MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Primeira Prova — 10/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________________ **NUSP:** ________ **Turma:** ________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante a prova**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Estojos, mochilas, blusas e outros objetos devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha a tinta (preta ou azul) e de maneira legível todos os campos acima.
3. Preencha a tinta (preta ou azul) e completamente os campos da Folha de Respostas, seguindo as orientações para preenchimento dos campos do número USP e para as alternativas de cada questão .
4. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
5. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
6. Não haverá tempo adicional para preenchimento da Folha de Respostas.
7. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes.

Assinatura: ____

Questão 1 Considere as seguintes séries:

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}$

(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n\,n!}{n^n}\right)$

Podemos afirmar que:

- A Ambas as séries (A) e (B) são divergentes.
- B A série (A) é absolutamente convergente e a série (B) é divergente.
- [redacted] A série (A) é divergente e a série (B) é absolutamente convergente.
- D A série (A) é divergente e a série (B) é condicionalmente convergente.
- E Ambas as séries (A) e (B) são absolutamente convergentes.

Questão 2 Seja p um número real positivo. Considere as seguintes séries:

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)^2$

Podemos afirmar que:

- A A série (A) é convergente se, e somente se, $p \leq 1$ e a série (B) é convergente se, e somente se, $p \leq 1$.
- B A série (A) é convergente se, e somente se, $p > 1$ e a série (B) é convergente se, e somente se, $p > 1$.
- C A série (A) é convergente se, e somente se, $p \leq 1$ e a série (B) é convergente se, e somente se, $p > \frac{1}{2}$.
- D A série (A) é convergente se, e somente se, $p > 1$ e a série (B) é convergente se, e somente se, $p > 2$.
- [redacted] A série (A) é convergente se, e somente se, $p > 1$ e a série (B) é convergente se, e somente se, $p > \frac{1}{2}$.

Questão 3 Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de reais e considere as seguintes afirmações:

(I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são ambas divergentes então $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

(II) Se a_n é convergente, então a_n é limitada.

(III) Se a_n é crescente e diverge então $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(IV) Se $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$ então $\left((a_n^2 - 1)\,\mathrm{sen}(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pode divergir.

São verdadeiras as afirmações :

■ (II) e (III).

B (I) e (III).

C (II) e (IV).

D (I) e (II).

E (III) e (IV).

Questão 4 Considere as séries:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

(II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n)}{e^n}$

(III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

(IV) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^2}$

São convergentes:

A (I) e (IV).

B (I) e (II).

C (II) e (III).

■ (II) e (IV).

E (III) e (IV).

Questão 5 Considere as séries:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1/2 + \cos n}{n^3}$

(II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

(III) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{5^n}$

Podemos afirmar que convergem absolutamente:

■ Apenas (I) e (II).

B Apenas (I) e (III).

C Apenas (II) e (III).

D Todas as séries (I), (II), (III).

E Apenas (II).

Questão 6 Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ uma série numérica. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(II) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(III) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Podemos afirmar que são corretas apenas as alternativas:

■ (I).

B (II) e (III).

C (I) e (III).

D (III).

E (I) e (II).

Questão 7 Dadas as séries:

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{3^n} n^2 x^{2n}$

(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)} x^n,$

considere as afirmações:

(I) (A) converge para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, (B) diverge para $x > 3/2$.

(II) (A) converge para $-3 < x < 3$, (B) diverge para $x > 3/2$ e $x < -3/2$.

(III) (A) diverge para $x > \sqrt{3}$, (B) diverge para $x < -3/2$.

(IV) (A) converge para $x > 3$, (B) converge para $-3/2 < x < 3/2$.

Podemos afirmar que são corretas:

A Apenas (IV).
■ Apenas (I) e (III).
C Apenas (II) e (IV).
D Apenas (III).
E Todas são falsas.

Questão 8 Considere as seguintes séries:

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

(B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen}(n) - \operatorname{sen}(n+1))$

Podemos afirmar que:

A Ambas as séries são divergentes.
■ A série (A) é convergente com soma 1 e a série (B) é divergente.
C A série (A) é divergente e a série (B) é convergente com soma 0.
D A série (A) é convergente com soma 1 e a série (B) é convergente com soma 0.
E A série (A) é convergente com soma 0 e a série (B) é convergente com soma 1.

Questão 9 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2a_{n+1}^2 + 9}}{\sqrt{3a_n + 4}}.$$

Podemos afirmar que o valor de L é:

- ■ $\frac{3}{2}$.
- B ∞.
- C $\sqrt{\frac{11}{7}}$.
- D $\frac{9}{4}$.
- E $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Questão 10 Considere as séries:

(A) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n(\ln(n))^3} \right)$

(B) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n(\ln(n))^3} \right)$

(C) $\sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{sen}(n) \left(\frac{1}{n(\ln(n))^3} \right)$

Podemos afirmar que:

- ■ As três séries (A), (B) e (C) são convergentes.
- B A série (A) é divergente, a série (B) é condicionalmente convergente e a série (C) é divergente.
- C A série (A) é divergente e ambas as séries (B) e (C) são convergentes.
- D As três séries (A), (B) e (C) são divergentes.
- E A série (A) é convergente, a série (B) é convergente, e a série (C) é divergente.

Questão 11 Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha}.$$

Podemos afirmar que:

[A] A série converge se e só se $\alpha = 1$.
[B] A série diverge se e só se $\alpha > 0$.
■ A série converge se e só se $\alpha > 1$.
[D] A série diverge para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
[E] A série converge se e só se $\alpha < 0$.

Questão 12 Seja a_n a sequência numérica definida por $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$. Considere as seguintes afirmações:

(I) a_n é sequência monótona crescente.

(II) a_n é limitada superiormente por 3.

(III) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Podemos afirmar que:

■ Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[B] Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
[C] Todas as afirmações são verdadeiras.
[D] Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
[E] Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

MAT 2456 — Cálculo Diferencial e Integral IV — EP–USP

Primeira Prova — 10/09/2019

Folha de Respostas

Respostas não indicadas apropriadamente nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ________ **Turma:** ________

Por favor coloque seu número USP nos campos ao lado. **Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.**

Número USP

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Questão 01: A B ■ D E

Questão 02: A B C D ■

Questão 03: ■ B C D E

Questão 04: A B C ■ E

Questão 05: ■ B C D E

Questão 06: ■ B C D E

Questão 07: A ■ C D E

Questão 08: A ■ C D E

Questão 09: ■ B C D E

Questão 10: ■ B C D E

Questão 11: A B ■ D E

Questão 12: ■ B C D E