Q1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere os vetores

$$v_1 = (-6, 0, 1, 1), \quad v_2 = (2, 6, 1, -1) \quad \text{e} \quad v_3 = (a, b, 1, 2)$$

em $\mathbb{R}^4$. Temos que v_1, v_2 e v_3 são linearmente dependentes se, e somente se:

(a) $a = -10$ e $b = -3$

(b) $a = 5$ e $b = 3$

(c) $a = 9$ e $b = 2$

(d) $a = -7$ e $b = 1$

(e) $a = -8$ e $b = 4$

Resposta: Os vetores v_1, v_2, v_3 são LD se, e somente se, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos iguais a zero, tais que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0.$$

Ou seja, se, e somente se, os sistema em α, β, γ

$$\alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem solução diferente da trivial.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 2 & a & 0 \\ 0 & 6 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & a & 0 \\ 0 & 6 & b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 6L_1]{L_2 \to L_2 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & a+6 & 0 \\ 0 & 6 & b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_2]{L_3 \to L_3 + 4L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+10 & 0 \\ 0 & 0 & b+3 & 0 \end{array}\right)$$

O sistema em α, β, γ tem solução diferente da trivial se, e somente se, $a = -10$ e $b = -3$.

A alternativa correta é (a).

Q2. Considere a base

$$\mathcal{B} = \{1 + 2t + t^2, 2 + 9t, 3 + 3t + 4t^2\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$. Se as coordenadas de $p(t) = 2 + 17t - 3t^2$ na base $\mathcal{B}$ são (a, b, c), então $a + b + c$ é igual a:

(a) 2

(b) -1

(c) 1

(d) 0

(e) -2

Resposta: a, b, c são os únicos números reais tais que

$$a(1 + 2t + t^2) + b(2 + 9t) + c(3 + 3t + 4t^2) = 2 + 17t - 3t^2.$$

Em outras palavras, (a, b, c) é a única solução do sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 3c &= 2 \\ 2a + 9b + 3c &= 17 \\ a + 4c &= -3 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 17 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & 23 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_2]{L_2 \to L_2 - 4L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 4L_3]{L_2 \to L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Logo $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$. Portanto, $a + b + c = 2$.

A alternativa correta é (a).

Q3. Seja V o espaço vetorial de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correspondente a um subconjunto S de V que **não** é um subespaço de V:

(a) $S = \{f \in V : f(0)f(1) = 0\}$

(b) $S = \{f \in V : f(0) = 0\}$

(c) $S = \{f \in V : f(0) + f(1) = 0\}$

(d) $S = \{f \in V : f \text{ é derivável e } f' = f\}$

(e) $S = \{f \in V : f \text{ é derivável}\}$

Resposta: $S = \{f \in V : f(0)f(1) = 0\}$ não é subespaço de V pois as funções

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - 1$$

pertencem a S mas

$$f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = 2x - 1$$

não pertence a S pois

$$(f + g)(0) \cdot (f + g)(1) = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Logo a alternativa correta é (a).

Q4. Seja $V = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e considere a operação de soma $\oplus$ em V definida por

$$x \oplus y = x + y - 2,$$

para quaisquer $x, y \in V$. Assinale a alternativa correspondente a uma operação $\odot$ de multiplicação por escalares reais que faz de V, munido de $\oplus$ e $\odot$, um espaço vetorial:

(a) $\lambda \odot x = \lambda x - 2\lambda + 2$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in V$

(b) $\lambda \odot x = \lambda x$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in V$

(c) $\lambda \odot x = \lambda x + 2$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in V$

(d) $\lambda \odot x = \lambda x - 2\lambda$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in V$

(e) $\lambda \odot x = \lambda x + 2\lambda + 2$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in V$

Resposta: Observa que (c), (d), (e) não são respostas corretas pois em nenhuma delas acontece que

$$1 \odot x = x.$$

(b) não está certa pois

$$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda(x + y - 2) = \lambda x + \lambda y - 2\lambda \quad \text{e}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y) = \lambda x \oplus \lambda y = \lambda x + \lambda y - 2$$

são diferentes quando $\lambda \neq 1$.

Logo a alternativa correta é (a).

Confirmamos isso agora. Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x, y \in V$.

- $\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (\mu x - 2\mu + 2) = \lambda\mu x - 2\lambda\mu + 2\lambda - 2\lambda + 2 = (\lambda\mu)x - 2(\lambda\mu) + 2 = (\lambda\mu) \odot x$
- $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda + \mu)x - 2(\lambda + \mu) + 2 = \lambda x - 2\lambda + 2 + \mu x - 2\mu + 2 - 2 = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \oplus x)$
- $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda(x + y) - 2\lambda + 2 = \lambda x - 2\lambda + 2 + \lambda y - 2\lambda + 2 + 2\lambda - 2 = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- $1 \odot x = x$.

Q5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & b \end{pmatrix}.$$

Temos que B pertence ao subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ gerado por A_1, A_2 e A_3 se, e somente se:

(a) $a \neq 8$ e $b = -\dfrac{1}{3}$

(b) $a \neq 8$ e $b = -1$

(c) $a \neq 7$ e $b = -\dfrac{1}{3}$

(d) $a \neq 7$ e $b = -1$

(e) $a \neq 9$ e $b = -\dfrac{1}{3}$

Resposta: $B \in [A_1, A_2, A_3]$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ a & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, se o sistema em α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - 5\gamma &= -1 \\ -2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha + 3\beta + a\gamma &= 3 \\ \alpha - \beta - 2\gamma &= b \end{cases}$$

possui solução.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a & 3 \\ 1 & -1 & -2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{\substack{L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & 1 & a-5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1+b \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_2]{\substack{L_4 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1+b \\ 0 & 0 & a-8 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1+3b \end{array}\right)$$

O sistema tem solução em α, β, γ se, e somente se, $b = -\frac{1}{3}$ e $a \neq 8$.

Logo a alternativa correta é (a).

Q6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o subespaço S de $P_3(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = [1 + t - t^2 + t^3, -1 + 2t^2 - 3t^3, 2 - t + t^2 + bt^3, 1 + 2t + at^2 - t^3].$$

Temos que a dimensão de S é igual a 3 se, e somente se:

(a) $a = 0$ ou $b = 8$

(b) $a = 2$ ou $b = 6$

(c) $a = 0$ e $b = 8$

(d) $a = 2$ e $b = 6$

(e) $b = 8$

Resposta: Consideremos a base $B = (1, t, t^2, t^3)$ de $P_3(\mathbb{R})$. Então

$$1 + t - t^2 + t^3 = (1, 1, -1, 1)_B, \quad -1 + 2t^2 - 3t^3 = (-1, 0, 2, -3)_B,$$

$$2 - t + t^2 + bt^3 = (2, -1, 1, b)_B, \quad 1 + 2t + at^2 - t^3 = (1, 2, a, -1)_B$$

Para que $\dim S = 3$ tem que acontecer que após escalonar a matriz das coordenadas seguinte apareçam 3 linhas não nulas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & 2 & a & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & b-2 \\ 0 & 1 & a+1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_3 \to L_3 + 3L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & b-8 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{L_4 \to L_4 - \frac{1}{6}aL_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & b-8 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}a(b-8) \end{pmatrix}$$

Logo $\dim S = 3$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 8$.
A alternativa correta é (a).

Q7. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $A \in M_5(\mathbb{R})$, então a sequência

$$\mathrm{I},\ A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots,\ A^{25}$$

no espaço vetorial $M_5(\mathbb{R})$ é linearmente dependente, em que I denota a matriz identidade;

(II) o subespaço $[(1,1,1,2),(1,-3,2,-1)]$ de $\mathbb{R}^4$ está contido no subespaço

$$\big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 5x - y - 4z = 0\big\};$$

(III) se V é um espaço vetorial de dimensão 97, $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_8$ é uma sequência linearmente independente em V e $w \in V$ é não nulo, então a sequência $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_8,\ w$ também é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras

(d) apenas a afirmação (III) é verdadeira

(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira

Resposta: (I) é verdadeira. O espaço vetorial $M_5(\mathbb{R})$ tem dimensão 25 e, portanto, o número máximo de vetores LI em $M_5(\mathbb{R})$ é 25. A sequência

$$\mathrm{I},\ A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots,\ A^{25}$$

possui 26 elementos. Logo a sequência é LD.

(II) é verdadeira. Os vetores $(1,1,1,2)$ e $(1,-3,2,-1)$ pertencem a

$$\big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 5x - y - 4z = 0\big\}$$

pois $5 \cdot 1 - 1 - 4 \cdot 1 = 0$ e $5 \cdot 1 - (-3) - 4 \cdot 2 = 0$. Isso implica que

$$[(1,1,1,2),(1,-3,2,-1)] \subset \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 5x - y - 4z = 0\big\}.$$

(III) é falsa pois, por exemplo, se $v_1 \neq 0$ e $w = 2v_1$, temos que a sequência é LD.

Logo a alternativa correta é (a).

Q8. Se S denota o subespaço de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

então uma base de S é:

(a) $\{A_1, A_2, A_4\}$

(b) $\{A_1, A_2, A_3\}$

(c) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

(d) $\{A_1, A_2, A_4, A_5\}$

(e) $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$

Resposta: Consideremos a base usual de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Então temos que

$$A_1 = (1, -2, 1, -1, -1, 2)_B, \quad A_2 = (-2, 3, -1, 2, -1, 2)_B, \quad A_3 = (5, -8, 3, -5, 1, -2)_B$$

$$A_4 = (-1, 1, 1, 2, -2, 4)_B, \quad A_5 = (-2, 2, 1, 3, -4, 8)_B, \quad A_6 = (4, -6, 1, -5, 2, -4)_B$$

Para obter uma base podemos escalonar a matriz cujas linhas são as coordenadas. As linhas não nulas formaram uma base do subespaço gerado por esses vetores.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 & -4 & 8 \\ 4 & -6 & 1 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1 \\ L_4 \to L_4 + L_1 \\ L_5 \to L_5 + 2L_1 \\ L_6 \to L_6 - 4L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2 \\ L_5 \to L_5 - 2L_2 \\ L6 \to L_6 + 2L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora observamos que os vetores cujas coordenadas na base B são as linhas 1,2,4 desta última matriz formam uma base de S. Também observamos que,

pela forma em que foram feitas as operações elementares nas linhas, os vetores cujas coordenadas na base B são as linhas 1,2,4 da primeira matriz também são base de S. Logo (A_1, A_2, A_4) é base de S.

A alternativa correta é (a).

Q9. Seja A a matriz 4×6 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

e denote por S o subespaço de $\mathbb{R}^6$ formado pelas soluções do sistema linear homogêneo $AX = 0$ com matriz de coeficientes A. Se T denota o subespaço de $\mathbb{R}^6$ gerado pelas linhas de A, então:

(a) $\dim(S) = 3$ e $\dim(T) = 3$

(b) $\dim(S) + \dim(T) = 5$

(c) $\dim(S) = 3$ e $\dim(T) = 4$

(d) $\dim(S) = 4$ e $\dim(T) = 3$

(e) $\dim(S) = 4$ e $\dim(T) = 4$

Resposta: $\dim(S) =$ número de variáveis livres do sistema $AX = 0$.
$\dim(T) =$ número de linhas não nulas após escalonamento da matriz A.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{L_3 \to L_3 + 5L_2 \\ L_4 \to L_4 + 4L_2}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Como o sistema $AX = 0$ possui 3 variáveis livres, temos que $\dim(S) = 3$. Como após o escalonamento da matriz A temos 3 linhas não nulas, temos que $\dim(T) = 3$.

A alternativa correta é (a).

Q10. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere o subespaço S de $P_3(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios:

$$p_1(t) = 1 + \alpha t + t^3, \quad p_2(t) = \alpha + t + t^3 \quad \text{e} \quad p_3(t) = 1 + t + \alpha t^3.$$

Temos que a dimensão de S é igual a 3 se, e somente se:

(a) $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$

(b) $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$

(c) $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -2$

(d) $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq -2$

(e) $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 2$

Resposta: Consideremos a base $B = (1, t, t^2, t^3)$ de $P_3(\mathbb{R})$. Em relação a esta base temos que

$$p_1 = (1, \alpha, 0, 1)_B, \quad p_2 = (\alpha, 1, 0, 1)_B, \quad p_3 = (1, 1, 0, \alpha)_B$$

A dimensão de S é 3 se, e somente se, após os escalonamento da matriz cujas linhas são as coordenadas de p_1, p_2, p_3, respectivamente, a matriz tenha 3 linhas não nulas.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

Aqui percebemos que α deve ser diferente de 1 para que a dimensão seja 3. Então continuamos supondo que $\alpha \neq 1$.

$$\xrightarrow[]{\substack{L_2 \to \frac{1}{1-\alpha} L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{1-\alpha} L_3}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \to L_3 - (1+\alpha) L_2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

Assim obtemos que $\dim(S) = 3$ se, e somente se, $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$.
A alternativa correta é (a).

Q11. Sejam S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ uma base de S. Suponha que:

$$A_1 = (2,1,2)_{\mathcal{B}}, \quad A_2 = (0,-3,-1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad A_3 = (1,0,1)_{\mathcal{B}}.$$

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

então $a + b + c$ é igual a:

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

(e) -2

Resposta: Temos que $B_1 = aA_1 + bA_2 + cA_3$. E em coordenadas essa igualdade fica como

$$a(2,1,2)_{\mathcal{B}} + b(0,-3,-1)_{\mathcal{B}} + c(1,0,1)_{\mathcal{B}} = (1,0,0)_{\mathcal{B}}.$$

Portanto, a, b, c são as únicas soluções do sistema

$$\begin{cases} 2a + c &= 1 \\ a - 3b &= 0 \\ 2a - b + c &= 0 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema em a, b, c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_2]{L_2 \to L_2 - L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Logo $a = 3$, $b = 1$ e $c = -5$. Portanto, $a + b + c = -1$.

A alternativa correta é (a).

Q12. Seja $a \in \mathbb{R}$ e denote por V o espaço vetorial de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sejam $f_1, f_2, f_3 \in V$ dadas por

$$f_1(x) = ae^x + \operatorname{sen} x - \cos x, \quad f_2(x) = 2e^x - \operatorname{sen} x - 2\cos x,$$
$$f_3(x) = -e^x + 2\operatorname{sen} x + 3\cos x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que f_1, f_2 e f_3 são linearmente dependentes se, e somente se:

(a) $a = 7$

(b) $a = 3$

(c) $a = 8$

(d) $a = 2$

(e) $a = -5$

Resposta: $B = (e^x, \operatorname{sen} x, \cos x)$ é LI e, portanto, base de $W = [e^x, \operatorname{sen} x, \cos x]$. Em relação a B temos que

$$f_1 = (a, 1, -1)_B, \quad f_2 = (2, -1, -2)_B, \quad f_3 = (-1, 2, 3)_B.$$

f_1, f_2, f_3 são LD se, e somente se, $\dim(W) = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + aL_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1+2a & -1+3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{L_2 \to \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \to L_3 - (1+2a)L_2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{a-7}{3} \end{pmatrix}$$

Logo $\dim(W) = 2$ se, e somente se, $a = 7$.
A alternativa correta é (a).

Q13. Considere o subespaço de $P_5(\mathbb{R})$ dado por:

$$S = \{p \in P_5(\mathbb{R}) : p(1) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\}.$$

Temos que a dimensão de S é igual a:

(a) 4

(b) 3

(c) 2

(d) 1

(e) 5

Resposta: Um elemento genérico de $P_5(\mathbb{R})$ é da forma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$ com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Agora,

$$0 = p(1) = a + b + c + d + e + f \quad 0 = p'(1) = b + 2c + 3d + 4e + 5f$$

Logo

$$S = \{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5 \mid a+b+c+d+e+f = 0,\ b+2c+3d+4e+5f = 0\}.$$

O sistema homogêneo que define S tem 4 variáveis livres. Portanto, a dimensão de S é 4.

A alternativa correta é (a).

Q14. Seja V um espaço vetorial. Assinale a alternativa contendo uma afirmação **FALSA**:

(a) se $v, w, z \in V$ e z não é combinação linear de v e w, então v, w e z são linearmente independentes

(b) se S é um subespaço de V e $v, w \in S$, então $[v, w]$ está contido em S

(c) se V tem dimensão finita e S é um subespaço de V tal que $\dim(S) = \dim(V)$, então $S = V$

(d) se $v, w, z \in V$ e z é combinação linear de v e w, então v, w e z são linearmente dependentes

(e) o subespaço $\{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$ de $P(\mathbb{R})$ não tem dimensão finita

Resposta: (a) é FALSA. Tome por exemplo $v = (1, 0, 0)$, $w = (2, 0, 0)$, $z = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(b) é verdadeira. Estudado em sala de aula.

(c) é verdadeira. Estudado em sala da aula.

(d) é verdadeira. Se $\alpha v + \beta w = z$, então temos que

$$\alpha v + \beta w + (-1)z = 0.$$

(e) é verdadeira. Os polinômios $x, x^2, \ldots, x^m, \ldots$ pertencem a

$$\{p \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$$

e são linearmente independentes.