{,}8 \cdot 1{,}5} = \boxed{1{,}25\ \frac{m}{s}}$

1.2) Equação de Bernoulli ao longo de L.C. alinhada com o tubo de Pitot, na seção 6-6, entre dois pontos A e B:

EM A → p_A = pressão estática

v_A = velocidade na L.C. alinhada com Pitot

EM B → p_B = pressão total

$v_B = 0$ (velocidade nula)

$p_A + \rho\frac{v_A^2}{2} + \cancel{\rho g z_A} = p_B + \cancel{\rho\frac{v_B^2}{2}} + \cancel{\rho g z_B}$ $(z_A = z_B)$

$\rho\frac{v_A^2}{2} = p_B - p_A = p_{TOTAL} - p_{ESTATICA} = p_{dinâmica}$

$p_{din} = \rho\frac{v_A^2}{2}$; mas $v_6 = V_6 = \frac{\dot{m}_6}{\rho_6 \cdot A_6} = \frac{2 \cdot \dot{m}_3}{\rho_6 A_6}$

$V_6 = \frac{2 \cdot 1{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}25} = 15\ \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{p_{din} = 90\ Pa}$

1.3) CONDIÇÃO B → $\rho_2 \cong \rho_1 = 1,2 \frac{kg}{m^3}$
(sem aquecimento)

$\dot{m}_6 = 4 \cdot \dot{m}_3$; sem movimento no pistão:

EQ. CONSERV. da MASSA:

$\dot{m}_1 = \dot{m}_3 + \dot{m}_6 = \dot{m}_3 + 4 \cdot \dot{m}_3 = 5 \cdot \dot{m}_6$

$\dot{m}_3 = 1,2 \frac{kg}{s}$ $\quad \dot{m}_6 = 4,8 \frac{kg}{s}$

$Q_6 = \frac{\dot{m}_6}{\rho_6} = 4 \frac{m^3}{s}$

$V_6 = \frac{Q_6}{A_6} = \frac{4}{0,25} = \boxed{16 \frac{m}{s}}$

2ª Questão (3,5 pontos)

a) Determinar o sentido do escoamento. Justificar o coeficiente de energia cinética adotado

$$H_3 = \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + \cancel{z_3}^{\,0} = \frac{(3,11)^2}{20} + \frac{120\times10^3}{10^4} = 0,48 + 12 = 12,48\,m$$

$$\begin{cases} V_3 = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} = \dfrac{4\times 6,1\times10^{-3}}{\pi\times(0,05)^2} = 3,11\ m/s \\ p_3 = 120\times10^3\ Pa\ (\text{dado}) \end{cases}$$

$$H_4 = \frac{\alpha_4 V_4^2}{2g} + \frac{p_4}{\gamma} + z_4 = 9\,m$$

$H_3 > H_4 \Rightarrow$ sentido de escoamento de 3 para 4 (0,5 pto)

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3,11\times0,05}{10^{-6}} = 1,55\times10^5 \Rightarrow$$ escoamento turbulento (0,5 pto) $\Downarrow$ $\alpha \cong 1$

ou $Re = \dfrac{\rho V D}{\mu}$

b) Calcular a perda de carga entre seções 3 e 4

$$H_3 - H_4 = \Delta H_{3-4} = 12,48 - 9,00 = 3,48\,m$$ (0,5 pto)

c) Calcular a carga da máquina e o seu tipo

$$\forall C_{2-3} \Rightarrow H_2 - H_3 = \cancel{\frac{W_a}{\gamma Q}}^{\,0} - H_m$$

$$H_2 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \cancel{z_2}^{\,0} = \frac{(3,11)^2}{20} + \frac{18600}{10000} = 0,48 + 1,86 = 2,34\,m$$

Manometria: $\gamma_{Hg} h - \gamma_{H_2O}\times0,8 = p_2$

$$\begin{cases} p_2 = 133000\times0,20 - 10000\times0,8 = 26600 - 8000 \\ p_2 = 18600\ Pa \\ V_2 = V_3 = 3,11\ m/s \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_2 = 2{,}34\ m \\ H_3 = 12{,}48\ m \end{array}\right] \Rightarrow H_m = 12{,}48 - 2{,}34 = 10{,}14\ m \quad (0{,}5\ pto)$$

$H_m > 0 \Rightarrow$ A máquina é uma Bomba! (0,5 pto)

d) Determinar a potência hidráulica fornecida pela máquina com o fluido, em watts

$$\dot{W}_B = \gamma Q H_B = 10000 \times 6{,}1 \times 10^{-3} \times 10{,}14$$

$$\dot{W}_B = 618{,}54 \text{ Watts} \quad (0{,}5\ pto)$$

e) Determinar a cota z_1 do reservatório indicado na figura

$$\forall C_{1-2} \Rightarrow H_1 - H_2 = \left(\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q}\right)_{1-2}$$

$$H_2 = 2{,}34\ m$$

Como as tubulações são iguais e desprezando-se os efeitos de singularidades (apenas diferem pelo comprimento)

$$L_{1-2} = \frac{1}{2} L_{3-4} \Rightarrow \left(\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q}\right)_{1-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{W}_a}{\gamma Q}\right)_{3-4} = \frac{1}{2} \times 3{,}48 = 1{,}74\ m$$

$$H_1 - 2{,}34 = 1{,}74 \Rightarrow H_1 = 4{,}08\ m$$

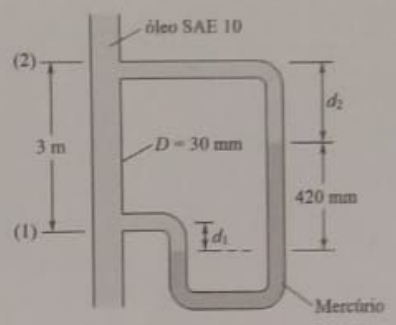
$$H_1 = \underbrace{\frac{V_1^2}{2g}}_{0} + \underbrace{\frac{p_1}{\gamma}}_{0} + z_1 = 4{,}08 \Rightarrow z_1 = 4{,}08\ m \quad (0{,}5\ pto)$$

3ª Questão (3,5 pontos)

(a) Para determinar o sentido do escoamento, assumimos que ele ocorre em um sentido e aplicamos a equação da energia para encontrar a perda de carga. Se o valor da perda de carga for positivo, o sentido está correto, e se for negativo, o escoamento na verdade ocorre no sentido oposto.

Assumindo que o escoamento ocorre de baixo para cima, chamando a seção da tomada de pressão inferior de 1 e a da tomada de pressão superior de 2, a equação da energia fornece:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma_o} + \cancel{\frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g}} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma_o} + \cancel{\frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g}} + z_2\right) = h_L \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 - p_2}{\gamma_o} + (z_1 - z_2) = h_L$$



Aplicando a lei de Stevin no manômetro para achar $(p_1 - p_2)$:

$$p_1 - p_2 = -d_1\gamma_o + 0{,}42\gamma_{\text{Hg}} + d_2\gamma_o = (3 - 0{,}42)\gamma_o + 0{,}42\gamma_{\text{Hg}}$$

$$p_1 - p_2 = 9{,}8 \times (2{,}58 \times 870 + 0{,}42 \times 13600) = 77975\,\text{Pa} \quad \boxed{\textbf{0,4 pt}}$$

Substituindo na equação da energia: $h_L = \dfrac{77975}{870 \times 9{,}8} - 3 = 6{,}146\,\text{m}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

Como $h_L > 0$, o escoamento de fato ocorre de baixo para cima. $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

(b) A equação de Darcy-Weisbach fornece $h_L = f\dfrac{L}{D}\dfrac{\bar{V}^2}{2g}$. Assumindo escoamento laminar (que verificaremos posteriormente), temos $f = 64/Re$. Assim:

$$h_L = \frac{64\mu}{\rho_o \bar{V} D}\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = \frac{h_L \rho_o D^2 g}{32\mu L} = \frac{6{,}146 \times 870 \times 0{,}03^2 \times 9{,}8}{32 \times 0{,}104 \times 3} = 8{,}398\,\text{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,4 pt}}$$

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{870 \times 8{,}398 \times 0{,}03}{0{,}104} = 1185 < 2100 \quad \Rightarrow \quad \text{laminar} \checkmark \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

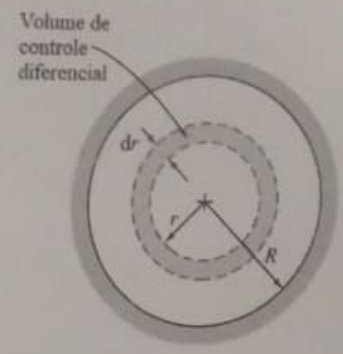
$$Q = \bar{V}A = \frac{\bar{V}\pi D^2}{4} = \frac{8{,}398 \times \pi \times 0{,}03^2}{4} = 0{,}00334\,\text{m}^3/\text{s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

(c) Considerando escoamento plenamente desenvolvido, em regime permanente, num tubo vertical de raio $R = 15\,\text{mm}$, a equação da quantidade de movimento na direção y (vertical) fornece:

$$F_{S_y} + F_{B_y} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho u \, d\forall} + \cancel{\int_{SC} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA}$$

$$\therefore F_{S_y} = -F_{B_y} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Admitiremos escoamento axissimétrico e analisaremos um VC que é um anel circular diferencial.



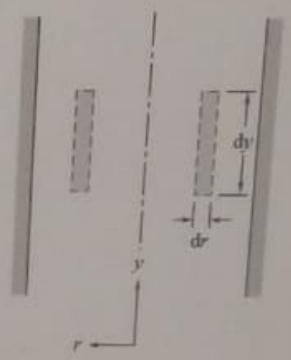
Forças de superfície:

$$\mathrm{d}F_c = p2\pi r\mathrm{d}r \qquad \text{(face de cima)}$$

$$\mathrm{d}F_b = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)2\pi r\mathrm{d}r \qquad \text{(face de baixo)}$$

$$\mathrm{d}F_i = -\tau_{ry}2\pi r\mathrm{d}y \qquad \text{(superfície interna)}$$

$$\mathrm{d}F_e = \left(\tau_{ry} + \frac{\mathrm{d}\tau_{ry}}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right)2\pi(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}x \qquad \text{(superfície externa)}$$



Força de corpo: $\mathrm{d}F_{B_y} = -\rho_o g 2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}y$

Somatória: $\mathrm{d}F_{S_y} = \mathrm{d}F_c + \mathrm{d}F_b + \mathrm{d}F_i + \mathrm{d}F_e = -F_{B_y}$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}y + \tau_{ry}2\pi\mathrm{d}r\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}\tau_{ry}}{\mathrm{d}r}2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}y = \rho_o g 2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}y \quad \left(\text{desprezou-se o termo } \frac{\mathrm{d}\tau_{ry}}{\mathrm{d}r}2\pi\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}y\right)$$

Dividindo por $2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}y$: $\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g = \dfrac{\tau_{ry}}{r} + \dfrac{\mathrm{d}\tau_{ry}}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\tau_{ry})}{\mathrm{d}r}$ **0,3 pt**

Não existe escoamento na direção radial, portanto p não varia com r e podemos integrar em relação a r:

$$\int \frac{\mathrm{d}(r\tau_{ry})}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \int r\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right)\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad r\tau_{ry} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right) + C_1$$

Fluido newtoniano: $\tau_{ry} = \mu\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \quad \mu\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right) + \dfrac{C_1}{r}$

Integrando mais uma vez: $v = \dfrac{r^2}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right) + \dfrac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$ **0,3 pt**

<u>Condições de contorno</u>

- Velocidade finita no centro do tubo ($r = 0$): $C_1 = 0$
- $v = 0$ para $r = R$ (não escorregamento): $C_2 = -\dfrac{R^2}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right)$

Assim: $v = \dfrac{r^2}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right) - \dfrac{R^2}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right) = \dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho_o g\right)(r^2 - R^2)$ **0,3 pt**

Substituindo os valores numéricos

$$v = \frac{1}{4\times 0{,}104}\left(-\frac{77975}{3} + 870\times 9{,}8\right)(r^2 - 0{,}015^2) = 41985\times(2{,}25\times 10^{-4} - r^2)\ \mathrm{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$