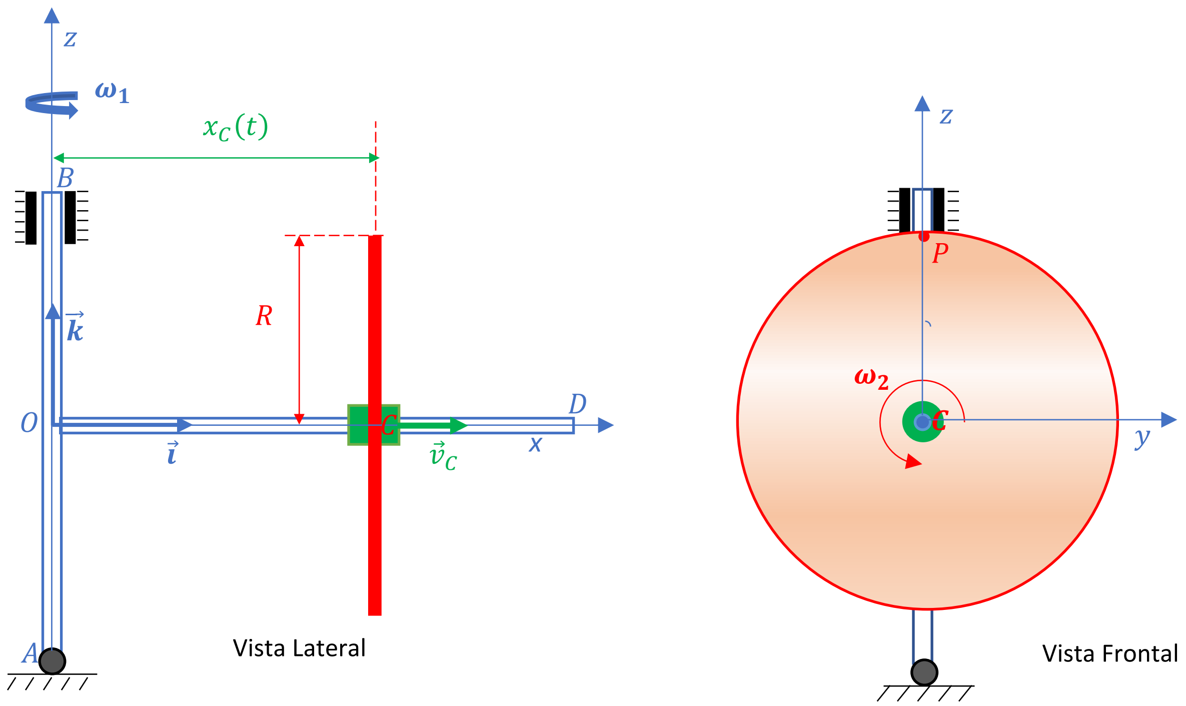
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

**1ª Questão (3,0 pontos).** O mecanismo ilustrado na figura abaixo é constituído por 3 componentes: 1) um suporte $ABOD$(desenhado em azul) vinculado à articulação $A$ e ao mancal radial $B$, que gira com velocidade angular constante $\omega_1$em torno do eixo vertical; 2) uma luva $C$ (desenhada em verde), que desliza ao longo da haste $OD$ do suporte $ABOD$ com velocidade constante $v$ relativa à haste; 3) um disco de raio $R$, solidário à luva $C$ que gira em torno da haste $OD$ com velocidade angular constante $\omega_2$. O sistema de referência móvel $Oxyz$ é ligado ao suporte $ABOD$ e, no instante mostrado na figura, o ponto $P$ da periferia do disco encontra-se na posição $(x_C, 0, R)$. Nita: Todas as respostas devem ser expressas no sistema de coordenadas $Oxyz$.




Pedem-se:

(a) A velocidade absoluta do ponto $C$ .
(b) A aceleração absoluta do ponto $C$;
(c) O vetor rotação absoluta do disco;
(d) O vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(e) A velocidade absoluta do ponto $P$;
(f) A aceleração absoluta do ponto $P$.

**RESOLUÇÃO**

A velocidade absoluta do ponto $C$ é:

$$\vec{v}_C = v\vec{\imath} + \omega_1\vec{k} \wedge (x_C\vec{\imath}) = v\vec{\imath} + \omega_1 x_C\vec{\jmath}$$ **(a) ½ ponto**

A aceleração absoluta do ponto $C$ é dada por:

$\vec{a}_C = \vec{a}_{C,rel} + \vec{a}_{C,ar} + \vec{a}_{C,c}$

onde

$\vec{a}_{C,rel} = \vec{0}$

$\vec{a}_{C,ar} = \vec{a}_O + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge (x_C\vec{\imath}) + \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge (x_C\vec{\imath})\right] = \vec{0} + \vec{0} - \omega_1^2 x_C\vec{\imath} = -\omega_1^2 x_C\vec{\imath}$

$\vec{a}_{C,c} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \vec{v}_{C,rel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge v\vec{\imath} = 2\omega_1 v\vec{\jmath}$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto $C$ é:

$\vec{a}_C = -\omega_1^2 x_C\vec{\imath} + 2\omega_1 v\vec{\jmath}$ **(b) ½ ponto**

O vetor rotação absoluta do disco é dado por

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ar} + \vec{\omega}_{rel} = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{\imath}$ **(c) ½ ponto**

O vetor aceleração rotacional do disco é dada por:

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{ar} + \vec{\alpha}_c = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{ar} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\vec{\imath} = \omega_1\omega_2\vec{\jmath}$ **(d) ½ ponto**

A velocidade absoluta do ponto $P$ é dada por:

$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (P - C) = v\vec{\imath} + \omega_1 x_C\vec{\jmath} + \left(\omega_2\vec{\imath} + \omega_1\vec{k}\right) \wedge R\vec{k} = v\vec{\imath} + (\omega_1 x_C - \omega_2 R)\vec{\jmath}$ **(e) ½ ponto**

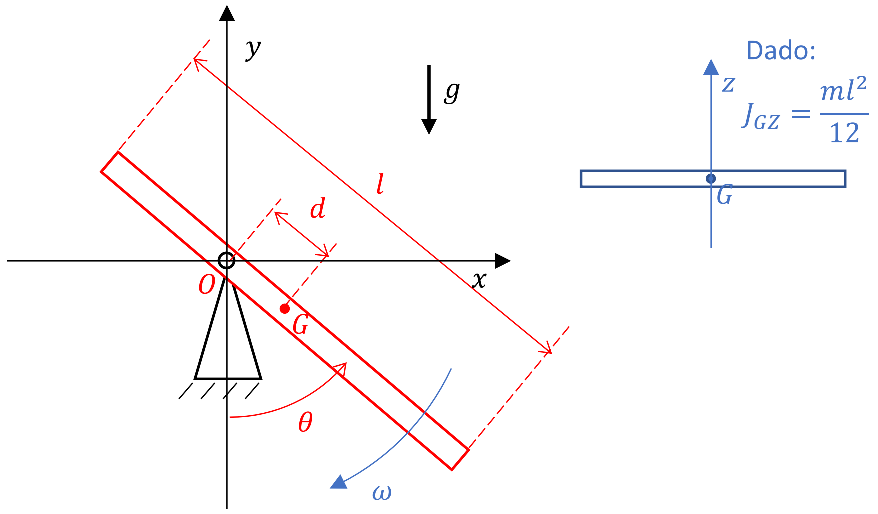
A aceleração absoluta do ponto $P$ édada por:

$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge (P - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - C)]$

$\Rightarrow \vec{a}_P = -\omega_1^2 x_C\vec{\imath} + 2\omega_1 v\vec{\jmath} + (\omega_1\omega_2\vec{\jmath}) \wedge R\vec{k} + \left(\omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{\jmath}\right) \wedge \left[\left(\omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{\jmath}\right) \wedge R\vec{k}\right]$

$\Rightarrow \vec{a}_P = (2\omega_1\omega_2 R - \omega_1^2 x_C)\vec{\imath} + 2\omega_1 v\vec{\jmath} - \omega_2^2 R\vec{k}$ **(f) ½ ponto**

**2ª Questão (3,0 pontos)** Uma barra delgada e homogênea, de comprimento $L$ e massa $m$, é articulada em $O$ a uma distância $d$ do seu centro de massa, estando restrita a mover-se no plano $Oxy$, conforme ilustrado na figura.




(a) Determine o momento de inércia $J_{Oz}$ da barra.

(b) Sabendo que a barra parte da posição angular $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ com velocidade angular inicial $\omega_0$ no sentido horário, determine o menor valor de $\omega_0$ em módulo, para que a barra não mude o sentido de rotação.

**RESOLUÇÃO**

Aplicando-se o Teorena de Steirnerm obtém-se o momento de inércia $J_{Oz}$ da barra:

$$J_{Oz} = \frac{mL^2}{12} + md^2$$ **(1,0 ponto)**

Sendo o peso da barra a única força que realiza trabalho, o Teorema da Energia Cinética se expressa como:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} J_{Oz}(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12} + md^2\right)(\omega^2 - \omega_0^2) = mgd\cos\theta$$

Sendo

$\omega \geq 0$ em $\theta = \frac{\pi}{2}$

A condição para a barra não mudar o sentido da rotação se expressa como:

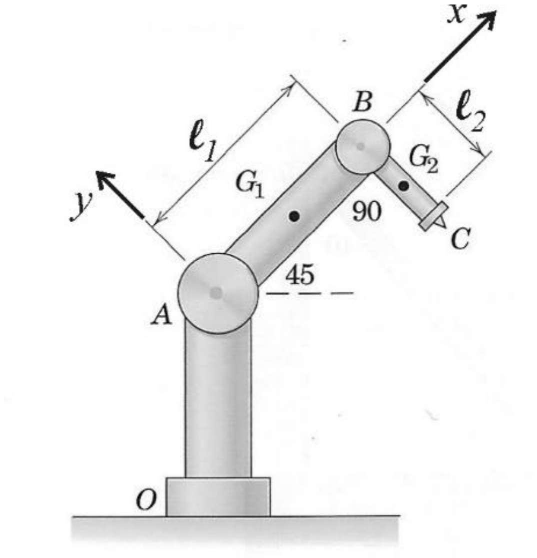
$\omega = 0$ em $\pi$.

Introduzindo-se essa condição limite na expressão do Teorema da Energia Cinética, obtém-se:

$\omega_0^2 = \frac{24gd}{l^2+12d^2}$ **(2,0 pontos)**

que é o menor valor de $\omega_0$ compatível com um movimento rotativo.

**3ª Questão (4,0 pontos).** A figura abaixo representa um dispositivo robótico movendo-se num plano vertical, com aceleração da gravidade $g$. Na extremidade *A* da coluna fixa *OA* há um pequeno motor elétrico que aplica um momento (anti-horário) $M_A$ na extremidade *A* do braço *AB*, fazendo este braço girar em torno de *A* com velocidade angular $\omega_1$e aceleração angular $\dot{\omega}_1$, dados. Na extremidade *B* do braço *AB* há outro pequeno motor, que aplica o momento $M_B$ (anti-horário) no braço *BC*, fazendo-o girar com velocidade angular $\omega_2$ e aceleração angular $\dot{\omega}_2$. A massa do braço *AB* é $m_1$, a do braço *BC* é $m_2$ e ambos podem ser considerados como hastes delgadas homogêneas.




Para a posição mostrada na figura, e usando o sistema de eixos indicado, pede-se:

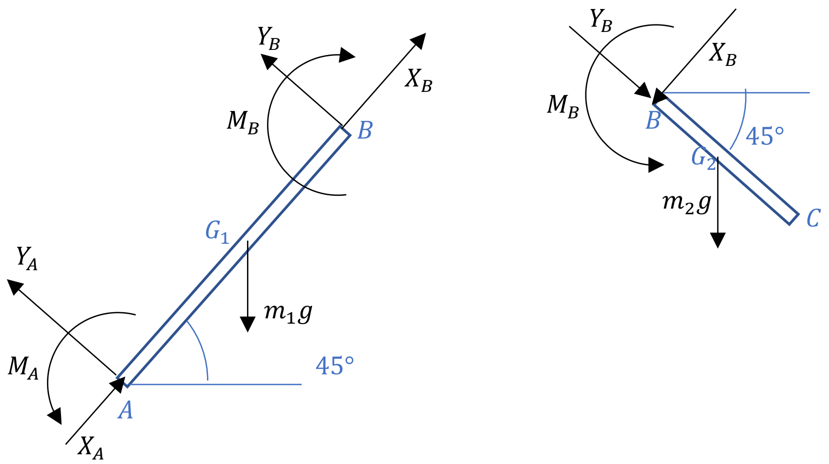
(a) desenhar os diagramas de corpo livre dos braços *AB* e *BC*;
(b) escrever as equações do Teorema da Resultante (TR) e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) para o braço *BC*;

Supondo que o motor em *B* trave a conexão dos braços *AB* e *BC* na posição relativa mostrada, pede-se:

(c) obter as expressões de $\omega_2$ e $\dot{\omega}_2$, $\vec{a}_{G_1}$ e $\vec{a}_{G_2}$ em função de $\omega_1$, $\dot{\omega}_1$, das massas e das dimensões dadas na figura;
(d) determinar o momento exercido pelo braço *AB* sobre o braço *BC*.

**RESOLUÇÃO**

Os diagramas de corpo livre das barras são apresentados na figura a seguir.




**(1,0 ponto)**

As equações dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular para o braço $BC$ são apresentadas a seguir

**<u>TR</u>**

$$m_2\vec{a}_{G_2} = m_2\left(a_{G_2x}\vec{\imath} + a_{G_2y}\vec{\jmath}\right) = \left(-X_B - m_2g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \left(-Y_B - m_2g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2a_{G_2x} = -X_B - m_2g\frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ m_2a_{G_2y} = -Y_B - m_2g\frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$$

**<u>TQMA</u>**

$$\vec{H}_{G_2} = J_{G_2}\omega_2\vec{k} = \frac{m_2l_2^2}{12}\omega_2\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_{G_2} = \frac{m_2l_2^2}{12}\dot{\omega}_2\vec{k} = \vec{M}_{G_2} = \left(X_B\frac{l_2}{2} + M_B\right)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2l_2^2}{12}\dot{\omega}_2 = X_B\frac{l_2}{2} + M_B \quad (3)$$

**(1,0 ponto)**

As relações cinemáticas solicitadas são apresentadas a seguir:

- articulação $B$ travada:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad (4)$$

e

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega} \qquad (5)$$

- braço $AB$:

$$\vec{a}_{G_1} = a_{G_1x}\vec{\imath} + a_{G_1y}\vec{\jmath} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G_1 - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G_1 - A)] =$$

$$= \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \frac{l_1}{2}\vec{\imath} + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \frac{l_1}{2}\vec{\imath}\right] = \frac{l_1}{2}\left(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_1} = a_{G_1x}\vec{\imath} + a_{G_1y}\vec{\jmath} = \frac{l_1}{2}(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}) \Rightarrow \begin{cases} a_{G_1x} = -\frac{l_1}{2}\omega^2 & (6) \\ a_{G_1y} = \frac{l_1}{2}\dot{\omega} & (7) \end{cases}$$

e

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = l_1(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath})$$

- braço BC:

$$\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G}_2} = \mathrm{a}_{\mathrm{G}_2\mathrm{x}}\vec{\mathrm{\imath}} + \mathrm{a}_{\mathrm{G}_2\mathrm{y}}\vec{\mathrm{\jmath}} = \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{B}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (\mathrm{G}_2 - \mathrm{B}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathrm{G}_2 - \mathrm{B})] =$$

$$= l_1(-\omega^2\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{\jmath}) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{\jmath}\right) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{\jmath}\right)\right] =$$

$$= \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_2} = a_{G_2x}\vec{\imath} + a_{G_2y}\vec{\jmath} = \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right)\vec{\imath} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} a_{G_2x} = \dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 & (8) \\ a_{G_1y} = \dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2} & (9) \end{cases}$$

**(1,0 ponto)**

De (1) e (8) obtém-se:

$$-X_B - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2} = m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1\right) \Rightarrow X_B = -m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Substituindo

$X_B$ em (3) resulta:

$$\frac{m_2 l_2^2}{12}\dot{\omega} = -m_2\frac{l_2}{2}\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2 l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - M_B \Rightarrow M_B = \frac{m_2 l_2}{2}\left(-l_1\omega^2 + \frac{2l_2}{3}\dot{\omega} + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ **(1,0 ponto)**