MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Segunda Prova — 15/10/2019

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
3. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
4. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
5. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
6. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes. O tipo da prova deve ser o mesmo em todas as folhas, incluindo a folha de respostas.
7. O preenchimento da folha de respostas e sua entrega implicam que o aluno leu e verificou todas as regras aqui listadas.
8. Ao final da prova **o aluno deve destacar e entregar somente a folha de respostas.** A folha de questões pode ser levada para casa.

Questão 1 Considere as seguintes afirmações:

(I) Podemos construir uma serie de potências com intervalo de convergência $]-\infty, 1[$.

(II) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma serie de potências com raio de convergência $R > 0$ então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

possui o mesmo raio de convergência.

(III) Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ converge então o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é maior ou igual a 2.

Podemos afirmar que:

- [A] Só (II) é verdadeira.
- [B] Todas são verdadeiras.
- ■ Só (II) e (III) são verdadeiras.
- [D] Só (III) é verdadeira.
- [E] Só (I) e (II) são verdadeiras.

Questão 2 Dadas três funções

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}.$$

Considere as afirmações:

(I) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq h(x)$.

(II) $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{x} = 1$.

(III) $h'(2) = e^2$.

Podemos afirmar que:

- [A] Todas as afirmações são verdadeiras.
- [B] Apenas as afirmações (I), (II) são verdadeiras.
- [C] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
- [D] Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- ■ Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3 Sejam $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ de modo que a integral abaixo assuma o menor valor possível

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[x - c_0 - c_1 \cos(x) - c_2 \operatorname{sen}(x) - c_3 \operatorname{sen}(2x)\right]^2 dx.$$

Então c_2 é igual a:

- ■ 2.
- B $\frac{2}{\pi}$.
- C $\frac{1}{2\pi}$.
- D -1.
- E $\frac{1}{\pi}$.

Questão 4 Seja $f(x) = x^2 - 1$, para $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = f(x-1)$ para $1 < x \leq 2$. Denotamos por $S(x)$ a soma da série de senos da função $f(x)$. Quais são os valores de $S(1), S(-1)$ e $S(-\frac{1}{2})$?

- A $0, 0, \frac{3}{4}$.
- ■ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.
- C $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.
- D $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.
- E $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.

Questão 5 Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 1+x, & x \in]1,2]. \end{cases}$$

A soma da série de cossenos da $f(x)$ é :

A $\begin{cases} 1-x, & x \in [-2,-1[, \\ 1, & x \in [-1,1], \\ 1+x, & x \in]1,2]. \end{cases}$

B $\begin{cases} 1-x, & x \in [-2,-1[, \\ 1, & x \in]-1,1], \\ 1+x, & x \in]1,2], \\ \frac{3}{2}, & x = -1. \end{cases}$

■ $\begin{cases} 1-x, & x \in [-2,-1[, \\ 1, & x \in]-1,1[, \\ 1+x, & x \in]1,2], \\ \frac{3}{2}, & x = \pm 1. \end{cases}$

D $\begin{cases} -1+x, & x \in [-2,-1[, \\ -1, & x \in]-1,0[, \\ 1, & x \in [0,1], \\ 1+x, & x \in]1,2], \\ -\frac{3}{2}, & x = -1. \end{cases}$

E $\begin{cases} -1+x, & x \in [-2,-1[, \\ -1, & x \in [-1,0[, \\ 1, & x \in [0,1], \\ 1+x, & x \in]1,2]. \end{cases}$

Questão 6 Sabe-se que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n^2 - 1/4)} \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \; -\pi < x < \pi.$$

Os valores das somas das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(2n-1)^2 - 1/4}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(n^2 - 1/4)^2}$ são respetivamente:

A $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e 1.

■ $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ e π^2.

C $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ e π.

D $-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ e π^2.

E $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ e π.

Questão 7 Seja $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$ a série de Fourier da função f , periódica de período 2π, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

e seja $S(x)$ sua soma. Podemos afirmar que:

A $S(x) = f(x)$ para todo $x \in]-\pi, \pi]$.

■ $S(\pi) = \frac{1}{2}$.

C $S(x) = f(x)$ apenas se $x \in [0, \pi[$.

D $a_0 = \frac{\pi}{2}$.

E $b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$ para todo inteiro $n > 0$.

Questão 8 Considere as séries numéricas

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

(II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Podemos afirmar que:

A A série (I) converge para $\ln(3)$ e a série (II) converge para 9.

B A série (I) converge para $-\ln(\frac{2}{3})$ e a série (II) converge para 6.

C A série (I) converge para $\ln(\frac{5}{2})$ e a série (II) converge para $6/25$.

■ A série (I) converge para $\ln(3)$ e a série (II) converge para 6.

E A série (I) converge para $-\ln(\frac{5}{2})$ e a série (II) converge para $-\frac{6}{25}$.

Questão 9 Seja $f(x)$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \;\; x > -1. \end{cases}$$

Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é a série de Taylor de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ em torno do ponto 0, podemos afirmar que:

■ $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ e $F(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

B $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $F(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

C $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ e $F(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

D $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ e $F(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$.

E $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ e $F(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$.

Questão 10 Sejam $f(x) = \arctan(x)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Podemos afirmar que:

A $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}{x^7} = \dfrac{1}{5}$.

■ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}{x^\alpha} = 0$ para todo $\alpha < 7$.

C $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}{x^7} = \dfrac{1}{7}$.

D $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}{x^5} = -\dfrac{1}{7}$.

E $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}{x^\alpha} = \infty$ para todo $\alpha \geq 7$.

Questão 11 Qual é o terceiro termo não nulo da série de Taylor centrada no zero da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$?

■ $\dfrac{2^5}{6!}x^6$

B $-\dfrac{2^5}{6!}x^6$

C $\dfrac{2^3}{4!}x^4$

D $-\dfrac{2^3}{4!}x^4$

E $\dfrac{2^4}{6!}x^6$

Questão 12 Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{se} \quad x \in]1, 2] \end{cases} .$$

O terceiro coeficiente b_3 da série de senos de $f(x)$ é igual a:

■ $-\frac{8}{9\pi^2}$.

B $-\frac{4}{9\pi^2}$.

C $-\frac{16}{9\pi^2}$.

D $-\frac{8}{3\pi}$.

E $-\frac{4}{3\pi}$.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Segunda Prova — 15/10/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ________________________________ **NUSP:** ______________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A ■ C D E

Questão 05: A B ■ D E

Questão 06: A ■ C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A B C ■ E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: A ■ C D E

Questão 11: ■ B C D E

Questão 12: ■ B C D E