Resolução
PSub 2019

2- $A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$

Sabemos que, para $\lambda = 2$, $ma = mg = 1$. Precisamos checar $\lambda = 1$:

$Ker(A - \lambda I)$:

$$A - I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 2a-1 \\ -a-1 & a+1 & 2a+1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-a)x + (a-1)y + (2a-1)z = 0 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (2a+1)z = 0 \\ x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-a)y + (a-1)y + (1-a)z + (2a-1)z = 0 \\ (-a-1)y + (a+1)y + (-a-1)z + (2a+1)z = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} az = 0 \\ az = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Se } a \neq 0,\ z = 0.$$

Assim, $x = y$ e seria somente UMA variável livre.

Para ser diagonalizável, precisamos que $mg = 2$, como $ma = 2$. Para isso, precisamos de duas variáveis livres. Assim, temos $\boxed{a = 0}$ e y e z são variáveis livres.

3- I- v possui uma parcela em W e uma em $W^\perp$, mutuamente distintas.

Logo, w representa TUDO de v em W e z representa TUDO de v em $W^\perp$. Assim, $\underline{\text{proj}_W v} = w$ e $\underline{\text{proj}_{W^\perp} v} = z$.

<u>Verdadeiro!</u>

II- Se ortogonalizarmos algo já ortogonal, <u>não vai mudar</u>.

Exemplo $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortogonal

$f_1 = e_1$

$f_2 = e_2 - \cancel{\text{proj}_{f_1} e_2}^{\,0 \to \text{ortogonais}} = e_2$

$f_3 = e_3 - \cancel{\text{proj}_{f_1} e_3}^{\,0} - \cancel{\text{proj}_{f_2} e_3}^{\,0} = e_3$ <u>Verdadeiro!</u>

III- Não é verdade. Tudo que sabemos é

dim $V = 555$

dim $Ker(T) = 450$

dim $Im(T) = 105$

Porém, nada pode ser dito dos vetores em $Im(T)$ ou $Ker(T)$. Podem estar contidos ou não. <u>Falso</u>

Contra exemplo:

$T(v) = v$, $v \in Im$

$T(w) = 0$, $w \in Ker T$

Tudo na imagem <u>NÃO ESTÁ</u> no núcleo, porque leva a si mesmo. Todo o resto está. Logo, $Im(T) \not\subset Ker(T)$

4- Precisamos, para ser injetora, que $\dim \ker T = 0$.

Com isso, $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Sabemos que as colunas de $[T]_{BC}$ são geradoras da imagem. Logo, se forem LI, a dimensão da imagem será 3. Então, ao escalonar a matriz com essas colunas, em linhas, todas as linhas devem ser não nulas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L3-L1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L3+(a-1)L2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & b-1 \end{pmatrix}$$

Para a 3ª linha não ser nula e, assim, $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$, precisamos que $a \neq 0$ ou $b \neq 1$. (d)

5- $\ker T = [t, t^2]$ → temos 2 autovetores ligados ao autovalor 0.

Precisamos achar mais um autovetor ligado a algum autovalor para saber que é diagonalizável.

Temos que

$$T(1+t+t^2) = T(1) + \cancel{T(t)} + \cancel{T(t^2)} = 2+3t+33t^2$$

$$T(1) = 2+3t+33t^2$$

Tanto faz as parcelas com t e t^2. Logo, se fizermos

$$T\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{33}{2}t^2\right) = 2+3t+33t^2 = 2\cdot\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{33}{2}t^2\right)$$

Assim, o autovalor 2 está ligado ao autovetor $1+\frac{3}{2}t+\frac{33}{2}t^2$.

Dessa forma, T é diagonalizável sem saber mais nada de T.

Então, quanto sabemos se existe um único operador T ou infinitos assim. Acredito que faça sentido ser únicos, mas eu não sei provar (foi mal). a)

1- Para serem semelhantes, precisamos que

1) $\det X = \det Y$

2) $tr(X) = tr(Y)$

3) $X = P^{-1} Y P$

É fácil ver que $tr(C) = -12$, $tr(A) = tr(B) = 12$.

Logo, C não pode ser semelhante com A e B. Assim, temos que checar só A e B.

$\det A = \det B = \underline{11}$

Precisamos achar matriz P tais que

$A = P^{-1} B P$?

(eu não sei / é muito tempo, acho. Usando I e II já dá pra excluir boa parte das alternativas. Foi mal :(

6 – I - Se o operador é simétrico, conseguimos formar uma base ortogonal de autovetores!

Como dim $V=2$ e v é autovetor, tudo ortogonal a ele também será. Dessa forma, como $w \perp v$, w é autovetor.

Verdadeiro

II - Isso só é verdade se a matriz de transformação tiver entradas reais. Nada é dito, então Falso.

III - Os vetores são LD. Assim, se um é autovetor, o outro também é.

$$(1+i, 1+i) = (1+i)\cdot(1,1)$$

Verdadeiro

7- Podemos usar o Método da melhor aproximação:

$$\begin{cases} \langle (x,y,z),(1,1,2)\rangle = a\langle (1,1,2),(1,1,2)\rangle + b\langle (1,1,2),(2,0,2)\rangle \\ \langle (x,y,z),(2,0,2)\rangle = a\langle (1,1,2),(2,0,2)\rangle + b\langle (2,0,2),(2,0,2)\rangle \end{cases}$$

onde $\boxed{proj_S (x,y,z) = a(1,1,2) + b(2,0,2)}$

$\langle (x,y,z),(1,1,2)\rangle = x+y+2z$; $\langle (x,y,z),(2,0,2)\rangle = 2x+2z$

$\langle (1,1,2),(1,1,2)\rangle = 6$; $\langle (1,1,2),(2,0,2)\rangle = 6$; $\langle (2,0,2),(2,0,2)\rangle = 8$

$$\begin{cases} 6a+6b = x+y+2z \quad \text{(I)} \\ 6a+8b = 2x+2z \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(queremos resolver para a e b)

Fazendo (II) − (I)

$$2b = x + y$$

$$\boxed{b = \frac{x - y}{2}}$$

$$6a + 8\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2x + 2z$$

$$6a = -4x - 4y + 2x + 2z$$

$$\boxed{a = \frac{-x + 2y + z}{3}}$$

$$\operatorname{proj}_S (x, y, z) = \left(\frac{-x+2y+z}{3}\right)(1,1,2) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(2,0,2)$$

$$= \frac{1}{3}\left[(-x+2y+z)(1,1,2) + (x-y)(3,0,3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x - y + z,\ -x + 2y + z,\ x + y + 2z\right)$$

(b)

8 - Como se monta $[T]_{BC}$:

1 - Transforma-se os vetores de B;

2 - Escreve-se a imagem como coordenadas em C;

3 - Põe-se nas colunas da matriz.

Além disso, as colunas de $[T]_{BC}$ são geradores do Im (T).

Logo,

$$Im(T) = [(1,-1,1,-1)_C , (1,1,-1,-1)_C]$$

$$Im(T) = [1 - 1 + t + 1 - t^2 - 1 + t^3 , 1 + 1 - t - 1 + t^2 - 1 + t^3]$$

$$Im(T) = [t - t^2 + t^3 , -t + t^2 + t^3]$$

Já o núcleo, terá dim Ker (T) = dim V − dim Im (T) = $\underline{2}$

Sabemos que, pela matriz,

$$T(1+t) = [(0,0,0,0)_C] = 0_V$$

$$T(1 + t + t^2 + t^3) = [(0,0,0,0)_C] = 0_V$$

Logo, $Ker(T) = [(1+t, 1+t+t^2+t^3)]$ ©

Scanned by CamScanner

9 - Como zero é raiz do polinômio, é um autovalor. Além disso, como $T(1,1,1) = 3(1,1,1)$, 3 é autovalor. Sabemos que zero tem multiplicidade 2, logo $\lambda = 3$ tem multiplicidade 1. Então $E(3) = [(1,1,1)]$.

Como é simétrica, $E(3) \perp E(0)$. E como só tem os dois, $E(0) = E(3)^{\perp}$. Logo, para achar $E(0)$, basta achar $E(3)^{\perp}$.

$$\langle (a, b, c), (1,1,1) \rangle = 0$$

$$a + b + c = 0$$
$$a = -b - c$$

$$\boxed{E(0) = [(-1,1,0), (-1,0,1)]}$$

Scanned by CamScanner

Temos uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos achar $(1,2,3)$ nessa base:

$$(1,2,3) = \alpha(1,1,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(-1,0,1)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \gamma = 3 \end{cases}$$ (Somando as 3)

$3\alpha = 6$

$\boxed{\alpha = 2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\beta = 0}$, $\boxed{\gamma = 1}$

Logo, $T(1,2,3) = \alpha T(1,1,1) + \cancel{\beta T(-1,1,0)} + \gamma \cancel{T(-1,0,1)}$

$= 2T(1,1,1) = (6,6,6)$ //

(C)

10- Se fizermos

$$[T]_{CB} \cdot 2[S]_{\mathcal{E}C} = [H]_{\mathcal{E}B}$$

Podemos usar a matriz assim, mas temos que lembrar de tirar os vetores da base B no final. Também podemos passar para a canônica usando $[I]_{B\mathcal{E}}$ e fazendo

$$[I]_{B\mathcal{E}} \cdot [H]_{\mathcal{E}B}$$

Vou fazer o 1º porque parece mais fácil.

$$[H]_{\varepsilon B} = [T]_{CB} \cdot 2 \cdot [S]_{\varepsilon C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos (x,y) no canônica. Logo,

$$[H]_{\varepsilon B} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 8x \end{pmatrix}_B$$

Tirando da base B...

$$H(x,y) = -4y(1,0) + 8x(2,1) = (16x-4y, 8x)$$ 2

11- Passando para a notação matricial, temos

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A solução será $(x,y) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e v_1 e v_2 seus respectivos autovetores. Assim, vamos achá-los

$$p_A(t) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$\Delta = 16 - 52 = -36$$

$$\lambda = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Como trata-se de auto valores complexos, basta usar ~~um~~ deles (os conjugados não precisa usar)

$E(2+3i)$:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x = 3iy$$
$$x = iy$$
$$E(2+3i) = [(i,1)]$$

Logo, a solução é

$$(x,y) = C_1 e^{(2+3i)t}(i,1) = C_1 e^{2t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)(i,1)$$

$$= C_1 e^{2t}(i\cos 3t - \operatorname{sen} 3t, \cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$= C_1 e^{2t}(-\operatorname{sen} t, \cos 3t) + \underbrace{C_1 i}_{C_2} e^{2t}(\cos 3t, \operatorname{sen} 3t)$$

Temos então

$x(t) = C_1 e^{2t}(-\operatorname{sen} 3t) + C_2' e^{2t} \cos 3t$

$y(t) = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2' e^{2t} \operatorname{sen} 3t$

Com $y(0) = 1$ e $x(0) = 1$, temos:

$y(0) = \underline{C_1 = 1}\,//$ $\quad x(0) = \underline{C_2' = 1}\,//$

Assim, $x(t) = e^{2t}(-\operatorname{sen} 3t + \cos 3t)$

$$
\begin{array}{r}
x(t) = e^{2t}(-\operatorname{sen} 3t + \cos 3t) \\
+\ \underline{y(t) = e^{2t}(\operatorname{sen} 3t + \cos 3t)} \\
x + y = 2e^{2t} \cos 3t
\end{array}
$$

(d)

12- Para achar os autovalores, temos que montar a matriz de transformação. Em relação à base canônica, temos

$$T(1,0,0) = (1,0,1) \qquad T(0,0,1) = (2,-2,3)$$
$$T(0,1,0) = (3,-2,2)$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, basta diagonalizar e achar autovalores.

$$\det(T-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) - 2(-2-\lambda) + 4(1-\lambda) - 6$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 2\lambda + 4 - 4\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) + 2 - 2\lambda$$

$$= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(3-\lambda) + 2]$$

$$= (1-\lambda)[-6-\lambda+\lambda^2+2]$$

$$= (1-\lambda)(\underline{\lambda^2-\lambda-4})$$

$\Delta = 17$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

e

13 - Podemos verificar isso de diversas formas:

→ Base ortogonal de autovetores

→ $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$

→ A matriz de transformação é simétrica ($M = M^t$), quando escrita em uma base ortonormal

Vou usar o 3º, passando $[T]_B$ para a base canônica.

$$[T]_{can} = [I]_{B,can} [T]_B [I]_{can,B}$$

$$[I]_{B,can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Já $[I]_{can,B} = [I]_{B,can}^{-1}$, onde escrevo os vetores da canônica como coordenadas na base B.

Scanned by CamScanner

$$(1,0) = \alpha(1,-2) + \beta(1,-1) \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\beta = -2\alpha \rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$-\alpha = 1$$

$$\boxed{\alpha = -1}$$

$$(0,1) = \gamma(1,-2) + \delta(1,-1) \rightarrow \begin{cases} \gamma + \delta = 0 \\ -2\gamma - \delta = 1 \end{cases}$$

$$\gamma = -\delta$$

$$-\gamma = 1$$

$$\boxed{\gamma = -1} \quad \boxed{\delta = 1}$$

$$[I]_{can,B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & a+1 \\ -4 & -2a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} -3+2a+2 & -3+a+1 \\ 4-4a-2 & 4-2a-1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} -1+2a & -2+a \\ -4a+2 & 4-2a-1 \end{pmatrix}$$

Para ser simétrica, precisamos que $\boxed{a_{12} = a_{21}}$. Assim,

$$-4a+2 = -2+a$$

$$4 = 5a$$

$$\boxed{a = 4/5}$$ d

14- Para resolver uma cônica, precisamos diagonalizar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(10-\lambda)-9 = 20-12\lambda+\lambda^2-9$$

$$= \lambda^2-12\lambda+11$$

$$\Delta = 100$$

$$\lambda = \frac{12 \pm 10}{2} = 6 \pm 5 \begin{cases} \boxed{\lambda = 11} \\ \boxed{\lambda = 1} \end{cases}$$

Para $E(1)$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 3 & 10-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+3y=0$$

$$x=-3y$$

$$E(1) = [(-3,1)]$$

Para $E(11)$:

$$\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x-y=0$$

$$3x=y$$

$$E(11) = [(1,3)]$$

Para mudar de coordenadas temos que achar uma base ortonormal de autovetores.

(1, 3) e (−3, 1) já são ortogonais. Basta normalizar:

$$\|(1,3)\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|(-3,1)\| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{-3}{\sqrt{10}} x + \frac{y}{\sqrt{10}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$x' + 3y' = \frac{10y}{\sqrt{10}}$$

$$x' = \frac{-3x}{\sqrt{10}} + \frac{x' + 3y'}{10}$$

$$\boxed{\frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} = y}$$

$$10x' = -3\sqrt{10}\, x + x' + 3y'$$

$$\boxed{\frac{-9x' + 3y'}{\sqrt{10}} = 3x}$$

Cuming

$$x'^2 + 11y'^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\left(\frac{-9x' + 3y'}{\sqrt{10}} - \frac{(x' + 3y')}{\sqrt{10}}\right) = 3$$

$$x'^2 + 11y'^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\left(\frac{-10x'}{\sqrt{10}}\right) = 3$$

$$x'^2 - 2x' + 11y'^2 = 3$$

$$x'^2 - 2x' + 1 + 11y'^2 = 3 + 1$$

$$(x' + 1)^2 + 11y'^2 = 4$$

$$\boxed{\begin{matrix} x' + 1 = s \\ y' = t \end{matrix}}$$

$$\boxed{11t^2 + s^2 = 4}$$

a

Scanned by CamScanner

15- Faremos Gram-Schimdt (foi mal, odeio essa merda também):

$$B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = A_2 - \text{proj}_{B_1} A_2 = A_2 - \overset{0}{\cancel{\frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1}} = A_2$$

$$\langle A_2, B_1 \rangle = \text{tr}\,(A_2 B_1^t) = \text{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \text{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$B_3 = A_3 - \overset{0}{\cancel{\text{proj}_{B_1} A_3}} - \text{proj}_{B_2} A_3 = A_3 - \overset{0}{\cancel{\frac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle}}} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} B_2$$

$$\langle A_3, B_1 \rangle = tr(A_3 B_1^{+}) = tr\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle A_3, B_2 \rangle = tr(A_3 B_2^{+}) = tr\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\langle B_2, B_2 \rangle = tr(B_2 B_2^{+}) = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 6$$

$$B_3 = A_3 + \frac{1}{6} B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

16-

Sabemos que $T(1,1,1)=(2,1,5)$ e $T(0,1,1+i)=(0,1,1+i)$. Precisamos encontrar mais um vetor LI que sabemos a transformação.

Como a matriz é real e $(0,1,1+i)$ é autovetor com autovalor 1, seu conjugado também será autovetor associado ao autovalor conjugado (no caso, 1 também). Então, $T(0,1,1-i)=(0,1,1-i)$.

Agora, podemos achar $T(1,2,3)$ fazendo a combinação linear

$(1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,1+i)+\gamma(0,1,1-i)$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \mathrm{I} \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 & \mathrm{II} \\ \alpha + (1+i)\beta + (1-i)\gamma = 3 & \mathrm{III} \end{cases}$$

Fazendo $\mathrm{III} - (1+i)\,\mathrm{II}$:

$$\alpha - (1+i)\alpha + (1-i)\gamma - (1+i)\gamma = 3 - 2(1+i)$$

$$1 - (1+i) - 2i\gamma = 1 - 2i$$

$$-2i\gamma = 1 - i$$

$$\gamma = \frac{1-i}{-2i} \cdot \frac{(2i)}{(2i)} = \frac{2+2i}{4} = \frac{1+i}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$1 + \beta + \frac{1+i}{2} = 2$$

$$\beta = 1 - \frac{(1+i)}{2}$$

$$\beta = \frac{1-i}{2}$$

$$T(1,2,3) = \alpha T(1,1,1) + \beta T(0,1,1+i) + \gamma T(0,1,1-i)$$

$$T(1,2,3) = T(1,1,1) + \frac{(1-i)}{2} T(0,1,1+i) + \frac{(1+i)}{2}(0,1,1-i)$$

$$T(1,2,3) = (2,1,5) + \left(0, \frac{1-i}{2}, 1\right) + \left(0, \frac{1+i}{2}, 1\right)$$

$$T(1,2,3) = (2,2,7)$$

e