Q1. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(p) = \big(p(0), p'(1)\big),$$

para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$. Considere as bases

$$\mathcal{B} = \{1 + t, t^2, t^2 - 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, 1), (1, 0)\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. A soma das entradas na primeira linha da matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ é igual a:

(a) 5

(b) 0

(c) 1

(d) 3

(e) -4

Resposta: Sejam $\mathcal{D} = (1, x, x^2)$ base de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{E} = ((1, 0), (0, 1))$ base de $\mathbb{R}^2$. Como $T(1, 0) = (1, 0)$, $T(x) = (0, 1)$ e $T(x^2) = (0, 2)$, temos que

$$[T]_{\mathcal{DE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $[T]_{\mathcal{BC}} = [I]_{\mathcal{EC}}[T]_{\mathcal{DE}}[I]_{\mathcal{BD}}$.

Como $[I]_{\mathcal{BD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $[I]_{\mathcal{EC}} = [I]_{\mathcal{CE}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, temos que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

A alternativa correta é (a).

Outra Solução:

Como $T(1 + t) = (1, 1) = (1, 0)_C$, $T(t^2) = (0, 2) = (2, -2)_C$ e $T(t^2 - 1) = (-1, 2) = (2, -3)_C$, temos que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Q2. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 e sejam dadas bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ de V tais que

$$e_1 = 3f_1 - f_2 \qquad \text{e} \qquad e_2 = -5f_1 + 2f_2.$$

Se $T : V \to V$ é a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

então a soma das entradas na diagonal principal da matriz $[T \circ T]_{\mathcal{BC}}$ é igual a:

(a) 20

(b) 5

(c) 0

(d) 12

(e) -8

Resposta: Com os dados do enunciado obtemos $[I]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Podemos calcular $[T \circ T]_{\mathcal{BC}}$ como

$$[T \circ T]_{\mathcal{BC}} = [T]_{\mathcal{CC}}[T]_{\mathcal{BC}}.$$

Agora $[T]_{\mathcal{CC}} = [T]_{\mathcal{BC}}[I]_{\mathcal{CB}} = [T]_{\mathcal{BC}}[I]_{\mathcal{BC}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
Logo

$$[T \circ T]_{\mathcal{BC}} = [T]_{\mathcal{CC}}[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 30 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

A alternativa correta é (a).

Q3. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base $\{t^2+1, t-1, t+2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correspondente a uma base de $\mathrm{Ker}(T)$:

(a) $\{t^2+4\}$

(b) $\{t^2-t+1\}$

(c) $\{t^2+t\}$

(d) $\{t^2+4, t^2-t+1\}$

(e) $\{t+8\}$

Resposta:

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ a(t^2+1) + b(t-1) + c(t+2) \colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{1}{2}L_2 \\ L_1 \to L_1 - 2L_2}]{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtemos que c é variável livre e

$$\mathrm{Ker}(T) = \big\{\lambda(t^2+1) - \lambda(t-1) + \lambda(t+2) \colon \lambda \in \mathbb{R}\big\} = \{\lambda(t^2+4) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} = [t^2+4].$$

A alternativa correta é (a).

Q4. Seja $\mathcal{B} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ seja uma transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{CD}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{BD}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{C}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{D}$ denota a base $\{1, t\}$ de $P_1(\mathbb{R})$. Temos que x_1 é igual a:

(a) -11

(b) 7

(c) 4

(d) -13

(e) 9

Resposta: Sabemos que $[T]_{\mathcal{BD}} = [T]_{\mathcal{CD}}[I]_{\mathcal{BC}}$.
Observamos que $[I]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.
Como $[T]_{\mathcal{CD}}$ é invertível, temos que $[I]_{\mathcal{BC}} = [T]_{\mathcal{CD}}^{-1}[T]_{\mathcal{BD}}$. Portanto,

$$[I]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

A alternativa correta é (a).

Q5. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e considere a base

$$\mathcal{B} = \{\operatorname{sen} t, \cos t, e^{2t}\}$$

do subespaço V de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ gerado por $\mathcal{B}$. Se $T : V \to V$ é a transformação linear definida por $T(f) = f'$, para toda $f \in V$, então o determinante da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é igual a:

(a) 2

(b) -2

(c) 1

(d) -1

(e) 0

Resposta:

$$T(\operatorname{sen}(t)) = \cos(t) = 0 \cdot \operatorname{sen}(t) + 1 \cdot \cos(t) + 0 \cdot e^{2t}.$$

$$T(\cos(t)) = -\operatorname{sen}(t) = (-1) \cdot \operatorname{sen}(t) + 0 \cdot \cos(t) + 0 \cdot e^{2t}.$$

$$T(e^{2t}) = 2e^{2t} = 0 \cdot \operatorname{sen}(t) + 0 \cdot \cos(t) + 2 \cdot e^{2t}.$$

Logo $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det[T]_{\mathcal{B}} = 2$.

A alternativa correta é (a).

Q6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que possui autovetores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$ correspondentes aos autovalores 2, 3 e 4, respectivamente. Temos que $T(1,2,3)$ é igual a:

(a) $(-1,3,6)$

(b) $(3,1,6)$

(c) $(6,1,2)$

(d) $(2,2,4)$

(e) $(1,2,0)$

Resposta: Por hipótese, $T(1,1,1) = 2(1,1,1)$, $T(1,1,0) = 3(1,1,0)$ e $T(1,0,0) = 4(1,0,0)$. Observamos que $\mathcal{D} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e, portanto, temos que

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned}
[T]_{can} &= [I]_{\mathcal{D}\,can}[T]_{\mathcal{D}}[I]_{can\,\mathcal{D}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, $[T]_{\text{can}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

A alternativa correta é (a).

Q7. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que a soma das entradas na primeira coluna da matriz A^{2023} é igual a:

(a) 3^{2023}

(b) $2 \cdot 3^{2023}$

(c) 2

(d) 1

(e) -3^{2023}

Resposta: Procuramos matrizes D diagonal e P invertível tais que $A = PDP^{-1}$. Nesse caso teremos que $A^{2023} = PD^{2023}P^{-1}$.

O polinômio característico de A é

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3).$$

As duas raízes de $p_A(t)$ são reais e diferentes. Isso implica (não que seja equivalente!) A é diagonalizável e, portanto, P e D podem ser encontradas como

$$A = [A]_{can} = [I]_{\mathcal{D}\,can}[A]_{\mathcal{D}}[I]^{-1}_{\mathcal{D}\,can}$$

onde $\mathcal{D}$ é uma base formada por autovetores de A e $[A]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Logo $\mathrm{Ker}(A-I) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \colon x + y = 0\} = [(1,-1)]$.

$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Logo $\mathrm{Ker}(A-3I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x + y = 0\} = [(1,1)]$.

Logo $[I]_{\mathcal{D}can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $[I]_{can\mathcal{D}} = [I]^{-1}_{\mathcal{D}can} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim temos que

$$A = [A]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^{2023} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2023} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+3^{2023}}{2} & \frac{1+3^{2023}}{2} \\ \frac{-1+3^{2023}}{2} & \frac{1+3^{2023}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A alternativa correta é (a).

Q8. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada na base canônica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) T é diagonalizável se, e somente se, $a = -6$

(b) T é diagonalizável se, e somente se, $a \neq -6$

(c) T é diagonalizável se, e somente se, $a = 0$

(d) T é diagonalizável se, e somente se, $a \neq 0$

(e) T não é diagonalizável

Resposta: Sabemos que T será diagonalizável se, e somente se, todas as raízes do polinômio característico são e, para cada uma destas raízes, as multiplicidades algébrica e geométrica coincidem.

$$p_T(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ a & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t(1-t)^2.$$

Os autovalores de T são 0 e 1.

O autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicade algébrica 1. Isso implica que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ também é 1. Portanto, como a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 2, T será diagonalizável se, e somente se, $\dim(\mathrm{Ker}(T - I)) = 2$.

$$[T - I]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{Ker}(T-I)) = 2$ é equivalente a que o sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$ tem duas variáveis livres.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{a}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} - 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Logo T é diagonalizável se, e somente se, $a = 6$.

A alternativa correta é (a).

Q9. Sejam n um inteiro positivo e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real $n \times n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\lambda = 0$ é um autovalor de A se, e somente se, $\det(A) = 0$;

(II) se A é inversível e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor não nulo de A, então $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1};

(III) se $n = 3$ e $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$ e $\lambda_3 = 2$ são autovalores de A, então A é diagonalizável e seu polinômio característico é $p_A(t) = -t^3 + 8t^2 - 5t - 14$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras

(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira

(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras

(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras

Resposta: (I) é verdadeira.

Dada a matriz A, o operador linear $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, é tal que $[T_A]_{\text{can}} = A$. Estudamos que 0 é autovalor de T_A se, e somente se, o operador linear T_A, não é invertível. Mas isso é equivalente a que $[T_A]_{\text{can}} = A$ não seja invertível. Ou seja, $\det A = 0$.

(II) é verdadeira.

Se $v \in V$, $v \neq 0$, com $T(v) = \lambda v$, então

$$T^{-1}(v) = T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}T(v)\right) = \frac{1}{\lambda}T^{-1}(T(v)) = \frac{1}{\lambda}v.$$

(III) é verdadeira.

Que $n = 3$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$ e $\lambda_3 = 2$ sejam autovalores de A, implica que $p_A(t)$ é de grau 3, que as 3 raízes de $p_A(t)$ são reais e diferentes. Isso implica que A é diagonalizável e seu polinômio característico é $p_A(t) = (-1-t)(7-t)(2-t) = t^3 + 8t^2 - 5t - 14$.

A alternativa correta é (a).

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é uma matriz real 2×2 e $\det(A) < 0$, então A é diagonalizável;

(II) se n é um inteiro positivo e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes reais $n \times n$ e ambas são diagonalizáveis, então A e B são semelhantes;

(III) se $A \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz real 3×3 cujo polinômio característico é $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$, então A é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira

(b) todas as afirmações são verdadeiras

(c) apenas a afirmação (II) é verdadeira

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras

(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira

Resposta: (I) é verdadeira.

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $\det A = ad - bc < 0$. Agora $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = t^2 + (-a-d)t + \det(A)$. Logo as raízes do polinômio característico de A são

$$\frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Como $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$, temos que $p_A(t)$ é um polinômio de grau 2 com todas as raízes reais e diferentes. Isso implica que A é diagonalizável.

(II) é falsa.

Por serem diagonalizáveis, sabemos que são semelhantes se, e somente se, elas são semelhantes à mesma matriz diagonal, a menos da ordem dos elementos da diagonal principal.

(III) é falsa.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável porque $\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) \neq 2$.

Q11. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a & b & d \end{pmatrix}.$$

Se P é inversível e $P^{-1}AP = D$, então $a + b + c + d$ é igual a:

(a) 2

(b) 1

(c) 5

(d) 3

(e) 4

Resposta:

$$D = [A]_{\mathcal{D}} = [I]_{can\mathcal{D}} A [I]_{\mathcal{D}can} = [I]_{\mathcal{D}can}^{-1} A [I]_{\mathcal{D}can}$$

Isso implica que $(1, 1, a), (2, 1, b) \in \text{Ker}(A - I)$ e $(1, c, d) \in \text{Ker}(A + I)$.

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2a \\ -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo $a = 0$.

$(A - I)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -2b \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo $b = 0$.

$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $(A + I)\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2d \\ 2c - 2d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo $c = 1$ e $d = 1$.

A alternativa correta é (a).

Q12. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,2,0),(0,1,1)\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\text{can},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

em que can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Sabe-se que T tem três autovalores distintos. Temos que o produto dos autovalores de T é igual a:

(a) -12

(b) -6

(c) 8

(d) 4

(e) 0

Resposta:

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{can\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t) = p_T(t) = \det([T]_{\mathcal{B}} - tI) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Observando que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det[T]_{\mathcal{B}}$, temos que

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det[T]_{\mathcal{B}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -12.$$

A alternativa correta é (a).

Q13. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, em que V e W são espaços vetoriais de dimensão 3. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de V e $\mathcal{C}$ uma base de W. Suponha que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathrm{I}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathrm{I} : V \to V$ denota o operador identidade. Temos que o traço da matriz $[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ é igual a:

(a) -9

(b) 8

(c) -10

(d) 4

(e) -7

Resposta:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{BC}}[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 5 & -12 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observa que não precisávamos calcular a matriz toda, só os elementos da diagonal principal.

A alternativa correta é (a).

Q14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{B}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}$ denota a base de $M_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} 10 & a \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

pertence à imagem de T se, e somente se, a é igual a:

(a) 16

(b) 4

(c) 2

(d) 13

(e) -2

Resposta: Se $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ temos que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{BE}} &= [I]_{\mathcal{CE}}[T]_{\mathcal{BC}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 7 & 9 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como Imagem$(T) = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right]$ Temos que $\begin{pmatrix} 10 & a \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ pertence

a imagem de T se, e somente se, o sistema a seguir tem solução:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 10 & 10 \\ 7 & 9 & 11 & a \\ 3 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}]{\substack{L_1 \to \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \to L_2 - 7L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & a-14 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_3]{L_2 \to L_2 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & a-16 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Logo $\begin{pmatrix} 10 & a \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ pertence a imagem de T se, e somente se, $a = 16$.
A alternativa correta é (a).