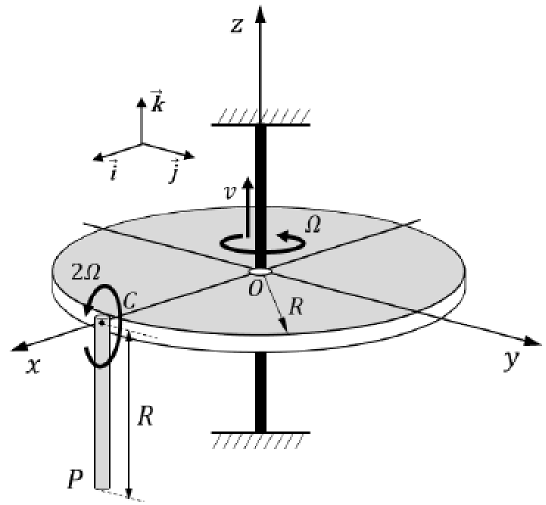
Questão 1

1ª Questão (3,0 pontos). A plataforma circular de raio R gira em torno do eixo vertical fixo Oz com velocidade angular Ω (constante) e desliza na direção do mesmo eixo com velocidade v, conforme mostrado na figura. Uma barra CP de comprimento R é articulada na plataforma em C, e gira com velocidade angular 2Ω (constante) em relação à plataforma. Para a configuração instantânea indicada, e admitindo a plataforma como referencial móvel, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário à plataforma.

a) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P da barra.
b) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P da barra.
c) O vetor rotação absoluta da barra.
d) O vetor aceleração rotacional absoluta da barra.



$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + 2\Omega\vec{\imath} \wedge (P - C)$$

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{0} + 2\Omega\vec{\imath} \wedge (-R\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = 2\Omega R\vec{\jmath}} \quad \textbf{(0,3)}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \Omega\vec{k} \wedge (P - O)$$

$$\vec{v}_{P,arr} = v\vec{k} + \Omega\vec{k} \wedge (R\vec{\imath} - R\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = \Omega R\vec{\jmath} + v\vec{k}} \quad \textbf{(0,3)}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = 3\Omega R\vec{\jmath} + +v\vec{k}}$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C)]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + 2\Omega\vec{\imath} \wedge \left[2\Omega\vec{\imath} \wedge \left(-R\vec{k}\right)\right] \qquad \boxed{\vec{a}_{P,rel} = 4\Omega^2 R\vec{k}} \quad \textbf{(0,6)}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,arr} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge \left[\Omega\vec{k} \wedge \left(R\vec{\imath} - R\vec{k}\right)\right] \qquad \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\Omega^2 R\vec{\imath}} \quad \textbf{(0,6)}$$

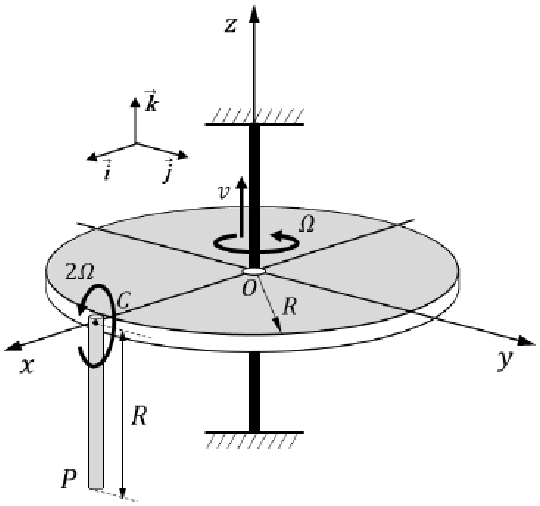
$$\vec{a}_{P,cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\Omega\vec{k} \wedge 2\Omega R\vec{\jmath} \qquad \boxed{\vec{a}_{P,cor} = -4\Omega^2 R\vec{\imath}} \quad \textbf{(0,3)}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,cor} \qquad \boxed{\vec{a}_P = -5\Omega^2 R\vec{\imath} + 4\Omega^2 R\vec{k}}$$

Questão 1 (continuação)

1ª Questão (3,0 pontos). A plataforma circular de raio R gira em torno do eixo vertical fixo Oz com velocidade angular Ω (constante) e desliza na direção do mesmo eixo com velocidade v, conforme mostrado na figura. Uma barra CP de comprimento R é articulada na plataforma em C, e gira com velocidade angular 2Ω (constante) em relação à plataforma. Para a configuração instantânea indicada, e admitindo a plataforma como referencial móvel, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário à plataforma.

a) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P da barra.
b) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P da barra.
c) O vetor rotação absoluta da barra.
d) O vetor aceleração rotacional absoluta da barra.



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \Omega\vec{k} + 2\Omega\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = 2\Omega\vec{i} + \Omega\vec{k}}$$ **(0,3)**

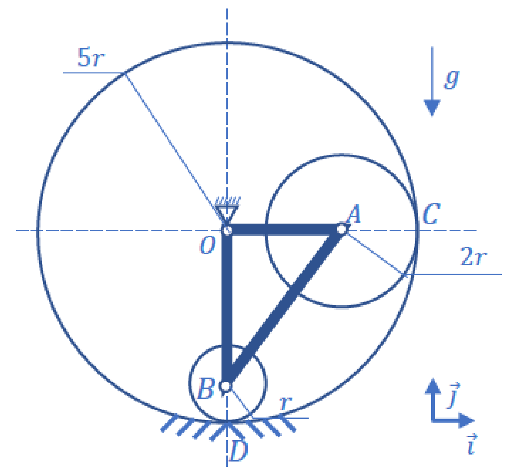
$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge 2\Omega\vec{i}$$

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = 2\Omega^2\vec{j}}$$ **(0,6)**

Questão 2

Questão 2 (3,0 pontos). A figura ao lado ilustra um mecanismo constituído por um aro fixo de raio $5r$ e dois discos, um de centro A, raio $2r$ e massa $4m$, e outro de centro B, raio r e massa m. Ambos os discos são articulados a uma treliça AOB de massa desprezível, que por sua vez é articulada no centro O do aro. O dispositivo assim construído mantém os discos em contato permanente com a superfície interna do aro, sendo C e D, respectivamente, os pontos de contato do disco de centro A e do disco de centro B com o aro. Sabendo que ambos os discos realizam movimento de rolamento sem escorregamento, pede-se:



a) A relação $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, onde ω_1 é a velocidade angular do disco de centro A e ω_2 é a velocidade angular do disco de centro B.

b) Os momentos de inércia do disco de centro A em relação ao polo C e do disco de centro B em relação ao polo D, nesta ordem.

c) Sabendo que o mecanismo parte do repouso quando $(A - O) = 3r\vec{\mathbf{i}}$, determine a velocidade angular do disco de centro A no instante em que $(A - O) = -3r\vec{\mathbf{j}}$.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega_1 \vec{k} \wedge (A - C) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (-2r\vec{\imath}) = -2\omega_1 r\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \omega_2 \vec{k} \wedge (B - D) = \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge (r\vec{\jmath}) = -\omega_2 r\vec{\imath}$$

$$\vec{v}_O = \vec{0} = \vec{v}_A - \Omega\vec{k} \wedge (A - O)$$

$$\vec{0} = -2\omega_1 r\vec{\jmath} - \Omega\vec{k} \wedge (3r\vec{\imath}) \Rightarrow -2\omega_1 r = 3\Omega r \Rightarrow \Omega = -\frac{2}{3}\omega_1$$

$$\vec{v}_O = \vec{0} = \vec{v}_B - \Omega\vec{k} \wedge (B - O)$$

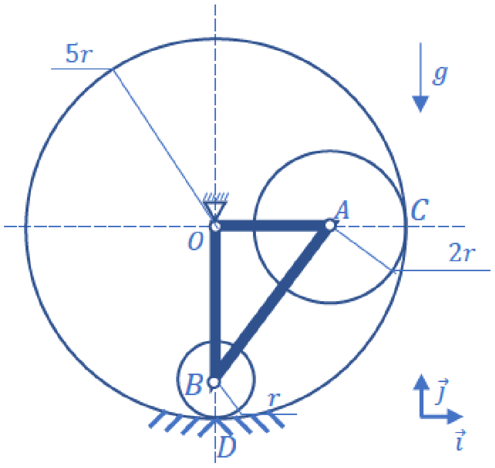
$$\vec{0} = -\omega_2 r\vec{\imath} - \Omega\vec{k} \wedge (-4r\vec{\jmath}) \Rightarrow -\omega_2 r = 4\Omega r \Rightarrow \Omega = -\frac{1}{4}\omega_2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}\omega_1 = -\frac{1}{4}\omega_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{8}{3}}$$

(1,0)

Questão 2 (continuação)

Questão 2 (3,0 pontos). A figura ao lado ilustra um mecanismo constituído por um aro fixo de raio $5r$ e dois discos, um de centro A, raio $2r$ e massa $4m$, e outro de centro B, raio r e massa m. Ambos os discos são articulados a uma treliça AOB de massa desprezível, que por sua vez é articulada no centro O do aro. O dispositivo assim construído mantém os discos em contato permanente com a superfície interna do aro, sendo C e D, respectivamente, os pontos de contato do disco de centro A e do disco de centro B com o aro. Sabendo que ambos os discos realizam movimento de rolamento sem escorregamento, pede-se:



a) A relação $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, onde ω_1 é a velocidade angular do disco de centro A e ω_2 é a velocidade angular do disco de centro B.

b) Os momentos de inércia do disco de centro A em relação ao polo C e do disco de centro B em relação ao polo D, nesta ordem.

c) Sabendo que o mecanismo parte do repouso quando $(A - O) = 3r\vec{\mathbf{i}}$, determine a velocidade angular do disco de centro A no instante em que $(A - O) = -3r\vec{\mathbf{j}}$.

$$J_{z_C} = \frac{4m(2r)^2}{2} + 4m(2r)^2 \Rightarrow \quad \boxed{J_{z_C} = 24mr^2}$$

(1,0)

$$J_{z_D} = \frac{m(r)^2}{2} + m(r)^2 \Rightarrow \quad \boxed{J_{z_D} = \frac{3mr^2}{2}}$$

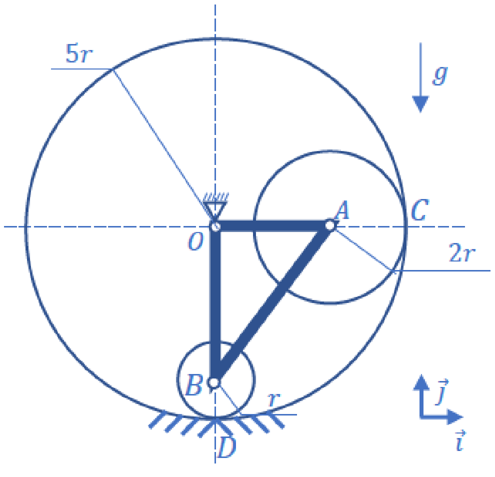
Questão 2 (continuação)

Questão 2 (3,0 pontos). A figura ao lado ilustra um mecanismo constituído por um aro fixo de raio $5r$ e dois discos, um de centro A, raio $2r$ e massa $4m$, e outro de centro B, raio r e massa m. Ambos os discos são articulados a uma treliça AOB de massa desprezível, que por sua vez é articulada no centro O do aro. O dispositivo assim construído mantém os discos em contato permanente com a superfície interna do aro, sendo C e D, respectivamente, os pontos de contato do disco de centro A e do disco de centro B com o aro. Sabendo que ambos os discos realizam movimento de rolamento sem escorregamento, pede-se:

a) A relação $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, onde ω_1 é a velocidade angular do disco de centro A e ω_2 é a velocidade angular do disco de centro B.

b) Os momentos de inércia do disco de centro A em relação ao polo C e do disco de centro B em relação ao polo D, nesta ordem.

c) Sabendo que o mecanismo parte do repouso quando $(A-O)=3r\vec{\mathbf{i}}$, determine a velocidade angular do disco de centro A no instante em que $(A-O)=-3r\vec{\mathbf{j}}$.



Pelo TEC: $\tau = \Delta T$

$$\tau = 4mg.3r - mg.4r = 8mgr$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}J_{z_C}(\omega_1)^2 + \frac{1}{2}J_{z_D}(\omega_2)^2 - T_0 = \frac{1}{2}(24mr^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3mr^2}{2}\right)\left(\frac{8\omega_1}{3}\right)^2 - 0 = \left(12+\frac{16}{3}\right)mr^2\omega_1^2 = \frac{52}{3}mr^2\omega_1^2$$

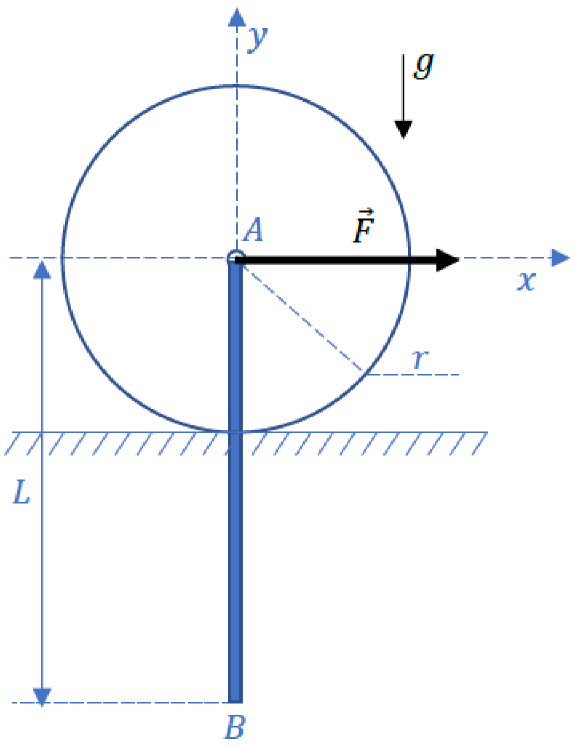
$$8mgr = \frac{52}{3}mr^2\omega_1^2 \qquad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{6g}{13r}}}$$

(1,0)

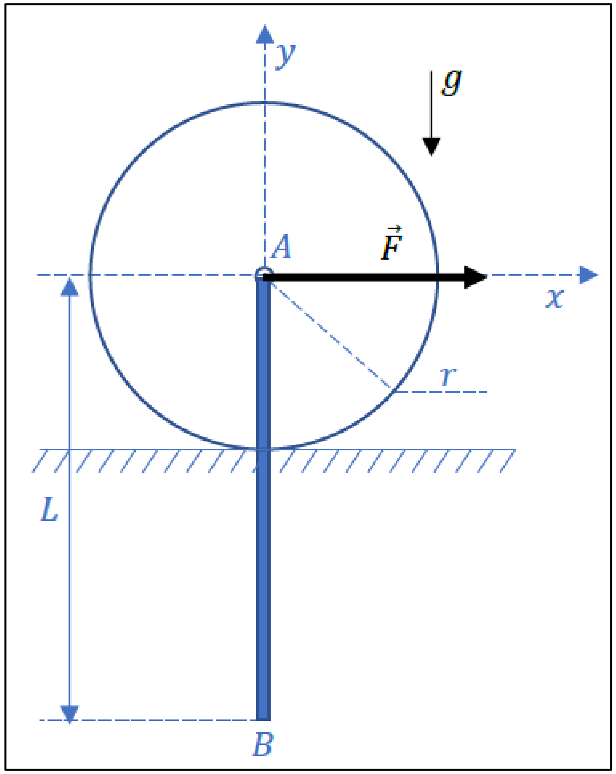
Questão 3

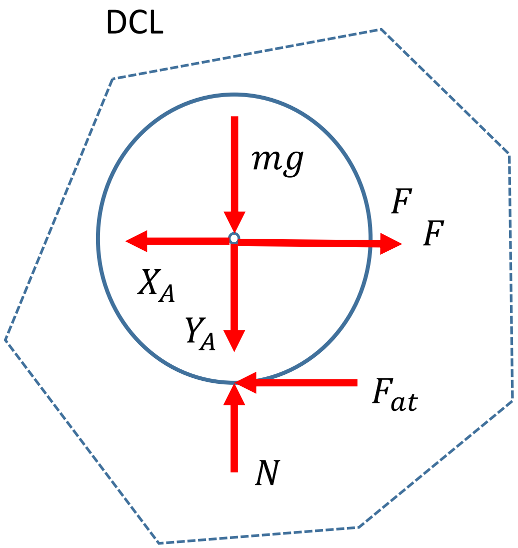
Questão 3 (4,0 pontos). A figura mostra uma barra delgada AB de comprimento L e massa M articulada a um disco de raio r e massa m, este último apoiado sobre uma pista horizontal áspera. O sistema parte do repouso sujeito a uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada ao centro A do disco. Sabendo que o disco rola sem escorregar, pede-se, **para o instante da partida** (instante imediatamente após a aplicação da força $\vec{F}$):

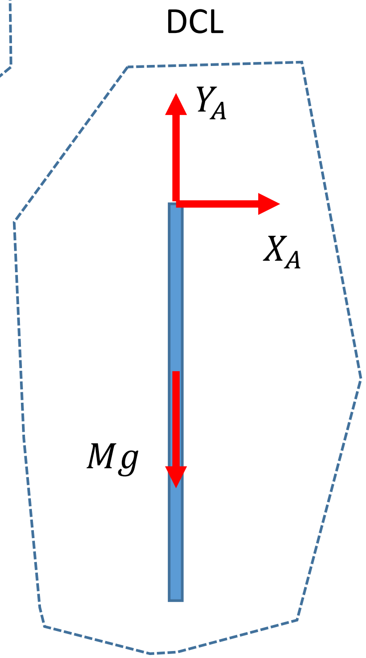
a) Desenhar os diagramas de corpo livre do disco e da barra.
b) Escrever as equações do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento para o disco e para a barra.
c) Escrever as equações da Cinemática pertinentes.
d) Determinar as acelerações angulares do disco e da barra.



Questão 3 (continuação)



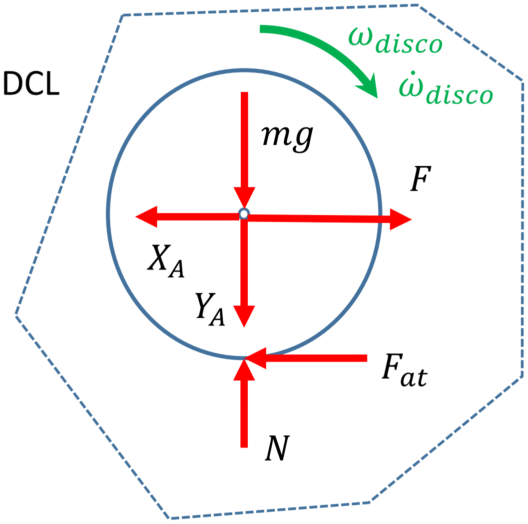




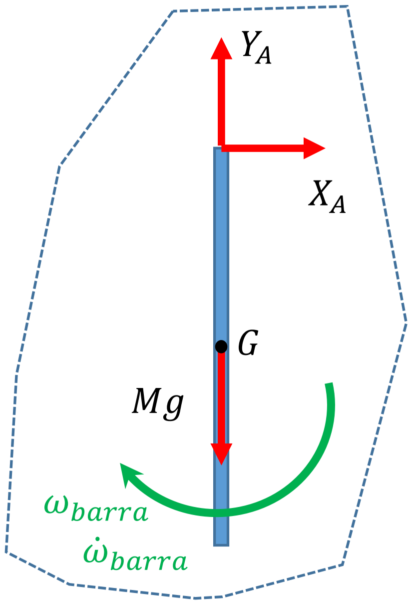
(1,0)

Questão 3 (continuação)

DCL



DCL



TMB no disco:

$$\boxed{m\vec{a}_A = (F - F_{at} - X_A)\vec{\imath} + (N - mg - Y_A)\vec{\jmath}}$$ **(0,5)**

TMA no disco: $\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A$

$\vec{\omega}_{disco} = -\omega_{disco}\vec{k}$

$\dot{\vec{\omega}}_{disco} = -\dot{\omega}_{disco}\vec{k}$

$$-J_{z_A}\dot{\omega}_{disco}\vec{k} = -F_{at}r\vec{k}$$

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\omega}_{disco} = F_{at}r \Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_{disco} = \frac{2F_{at}}{mr}}$$ **(0,5)**

TMB na barra:

$$\boxed{M\vec{a}_G = (X_A)\vec{\imath} + (Y_A - Mg)\vec{\jmath}}$$ **(0,5)**

TMA na barra: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

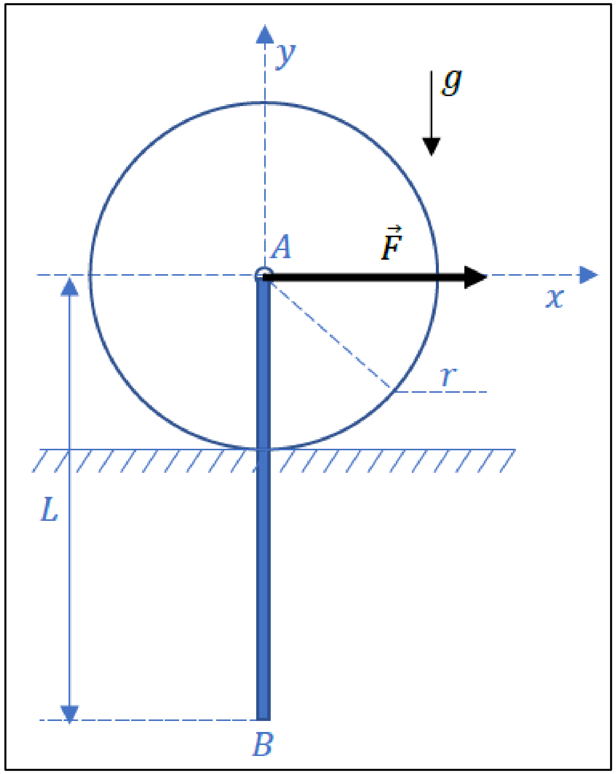
$\vec{\omega}_{barra} = -\omega_{barra}\vec{k}$

$\dot{\vec{\omega}}_{barra} = -\dot{\omega}_{barra}\vec{k}$

$$-J_{z_G}\dot{\omega}_{barra}\vec{k} = -X_A\frac{L}{2}\vec{k}$$

$$\frac{ML^2}{12}\dot{\omega}_{barra}\vec{k} = X_A\frac{L}{2}\vec{k} \Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_{barra} = \frac{6X_A}{ML}}$$ **(0,5)**

Questão 3 (continuação)



Relações cinemáticas:TMB no disco:

$$\vec{a}_A = a_A\vec{\imath} = \dot{\omega}_{disco} r\vec{\imath} \qquad \boxed{a_A = \dot{\omega}_{disco} r}$$

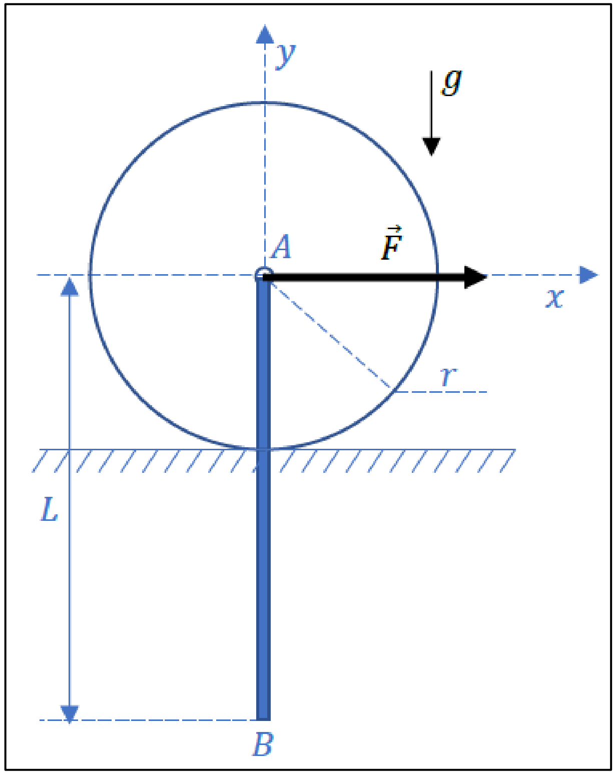
$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_{barra} \wedge (G - A) + \vec{\omega}_{barra} \wedge [\vec{\omega}_{barra} \wedge (G - A)]$$

$$\vec{a}_G = \dot{\omega}_{disco} r\vec{\imath} - \dot{\omega}_{barra}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{\jmath}\right) + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{a}_G = \left(\dot{\omega}_{disco} r - \dot{\omega}_{barra}\frac{L}{2}\right)\vec{\imath}}$$

(0,5)

Questão 3 (continuação)



$$\begin{cases} m\dot{\omega}_{disco}r = F - F_{at} - X_A \\ 0 = N - mg - Y_A \\ M\left(\dot{\omega}_{disco}r - \dot{\omega}_{barra}\dfrac{L}{2}\right) = X_A \\ 0 = Y_A - Mg \\ \dot{\omega}_{disco} = \dfrac{2F_{at}}{mr} \\ \dot{\omega}_{barra} = \dfrac{6X_A}{ML} \end{cases}$$

6 equações nas 6 incógnitas: $\dot{\omega}_{disco}, \dot{\omega}_{barra}, N, F_{at}, X_A, Y_A$

Resolvendo para $\dot{\omega}_{disco}$ e $\dot{\omega}_{barra}$

$$\boxed{\dot{\omega}_{disco} = \frac{4F}{r(6m+M)}}$$

(0,25)

$$\boxed{\dot{\omega}_{barra} = \frac{6F}{L(6m+M)}}$$

(0,25)