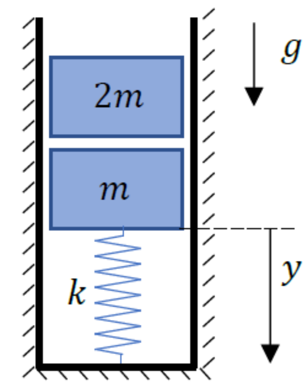
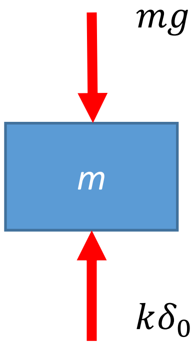
Questão 1

1ª Questão (3,0 pontos). Um bloco de massa m está apoiado, em equilíbrio, sobre uma mola de constante elástica k. Subitamente, um segundo bloco de massa $2m$ é apoiado, sem choque, sobre o primeiro bloco. Pede-se:

a) A deformação inicial da mola.
b) O deslocamento vertical correspondente à máxima velocidade dos blocos.
c) A máxima velocidade dos blocos.
d) A máxima deformação da mola.
e) A máxima força exercida pela mola sobre os dois blocos.



mg



$k\delta_0$

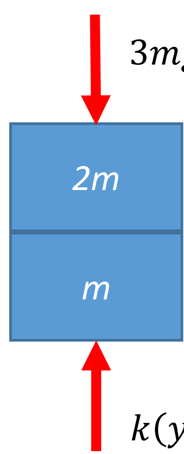
$$\sum F_y = 0$$

$$mg - k\delta_0 = 0$$

$$\boxed{\delta_0 = \frac{mg}{k}}$$

(0,6)

$3mg$



$$k(y+\delta_0) = ky + mg$$

$$3ma\vec{j} = (3mg - ky - mg)\vec{j}$$

$$a = \frac{2mg}{3} - \frac{ky}{3}$$

$v_{máx}$ quando $a = 0$

$$2g - \frac{k}{m} y_{|p/v_{max}} = 0$$

$$\boxed{y_{|p/v_{max}} = \frac{2mg}{k}}$$

(0,6)

Questão 1 (continuação)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy} = \frac{2g}{3} - \frac{ky}{3m}$$

$$vdv = \left(\frac{2g}{3} - \frac{ky}{3m}\right)dy$$

$$\int_0^v vdv = \int_0^y \left(\frac{2g}{3} - \frac{ky}{3m}\right)dy$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2gy}{3} - \frac{ky^2}{6m}$$

$$v^2 = \frac{4gy}{3} - \frac{ky^2}{3m}$$

$$v_{máx}^2 = \frac{8mg^2}{3k} - \frac{k}{3m}\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 = \frac{4mg^2}{3k}$$

$$\boxed{v_{máx} = 2g\sqrt{\frac{m}{3k}}}$$

(0,6)

$y_{máx}$ quando $v = 0$

$$v^2 = \frac{4gy}{3} - \frac{ky^2}{3m} = 0$$

$$y^2 - \frac{4mg}{k}y = 0$$

$$y\left(y - \frac{4mg}{k}\right) = 0$$

$$y_{máx} = \frac{4mg}{k}$$

$$\delta_{máx} = y_{máx} + \delta_0$$

$$\boxed{\delta_{máx} = \frac{5mg}{k}}$$

(0,6)

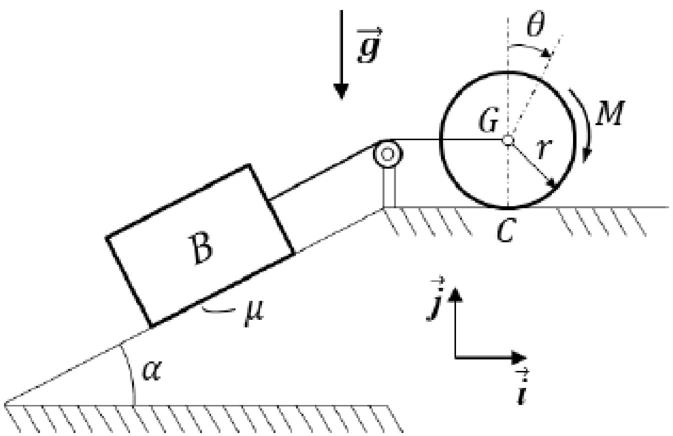
$$F_{máx} = k\delta_{máx}$$

$$\boxed{F_{máx} = 5mg}$$

(0,6)

Questão 2

2ª Questão (3,0 pontos). Um disco rígido e homogêneo de massa m e raio r rola sem escorregar sobre um plano horizontal, conforme mostrado na figura. O disco é conectado por um fio ideal a um bloco de massa $2m$ que escorrega com atrito sobre um plano com inclinação α. O sistema parte do repouso quando $\theta(0) = 0$ sob a ação de um momento binário M constante. Sabendo que o coeficiente de atrito nas interfaces de contato é μ, pede-se:



a) A energia cinética do **bloco** em função da velocidade angular ω do disco.
b) A energia cinética do **disco** em função de sua velocidade angular ω.
c) O trabalho da **força normal** atuante no **bloco** em função de θ.
d) O trabalho da **força de atrito** atuante no **bloco** em função de θ.
e) O trabalho da **força peso** atuante no **bloco** em função de θ.
f) O trabalho da **força normal** atuante no **disco** em função de θ.
g) O trabalho da **força de atrito** atuante no **disco** em função de θ.
h) O trabalho da **força peso** atuante no **disco** em função de θ.
i) O trabalho do momento binário atuante no disco em função de θ.
j) A velocidade angular do disco em função de θ.
k) A aceleração angular do disco.

$$v_G = v_B = \omega r$$

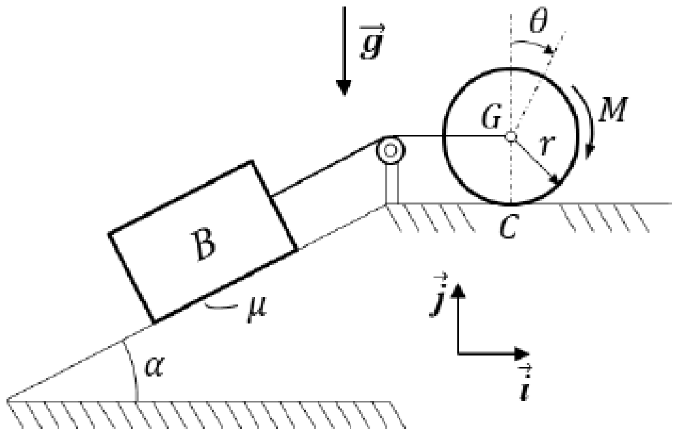
$$T_{bloco} = \frac{1}{2}(2m)v_B^2 = \frac{1}{2}(2m)(\omega r)^2$$

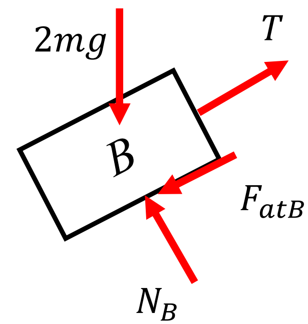
$$\boxed{T_{bloco} = mr^2\omega^2}$$ **(0,3)**

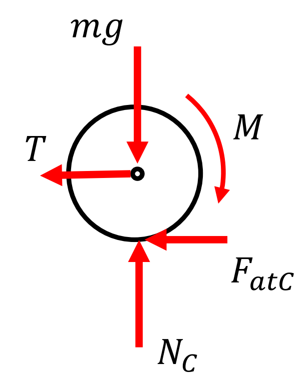
$$T_{disco} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{z_G}\omega^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\omega^2$$

$$\boxed{T_{disco} = \frac{3}{4}mr^2\omega^2}$$ **(0,3)**

Questão 2







$$\boxed{\tau_{NormalB} = 0}$$ (0,3)

$$\tau_{F_{atB}} = F_{atB}.x_B$$

$$x_B = x_G = \theta r$$

$$F_{atB} = \mu N_B$$

$$N_B = 2mgcos\alpha$$

$$\boxed{\tau_{F_{atB}} = -2\mu mgrcos\alpha.\theta}$$ (0,3)

$$\tau_{pesoB} = -2mg\Delta y_B$$

$$\Delta y_B = x_B sen\alpha = \theta r sen\alpha$$

$$\boxed{\tau_{pesoB} = -2mgrsen\alpha.\theta}$$ (0,3)

$$\boxed{\tau_{NormalC} = 0}$$ (0,15)

$$\boxed{\tau_{F_{atC}} = 0}$$ (0,15)

$$\boxed{\tau_{peso_{disco}} = 0}$$ (0,3)

$$\boxed{\tau_{binário} = M.\theta}$$ (0,3)

TEC $\tau = \Delta T$

$$\tau = T_{bloco} + T_{disco}$$

$$[-2mgr(sen\alpha + \mu cos\alpha) + M]\theta = \frac{7}{4}mr^2\omega^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{4[M - 2mrg(sen\alpha + \mu cosa)]}{7mr^2}\theta}}$$ (0,3)

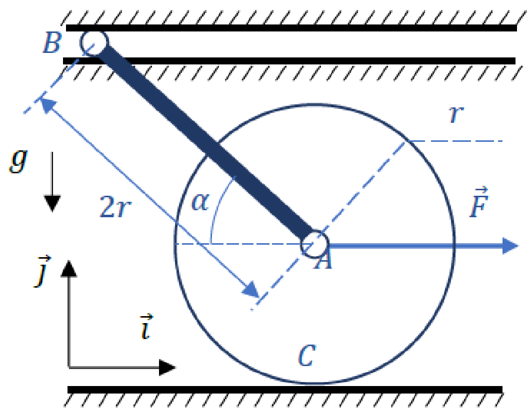
$$(\dot{\theta} = \omega)$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2[M - 2mrg(sen\alpha + \mu cosa)]}{7mr^2}}$$ (0,3)

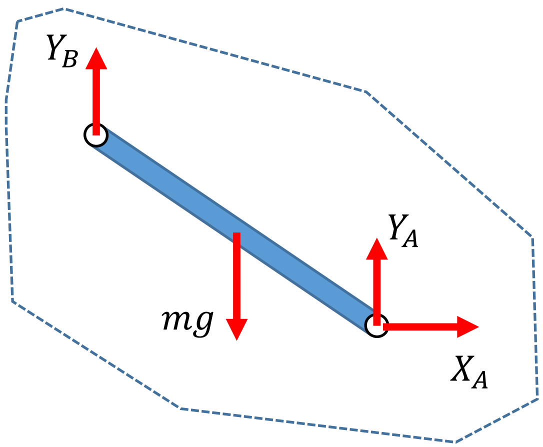
Questão 3

Questão 3 (4,0 pontos). O disco homogêneo de centro A, raio r e massa M é articulado em A a uma barra homogênea esbelta AB, de massa m, comprimento $2r$ e inclinada de um ângulo α em relação à horizontal, tendo sua outra extremidade ligada a um rolete B guiado por uma guia horizontal, conforme ilustrado na figura. Sob a ação de uma força horizontal de módulo constante $\vec{F}$, o disco rola sem escorregar sobre um plano horizontal. Desprezando o atrito no contato entre o rolete B e a guia horizontal, pede-se:

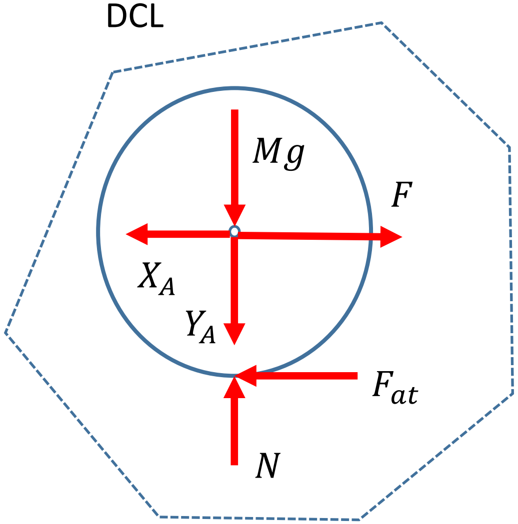
- **a)** A aceleração angular do disco.
- **b)** As magnitudes das componentes x, y da reação em C.
- **c)** As magnitudes das componentes x, y da força vincular em A.
- **d)** As magnitudes das componentes x, y da reação em B.
- **e)** O valor mínimo do coeficiente de atrito μ entre o disco e a pista para que o disco não escorregue.



DCL

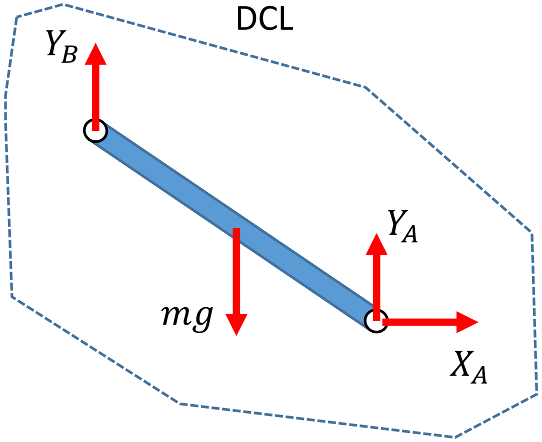


DCL



Questão 3 (continuação)

DCL



TMB na barra:

$$m a_G \vec{\imath} = (X_A)\vec{\imath} + (Y_A + Y_B - mg)\vec{\jmath}$$

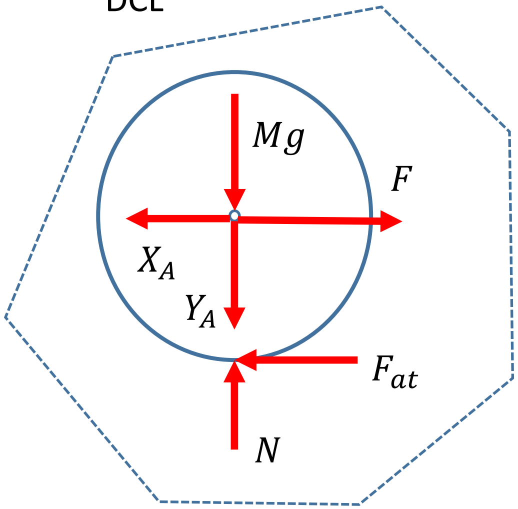
TMA na barra: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$\vec{0} = \left((Y_A - Y_B)\frac{L}{2}cos\alpha + X_A\frac{L}{2}sen\alpha \right)\vec{k}$$

Relações cinemáticas:

$$a_G = a_A = \dot{\omega} r$$

DCL



TMB no disco:

$$M a_A \vec{\imath} = (F - F_{at} - X_A)\vec{\imath} + (N - Mg - Y_A)\vec{\jmath}$$

TMA no disco: $\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A$

$$-J_{z_A}\dot{\omega}\vec{k} = -F_{at} r \vec{k}$$

$$\frac{Mr^2}{2}\dot{\omega} = F_{at} r$$

Questão 3 (continuação)

$$\begin{cases} m\dot{\omega}r = X_A \\ Y_A + Y_B = mg \\ (Y_A - Y_B)cos\alpha + X_A sen\alpha = 0 \\ M\dot{\omega}r = F - F_{at} - X_A \\ N - Y_A = Mg \\ \dot{\omega} = \dfrac{2F_{at}}{Mr} \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2F}{r(3M+2m)}}$$ **(0,8)**

$$\boxed{F_{at} = \frac{MF}{(3M+2m)}} \quad \boxed{N = Mg + \frac{mg}{2} - \frac{2mFtan\alpha}{3M+2m}}$$ **(0,8)**

$$\boxed{X_A = \frac{2mF}{(3M+2m)}} \quad \boxed{Y_A = \frac{mg}{2} - \frac{2mFtan\alpha}{3M+2m}}$$ **(0,8)**

6 equações nas 6 incógnitas:

$$\boxed{X_B = 0} \quad \boxed{Y_B = \frac{2mFtan\alpha}{3M+2m} + \frac{mg}{2}}$$ **(0,8)**

$$\dot{\omega}, X_A, Y_A, Y_B, F_{at}, N$$

Para que o disco role sem escorregar: $F_{at} \leq \mu N$

$$\mu \geq \frac{F_{at}}{N}$$

$$\boxed{\mu \geq \frac{\dfrac{MF}{(3M+2m)}}{Mg + \dfrac{mg}{2} - \dfrac{2mFtan\alpha}{3M+2m}}}$$ **(0,8)**