Q1. Dentre as expressões abaixo:

(I) $\langle (x,y),(x',y')\rangle = x + x' + y + y', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x',y') \in \mathbb{R}^2,$

(II) $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + \frac{1}{2}yy', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x',y') \in \mathbb{R}^2,$

(III) $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x',y') \in \mathbb{R}^2,$

definem um produto interno em $\mathbb{R}^2$ apenas:

(a) (II)

(b) (I) e (II)

(c) (II) e (III)

(d) (I) e (III)

(e) (III)

Resposta:

(I) não define um produto interno pois não satisfaz a propriedade $\langle u,u\rangle > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$. Por exemplo,

$$\langle (-1,0),(-1,0)\rangle = -2 < 0.$$

Pode ser provado que também não é satisfeita a propriedade $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$ para todos $u,v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(II) define sim um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

P1) Para todos $(x,y),(z,w),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}
\langle (x,y)+(z,w),(x',y')\rangle &= \langle (x+z,y+w),(x',y')\rangle \\
&= 3(x+z)x' + \tfrac{1}{2}(y+w)y' \\
&= 3xx' + \tfrac{1}{2}yy' + 3zx' + \tfrac{1}{2}wy' \\
&= \langle (x,y),(x',y')\rangle + \langle (z,w),(x',y')\rangle
\end{aligned}$$

P2) Para todos $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x,y),(x',y')\rangle &= \langle (\lambda x,\lambda y),(x',y')\rangle \\
&= 3\lambda xx' + \tfrac{1}{2}\lambda yy' \\
&= \lambda(3xx' + \tfrac{1}{2}yy') \\
&= \lambda\langle (x,y),(x',y')\rangle
\end{aligned}$$

P3) Para todos $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + \frac{1}{2}yy' = 3x'x + \frac{1}{2}y'y = \langle (x',y'),(x,y)\rangle$$

P4) Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 > 0.$$

(III) não define um produto interno pois não satisfaz $\langle u,u\rangle > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$. Por exemplo

$$\langle (0,1),(0,1)\rangle = 0.$$

Portanto, a alternativa correta é (a).

Q2. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x,$$

para quaisquer $p, q \in P_2(\mathbb{R})$ e seja S o subespaço de $P_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = [1 + x, x^2].$$

Assinale a alternativa correspondente a uma base do espaço vetorial $S^\perp$:

(a) $\{-3 + 4x + 5x^2\}$

(b) $\{x^2\}$

(c) $\{1 - x, x^2\}$

(d) $\{1 + 4x - x^2\}$

(e) $\{5 + 2x - 3x^2\}$

Resposta:

$S^\perp = \{d \in P_2(R)\colon \langle d, p\rangle \text{ para todo } p \in S\} = \{d \in P_2(R)\colon \langle d, 1{+}x\rangle = \langle d, x^2\rangle = 0\}$

Seja $d = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\langle d, 1+x\rangle & = & \int_{-1}^{1}(a + bx + cx^2)(1 + x)\mathrm{d}x \\
& = & \int_{-1}^{1}(a + (a + b)x + (b + c)x^2 + cx^3)\mathrm{d}x \\
& = & \left[ax + \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{b+c}{3}x^3 + \frac{c}{4}x^4\right]_{-1}^{1} \\
& = & 2a + \frac{2}{3}(b + c).
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\langle d, x^2\rangle & = & \int_{-1}^{1}(a + bx + cx^2)x^2\mathrm{d}x \\
& = & \int_{-1}^{1}(ax^2 + bx^3 + cx^r)\mathrm{d}x \\
& = & \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{5}x^5\right]_{-1}^{1} \\
& = & \frac{2}{3}a + \frac{2}{5} + c.
\end{array}$$

Logo $d = a + bx + cx^2 \in S^\perp$ se, e somente se, $\begin{cases} 2a + +\frac{2}{3}(b + c) = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{5} + c = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{8}{45} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to -\frac{9}{2}L_2 \\ L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right). \qquad c = \lambda,\ b = \frac{4}{5}\lambda,\ a = -\frac{3}{5}\lambda.$$

Logo

$$S^\perp = \left\{\lambda\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}x + x^2\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} = [-3 + 4x + 5x^2]$$

A alternativa correta é (a).

Q3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ dado por $S = [u_1, u_2]$, em que:

$$u_1 = (1, 0, 1, 1) \quad \text{e} \quad u_2 = (2, 1, 1, -1).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $au_1 + bu_2$ é a projeção ortogonal de $(1, 3, 3, 1)$ em S, então $a + b$ é igual a:

(a) $\dfrac{32}{17}$

(b) $\dfrac{11}{17}$

(c) $\dfrac{1}{11}$

(d) $-\dfrac{1}{17}$

(e) $\dfrac{2}{13}$

Resposta:

Seja $v = (1, 3, 3, 1)$. Estudamosque (a, b) é a solução do sistema linear que possui matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle & \langle u_1, v\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle & \langle u_2, v\rangle \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Resolvemos os sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 17 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + 5L_2]{L_2 \to \frac{1}{17}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{21}{17} \\ 0 & 1 & \frac{11}{17} \end{array}\right)$$

Logo $(a, b) = (\frac{21}{17}, \frac{11}{17})$ e $a + b = \frac{32}{17}$.

A alternativa correta é (a).

Q4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\big(a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \cos(2x)\big) - x\right]^2 \mathrm{d}x$$

assume o seu valor mínimo. Sabe-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos(2x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) 2

(b) 4

(c) -1

(d) 2π

(e) $\dfrac{1}{\pi}$

Resposta: Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ munido do produto interno

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \text{ para todas } f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]).$$

Observamos que a expressão

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\big(a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \cos(2x)\big) - x\right]^2 \mathrm{d}x$$

é a distância ao quadrado entre x e $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \cos(2x)$. Portanto, o valor mínimo da expressão é alcançado no elemento do subespaço $U = [\operatorname{sen} x, \cos x, \cos(2x)]$ mais próximo de x. Sabemos que esse vetor mais próximo de x é a projeção $\operatorname{proj}_U(x)$.

Como $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)\cos(2x)$ são funções ímpares temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(x) \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(2x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Isto, unido ao dado fornecido no enunciado, nos dá que $\operatorname{sen}(x), \cos(x), \cos(2x)$ é uma sequência ortogonal e portanto a projeção pode ser calculada como

$$\operatorname{proj}_U(x) = \frac{\langle x, \operatorname{sen} x\rangle}{\|\operatorname{sen} x\|^2} \operatorname{sen} x + \frac{\langle x, \cos x\rangle}{\|\cos x\|^2} \cos x + \frac{\langle x, \cos(2x)\rangle}{\|\cos(2x)\|^2} \cos(2x)$$

$\langle x, \operatorname{sen} x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi + \pi = 2\pi$

$\|\operatorname{sen} x\|^2 = \langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) \mathrm{d}x =$
$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

$\langle x, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, \mathrm{d}x = 0$ e $\langle x, \cos(2x)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(2x) \, \mathrm{d}x = 0$ pois $x \cos x$ e $x\cos(2x)$ são funções ímpares.

Logo $a = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $b = 0$ e $c = 0$. A alternativa correta é (a).

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno definido por

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = 2xx' + xy' + x'y + 3yy',$$

para quaisquer $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Sejam S o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $(2,1)$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $\{(1,t)\}$ seja uma base de $S^\perp$. Assinale a alternativa correta:

(a) $t = -1$

(b) $t = -2$

(c) $t = 3$

(d) $t = 0$

(e) $t = 2$

Resposta: Como $\mathbb{R}^2$ é de dimensão 2 e $[(2,1)]$ é de dimensão 1, temos que $\dim[(2,1)]^\perp = 1$. Portanto, se $(1,t) \in [(2,1)]^\perp$ então $(1,t)$ será base de $[(2,1)]^\perp$.

$$(1,t) \in [(2,1)]^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \langle (1,t),(2,1)\rangle = 0$$

Como $\langle (1,t),(2,1)\rangle = 4 + 1 + 2t + 3t = 5 + 5t$, temos que

$$(1,t) \in [(2,1)]^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad t = -1$$

Logo a alternativa correta é (a).

Poderíamos também encontrar como é um elemento genérico de $[(2,1)]^\perp$ calculando $\langle (x,y),(2,1)\rangle = 0$ e obter a condição para que $(1,t) \in [(2,1)]^\perp$.

Q6. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u_1 = (4, 0, -3)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$. Se o vetor $v = (1, 2, 3)$ for escrito como $v = w_1 + w_2$ com $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$ e se $w_1 = (a, b, c)$, então $a + b + c$ é igual a:

(a) $\dfrac{9}{5}$

(b) $\dfrac{8}{5}$

(c) $\dfrac{7}{5}$

(d) $\dfrac{6}{5}$

(e) $-\dfrac{9}{5}$

Resposta:

Estudamos que $w_1 = \text{proj}_W(v)$ e $w_2 = v - \text{proj}_W(v)$. Como a base fornecida (u_1, u_2) de W é ortogonal temos que

$$\begin{aligned} w_1 = \text{proj}_W(v) &= \tfrac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \tfrac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &= -\tfrac{5}{25} u_1 + \tfrac{2}{1} u_2 \\ &= -\tfrac{1}{5}(4, 0, -3) + 2(0, 1, 0) \\ &= (-\tfrac{4}{5}, 2, \tfrac{3}{5}) \end{aligned}$$

Logo $a + b + c = -\frac{4}{5} + 2 + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.

Q7. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,2,1)\}.$$

Se $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ obtida de $\mathcal{B}$ pela aplicação do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt, então a primeira coordenada do vetor $\frac{v_3}{\|v_3\|}$ é igual a:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

(b) $-\dfrac{1}{6}$

(c) $-\dfrac{1}{5}$

(d) $\dfrac{1}{6}$

(e) $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Resposta: $v_1 = (1,1,1)$.

Como u_2 é ortogonal a $u_1 = v_2$ temos que $v_2 = u_2$. Se não percebemos não importa obtemos o mesmo resultado aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&= (-1,1,0) - \frac{\langle (-1,1,0),(1,1,1)\rangle}{3}(1,1,1) \\
&= (-1,1,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&= (1,2,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) \\
&= \frac{1}{6}(1,1,-2)
\end{aligned}$$

$$\|u_3\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Logo a resposta correta é (a).

Q8. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1+x) = 1+x^2, \quad T(x+x^2) = x-x^2, \quad T(1+x^2) = 1+x+x^2.$$

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $T(4-x+3x^2) = a+bx+cx^2$, então b é igual a:

(a) 3

(b) 0

(c) 1

(d) 2

(e) 4

Resposta:

$(1+x, x+x^2, 1+x^2)$ é base de $P_2(\mathbb{R})$. Logo existem únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$4-x+3x^2 = \alpha(1+x) + \beta(x+x^2) + \gamma(1+x^2). \tag{1}$$

Como T é linear, sabemos que

$$T(4-x+3x^2) = \alpha T(1+x) + \beta T(x+x^2) + \gamma T(1+x^2).$$

Se encontramos α, β, γ conseguimos calcular o pedido. De (1) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha+\gamma &= 4 \\ \alpha+\beta &= -1 \\ \beta+\gamma &= 3 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_3]{\substack{L_3 \to \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right). \quad \text{Logo } \alpha = 0,\ \beta = -1,\ \gamma = 4.$$

$$T(4-x+3x^2) = -(x-x^2) + 4(1+x+x^2) = 4+3x+5x^2.$$

A alternativa correta é (a).

Q9. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(p) = \big(p(0), p(1), p'(1)\big),$$

para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é bijetora

(b) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$

(c) $(3, 1, 4) \notin \mathrm{Im}(T)$

(d) T não é nem injetora nem sobrejetora

(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$

Resposta: Como $\dim P_2(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, temos que para T é equivalente ser bijetora, injetora ou sobrejetora.

Se $a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$, temos que

$$T(p) = (a, a + b + c, b + 2c)$$

Assim

$$\begin{aligned} p = a + bx + cx^2 \in \mathrm{Ker}\, T \quad &\Longleftrightarrow \quad T(p) = (a, a + b + c, b + 2c) = (0, 0, 0) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Logo $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ e T é uma transformação linear injetora e, portanto, bijetora.

A alternativa correta é (a).

Q10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to P_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$T(1,1,1) = 1 + x, \quad T(1,0,1) = 2 - x \quad \text{e} \quad T(0,1,2) = 3.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$ e se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}(T)$, então $b + c = 0$

(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$ e se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}(T)$, então $b + c = 1$

(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$ e se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}(T)$, então $b + c = 5$

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$ e se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}(T)$, então $b + c = 0$

(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$ e se $b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}(T)$, então $b + c = 1$

Resposta: $((1,1,1),(1,0,1),(0,1,2))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo todo elemento de $\mathbb{R}^3$ se escreve de forma única como combinação linear deles. Um elemento de $\mathbb{R}^3$ $\alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,2) \in \mathrm{Ker}\, T$ se, e somente se

$$\begin{aligned} 0 &= T(\alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,2)) \\ &= \alpha T(1,1,1) + \beta T(1,0,1) + \gamma T(0,1,2) \\ &= \alpha(1+x) + \beta(2-x) + \gamma 3 \\ &= \alpha + 2\beta + 3\gamma + (\alpha - \beta)x \end{aligned}$$

Equivalentemente $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \beta &=& 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &=& 0 \end{array} \right.$. Resolvemos o sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to \frac{1}{3} L_3 \\ L_1 \to L_1 + L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

As soluções do sistema são $\{(-\lambda, \lambda, \lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, T &= \{-\lambda(1,1,1) - \lambda(1,0,1) + \lambda(0,1,2) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\lambda, 0, 0) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,0)] \end{aligned}$$

Assim temos que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ e se $(1, b, c) \in \mathrm{Ker}\, T$, então $b + c = 0$.

A alternativa correta é (a).

Q11. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base ortogonal de V tal que:

$$\|e_1\|^2 = 2, \quad \|e_2\|^2 = 3, \quad \|e_3\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \|e_4\|^2 = 5.$$

Temos que $\langle 2e_1 + 3e_2 + 5e_4, -3e_1 - e_2 + 7e_3 + e_4 \rangle$ é igual a:

(a) 4

(b) -4

(c) 8

(d) -8

(e) -17

Resposta: Como $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal temos que

$$\begin{aligned}
\langle 2e_1 + 3e_2 + 5e_4, -3e_1 - e_2 + 7e_3 + e_4 \rangle &= \langle 2e_1, -3e_1 \rangle + \langle 3e_2, -e_2 \rangle + \langle 5e_4, e_4 \rangle \\
&= -6\langle e_1, e_1 \rangle - 3\langle e_2, e_2 \rangle + 5\langle e_4, e_4 \rangle \\
&= -6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \\
&= 4
\end{aligned}$$

A alternativa correta é (a).

Q12. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do seu produto interno usual e seja

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

a base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada pelos vetores:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{110}}(4, -3, 7, -6) \quad \text{e} \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{44}}(3, -5, -3, 1).$$

Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas do vetor $(1, 0, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}$, então a soma $a + b + c + d$ é igual a:

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{10}} + \dfrac{11}{\sqrt{110}}$

(b) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{\sqrt{44}}$

(c) $\dfrac{6}{\sqrt{10}} + \dfrac{2}{\sqrt{110}} - \dfrac{4}{\sqrt{44}}$

(d) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{\sqrt{110}}$

(e) $\dfrac{4}{\sqrt{10}} - \dfrac{2}{\sqrt{110}} + \dfrac{4}{\sqrt{44}}$

Resposta: Estudamos que se $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormal de V e $v \in V$, então

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$$

Logo fazendo $v = (1, 0, 1, 0)$ obtemos

$a = \langle v, e_1\rangle = \langle (1, 0, 1, 0), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)\rangle = 0;$

$b = \langle v, e_2\rangle = \langle (1, 0, 1, 0), \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2) = \frac{3}{\sqrt{10}};$

$c = \langle v, e_3\rangle = \langle (1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{110}}(4, -3, 7, -6)\rangle = \frac{11}{\sqrt{110}};$

$d = \langle v, e_4\rangle = \langle (1, 0, 1, 0), \sqrt{44}(3, -5, -3, 1)\rangle = 0.$

A alternativa correta é (a).

Q13. Considere o espaço vetorial $M_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno definido por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}B),$$

para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$. Se S é o subespaço de $M_3(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \big\{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^{\mathrm{t}} = A\big\},$$

então a dimensão de $S^{\perp}$ é igual a:

(a) 3

(b) 2

(c) 4

(d) 5

(e) 6

Resposta: Estudamos que se V é um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e S é um subespaço de V, então

$$\dim S^{\perp} = \dim V - \dim S.$$

Por um lado temos que $\dim M_3(\mathbb{R}) = 9$. Calculamos agora a dimensão de S. Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{pmatrix}$. Logo $A = A^t$ se, e somente se, $x = b$, $c = u$ e $v = z$. Portanto,

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} a & x & u \\ x & y & z \\ u & z & w \end{pmatrix} : a, y, w, x, u, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Assim, $\dim S = 6$. Portanto, $\dim S^{\perp} = 3$.

A alternativa correta é (a).

Q14. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere as seguintes afirmações:

(I) se S é um subespaço de V, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de S e $v \in V$, então a projeção ortogonal de v em S é igual a $\text{proj}_{u_1} v + \cdots + \text{proj}_{u_p} v$;

(II) se $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e se $v \in V$ é tal que $\langle v, e_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $v = 0$;

(III) se $v_1, \ldots, v_m \in V$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é tal que o único vetor de V ortogonal a todos os elementos de $\mathcal{C}$ é o vetor nulo, então $\mathcal{C}$ é uma base de V.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras

(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira

(d) todas as afirmações são verdadeiras

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras

Resposta:

(I) é falsa. Calculamos a projeção do jeito enunciado quando $\mathcal{B}$ é uma base *ortogonal* de S.

(II) é verdadeira. Como $\mathcal{E}$ é base de V, temos que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ para alguns $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v, e_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\|v\| = 0$ e $v = 0$.

(III) é falsa. O único que podemos dizer é que $[v_1, \ldots, v_m] = V$, mas não podem não ser LI. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, dados $(1,0), (0,1), (1,1)$ são tais que o único vetor ortogonal aos 3 vetores é $(0,0)$, mas eles não são LI.