

R\$ 11,00

RESUMO PARA P3 DE CÁLCULO 3 (2018)

Autor: Douglas siqueira

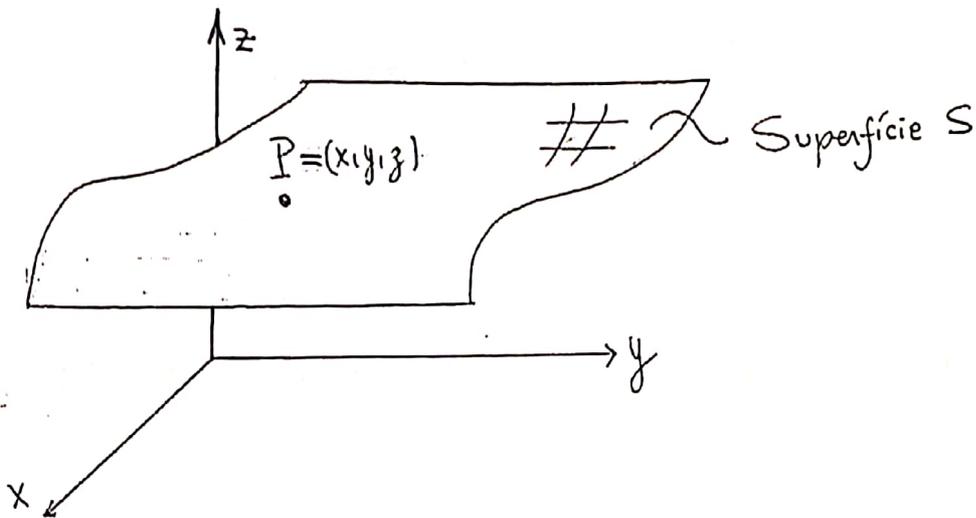
Aulas particulares: douglasiqueira.egn@gmail.com

Sumário

1. Parametrização de Superfícies	3
2. Plano Tangente	8
3. Área de Superfícies	10
4. Massa de Superfícies	11
5. Teorema de Stokes	15
5.1. Integral de Linha em \mathbb{R}^3	15
5.2. Orientação de Superfícies em \mathbb{R}^3	15
5.3. Rotacional de F	16
5.4. Teorema de Green	16
5.5. Teorema de Stokes	16
5.6. Resumo para problemas de aplicação do teorema de Stokes	25
6. Teorema de Gauss	29
6.1. Integral do fluxo de um campo vetorial	30
6.2. Divergente	35
6.3. Enunciado do Teorema	37
7. Exercícios de Prova	41

① Parametrização de Superfícies

Seja S uma superfície em \mathbb{R}^3 , conforme mostra a figura a seguir. Considere um ponto P arbitrário pertencente à superfície S . O ponto P está em \mathbb{R}^3 , então ele é descrito por três coordenadas, ou seja: $P = (x, y, z)$.

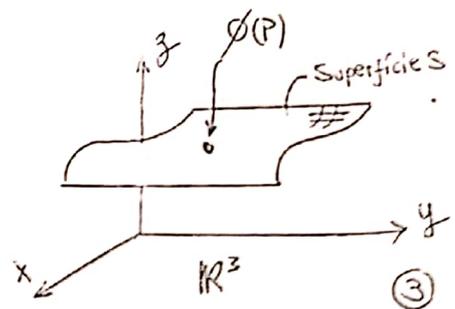
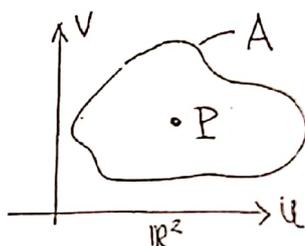


Parametrizar a superfície S consiste em definir duas variáveis u e v que, por meio de uma função ϕ , geram a superfície S . A função ϕ geralmente é obtida por uma relação existente entre as variáveis originais x , y e z . Veremos mais adiante, por meio de exemplos, um método para determinarmos a expressão de ϕ . Podemos definir ϕ do seguinte modo:

ϕ é uma função que parametriza a superfície S , então

$$\phi: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ com } \phi(A) = S$$

Geometricamente:



A figura anterior mostra que para cada ponto P do domínio de ϕ , fica determinado um ponto $\phi(P)$, em \mathbb{R}^3 , que pertence à superfície S .

Se todos os pontos do domínio de ϕ forem considerados, a superfície S fica toda determinada.

Para o caso geral, podemos expressar a função ϕ do seguinte modo:

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Veremos como obter a expressão de ϕ nos exemplos a seguir.

a) $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z - x - y = 10 \}$.

A superfície S é um plano. Para obter a expressão da função ϕ , devemos escolher duas variáveis entre (x, y, z) e escrever a variável restante em função das variáveis escolhidas.

1º Modo: Escolhendo x e y .

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 10 + u + v \end{cases} \Rightarrow \phi_1(u, v) = (u, v, 10 + u + v)$$

2º Modo: Escolhendo x e z .

$$\begin{cases} x = u \\ z = v \\ y = v - u - 10 \end{cases} \Rightarrow \phi_2(u, v) = (u, v - u - 10, v)$$

④

3º modo: Escolhendo y e z .

$$\begin{cases} y = u \\ z = v \\ x = v - u - 10 \end{cases} \Rightarrow \phi_3(u, v) = (v - u - 10, u, v)$$

Existem infinitos modos de parametrizar a superfície S , todos equivalentes entre si, pois geram a mesma superfície. A escolha de uma parametrização em detrimento da outra será feita no sentido de facilitar os processos de integração, conforme veremos nos próximos tópicos.

b) $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2, z \geq 0 \}$

A superfície S é um cilindro de raio a , com $z \geq 0$. Para obter a expressão da função ϕ , devemos escolher duas variáveis entre (x, y, z) e escrever a variável restante em função das variáveis escolhidas. Neste caso, z obrigatoriamente deve estar entre as variáveis escolhidas, pois não é possível escrever z em função de x ou em função de y .

Escolhendo x e z :

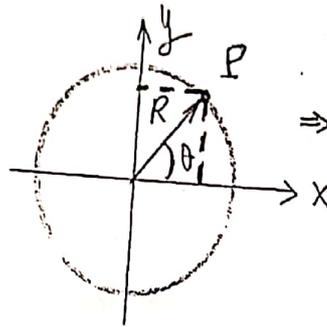
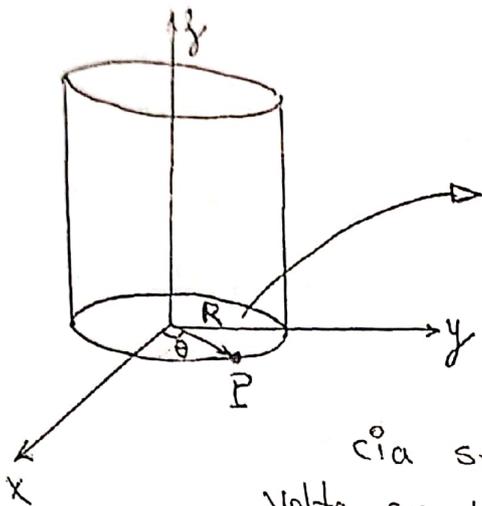
$$\begin{cases} x = u \\ z = v \\ y = \sqrt{a^2 - u^2} \\ v \geq 0 \end{cases}$$

ou escolhendo y e z :

$$\begin{cases} y = u \\ z = v \\ x = \sqrt{a^2 - u^2} \\ v \geq 0 \end{cases}$$

A parametrização mais usual para o cilindro, no entanto, não é nenhuma das anteriores. Dá-se preferência ao uso das coordenadas cilíndricas, pois elas facilitam os processos de integração.

Considere o cilindro da figura a seguir e um ponto P arbitrário que pertence ao cilindro.



$$\Rightarrow \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

Para que toda a circunferência seja determinada, θ deve dar uma volta completa, ou seja: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

A parametrização do cilindro em coordenadas cilíndricas fica:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \phi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$$

R é sempre constante, pois estamos parametrizando apenas a casca do cilindro. No exemplo $x^2 + y^2 = a^2$ com $z \geq 0$, a função

ϕ é dada, em coordenadas polares, por:

$$\phi(z, \theta) = (a \cdot \cos \theta, a \cdot \sin \theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } z \geq 0.$$

$$c) S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = y^2 + x^2, z \geq 0\}$$

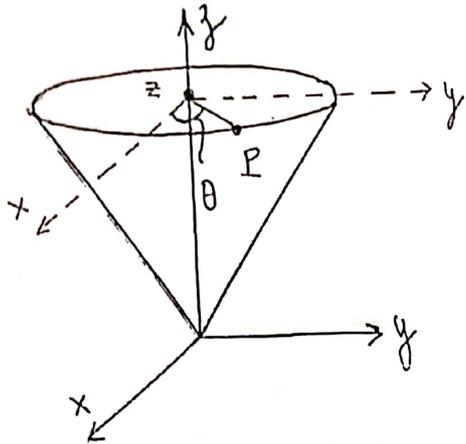
Não precisamos entender a superfície S para parametrizá-la do modo geral. Tomando $x = u$ e $y = v$,

temos:

$$z = \sqrt{u^2 + v^2} \Rightarrow \phi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

Analisando a superfície S , perceberemos que se trata de um cone, pois para cada valor de z a expressão $z^2 = x^2 + y^2$ representa uma circunferência de raio z .

Podemos parametrizar o cone também usando coordenadas cilíndricas:



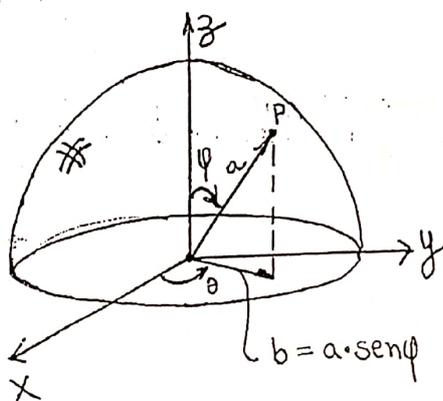
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

d) $S = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

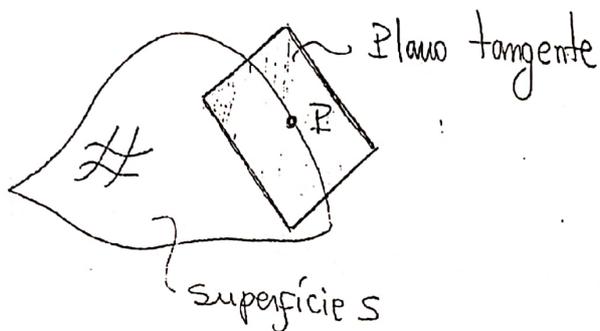
A superfície S é uma esfera, podemos parametrizá-la usando as coordenadas gerais (u, v) , ou podemos usar coordenadas esféricas:



$$\therefore \begin{cases} x = a \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = a \cos \varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

② Plano tangente

Considere uma superfície S em \mathbb{R}^3 e uma função $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que parametriza a superfície S . Eventualmente, a superfície S pode admitir um plano tangente em um dado ponto P (ver figura). Nosso objetivo neste tópico é encontrar a equação do plano tangente a S no ponto P .



Para escrever a equação do plano precisamos de dois vetores linearmente independentes que pertençam ao plano (vetores diretores) e de um ponto do plano. Os vetores dire-

tores são obtidos derivando-se a função $\phi(u,v)$ em relação a uma variável de cada vez:

$$\vec{X}_u = \frac{d\phi}{du} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right)$$

$$\vec{X}_v = \frac{d\phi}{dv} = \left(\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right)$$

Se $\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$ (linearmente independente), para um ponto $P = (u_0, v_0)$, podemos escrever a equação do plano tangente:

$$X = (u_0, v_0) + \lambda_1 \vec{X}_u + \lambda_2 \vec{X}_v, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2.1

Obtenha a equação do plano tangente ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$ para o ponto $(0, 1, 1)$.

1) Parametrização do cilindro:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$
$$\vec{X}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$
$$\vec{X}_z = (0, 0, 1)$$

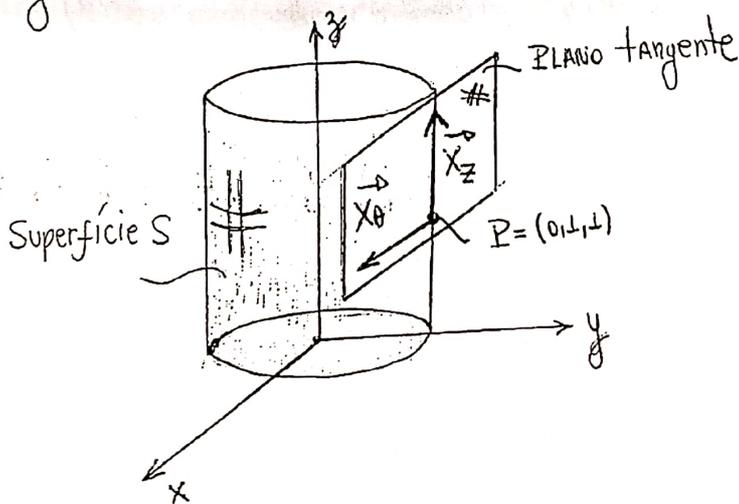
2) Para $(0, 1, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \Rightarrow \begin{cases} \theta = \pi/2 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\therefore \vec{X}_\theta(\pi/2, 1) = (-1, 0, 0)$$

$$\vec{X}_z(\pi/2, 1) = (0, 0, 1)$$

$$X = (0, 1, 1) + \lambda_1(-1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Observe a representação geométrica do plano tangente e dos vetores \vec{X}_θ e \vec{X}_z :



③ ÁREA DE SUPERFÍCIES

Para calcular a área de uma superfície, precisamos parametrizá-la com uma função $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e encontrar os vetores tangentes \vec{X}_u e \vec{X}_v .

A área da superfície S fica determinada pela seguinte integral:

$$\text{área}[S] = \iint_D \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \, du \, dv$$

Onde D é o domínio da função $\phi(u,v)$, ou seja:

$$\phi(u,v): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Exemplo 3.1

Calcular a área da esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1º) Parametrização: iremos usar coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = a \cos \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \phi(\varphi, \theta) = (a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi)$$

2º) Vetores tangentes:

$$\vec{X}_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -a \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\vec{X}_\theta = (-a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 0)$$

3º) Produto Vetorial:

$$\vec{x}_\varphi \wedge \vec{x}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \varphi \cos \theta & a \cos \varphi \sin \theta & -a \sin \varphi \\ -a \sin \varphi \sin \theta & a \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{x}_\varphi \wedge \vec{x}_\theta = \vec{i} (a^2 \sin^2 \varphi \cos \theta) - \vec{j} (-a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta) + \vec{k} (a^2 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_\varphi \wedge \vec{x}_\theta\| &= (a^4 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2} \\ &= (a^4 \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta))^{1/2} \\ &= a^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

4º) Área:

$$\begin{aligned} \text{Área [S]} &= \iint_{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} \|\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_\varphi\| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} -a^2 \cos \varphi \Big|_0^\pi d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2 d\theta = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

④ Massa de Superfícies

A massa M de uma superfície S , em \mathbb{R}^3 , com densidade $\delta(x, y, z)$, é dada por:

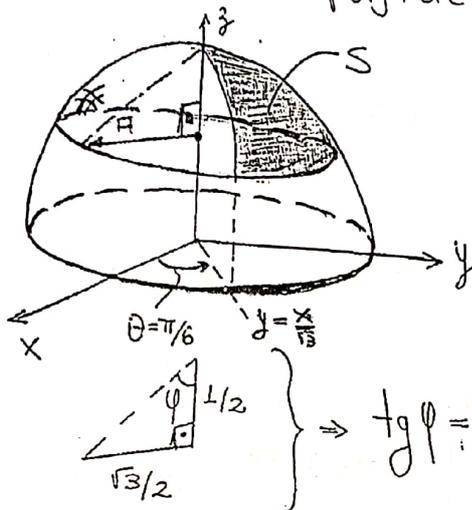
$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_{\mathcal{D}(u, v)} \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| du dv$$

①

Exemplo 4.1 (P32015)

Calcule a massa da superfície que é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $0 \leq x \leq \sqrt{3}y$ e $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ com densidade $\delta(x, y, z) = z^2$.

1º) Entender a superfície S.



$$A = ?$$

PARA $z = 1/2$ em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$x^2 + y^2 = 3/4 = A^2$$

$$\therefore A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{triângulo} \\ \text{com catetos } 1/2 \text{ e } \sqrt{3}/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \pi/3$$

2º) Parametrização: coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \\ r = 1 \\ \pi/6 < \theta < \pi/2 \\ 0 < \varphi < \pi/3 \end{cases} \rightarrow \phi(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

3º) Vetores tangentes:

$$\vec{x}_\varphi = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

$$\vec{x}_\theta = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\vec{x}_\varphi \wedge \vec{x}_\theta = a^2 \sin \varphi \quad (\text{Exemplo 3.1})$$

$$\therefore \vec{x}_\varphi \wedge \vec{x}_\theta = \sin \varphi \quad (a=1)$$

4º) Massa:

$$M = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{-\pi}{9} \cos^3\varphi \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{12}$$

Exemplo 4.2 (P32010)

Determine a massa da superfície $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ que satisfaz $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 2y$, com densidade $\rho(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{1/2}$

1) Parametrização:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = (3u^2 + 3v^2)^{1/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(u,v) = (u, v, (3u^2 + 3v^2)^{1/2}) \\ u^2 + v^2 \leq 2v \end{cases}$$

2) Vetores tangentes:

$$\vec{x}_u = \left(1, 0, \frac{3u}{A}\right) \quad \text{e} \quad \vec{x}_v = \left(0, 1, \frac{3v}{A}\right)$$

$$A = \sqrt{3u^2 + 3v^2}$$

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = \vec{j} \left(-\frac{3u}{A}\right) - \vec{i} \left(\frac{3v}{A}\right) + \vec{k} (1)$$

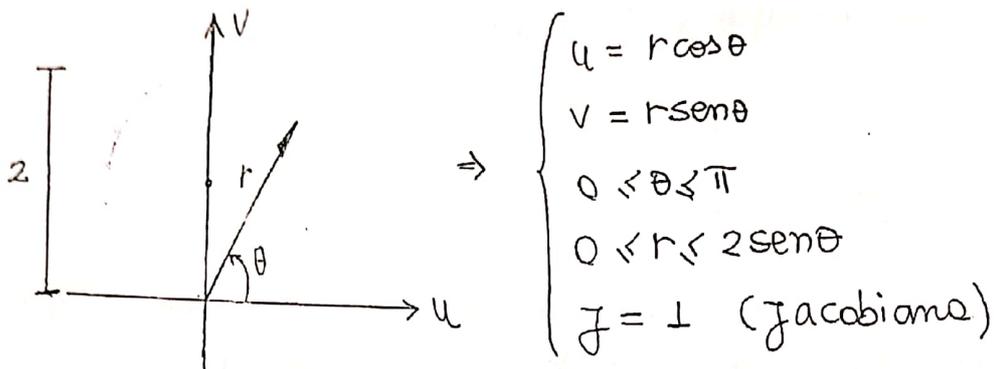
$$\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\| = \left[\frac{9u^2 + 9v^2 + A^2}{A^2} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{12u^2 + 12v^2}{3u^2 + 3v^2}} = 2$$

3) Massa:

$$M = \iint_{D(u,v)} 2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \, du \, dv \quad (*)$$

Para calcular (*), faremos mudança de variável.

$$u^2 + v^2 \leq 2v \Rightarrow u^2 + v^2 - 2v + 1 \leq 1 \Rightarrow u^2 + (v-1)^2 \leq 1$$



$$M = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r^2 \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left. \frac{2}{3} r^3 \right|_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{16}{3} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{16}{3} \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{64}{9}$$

⑤ Teorema de Stokes

5.1 Integral de Linha em \mathbb{R}^3

Sejam $\vec{F}(x,y,z)$ e $\gamma(x,y,z)$ um campo vetorial e uma curva, ambos de \mathbb{R}^3 . Para calcularmos a integral do campo sobre a curva, devemos parametrizar a curva. Sendo $\gamma(t)$ a curva parametrizada no intervalo $[t_0, t_f]$ e $\gamma'(t)$ o vetor tangente à curva $\gamma(t)$, podemos escrever:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

↑
PRODUTO ESCALAR

Exemplo 5.1.1

Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para $\vec{F}(x,y,z) = x^3 y^2 z \vec{k}$ e $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$ no intervalo $[0, 1]$.

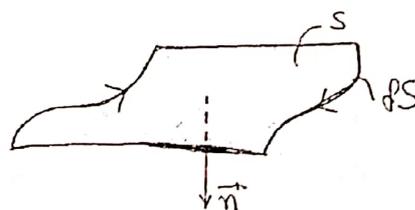
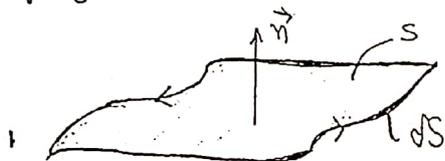
$$\gamma'(t) = (2, 2t, 2t)$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(2t, t^2, t^2) = (2t)^3 \cdot (t^2)^2 \cdot t^2 \vec{k} = 8t^9 \vec{k}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (0, 0, 8t^9) \cdot (2, 2t, 2t) dt = \frac{16t^{11}}{11} \Big|_0^1 = \frac{16}{11}$$

5.2 Orientação de Superfícies em \mathbb{R}^3

A superfície será orientada com base no vetor normal \vec{n} . Pela regra da mão direita, a fronteira da superfície S (bordo) tem seu sentido definido:



5.3 Rotacional de \vec{F}

Podemos escrever \vec{F} do seguinte modo:

$$\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

O rotacional do campo \vec{F} pode ser determinado pelo determinante:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

5.4 Teorema de Green

Teorema que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada no plano Oxy com a integral dupla sobre a região limitada por essa curva. Denotando por ∂D a curva e por D a região, podemos escrever:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k} \, dx \, dy$$

Onde $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

5.5 Teorema de Stokes

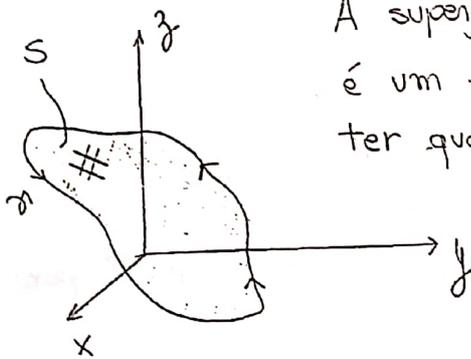
Teorema que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada em \mathbb{R}^3 com a integral dupla sobre a região limitada por essa curva. Note que o teorema de Stokes é a extensão do teore-

- ma de Green - para campos e curvas definidos em \mathbb{R}^3 ,
 ou seja: $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\partial \subset \mathbb{R}^3$.

A forma geral do teorema de Stokes é apresentada a seguir:

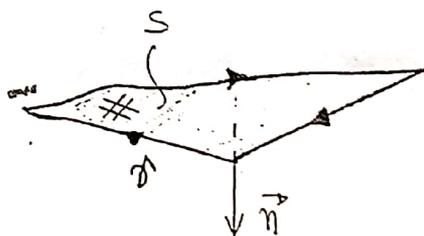
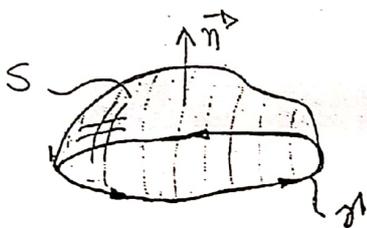
$$\int_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dx \, dy$$

Onde ∂ é a fronteira de uma superfície S arbitrária:



A superfície S representada é um plano, mas poderia ter qualquer outra forma.

Para aplicar o teorema de Stokes, a superfície S deve estar orientada de acordo com o sentido da curva ∂ :



▣ OBSERVAÇÕES:

1) Se a superfície S não estiver orientada de acordo com o sentido da curva ∂ , a expressão fica multiplicada por (-1) :

$$\int_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dx \, dy$$

2) O vetor normal \vec{n}^{Δ} é obtido por:

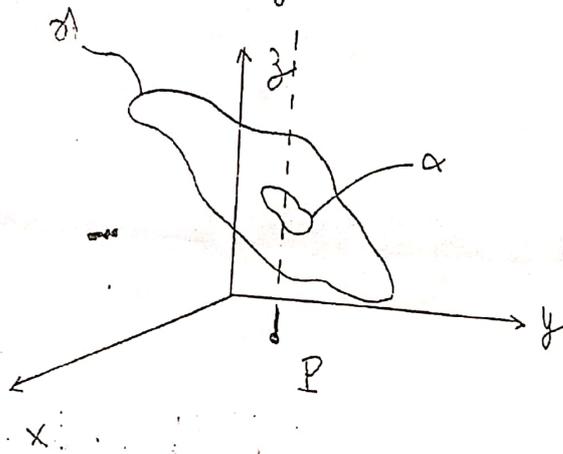
$$\vec{n}^{\Delta} = \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v$$

3) O campo \vec{F} deve estar definido para todos os pontos da superfície S .

Os pontos em que o campo não está definido devem ser isolados por curvas auxiliares, tal como fizíamos ao aplicar o teorema de Green em campos que apresentavam singularidades.

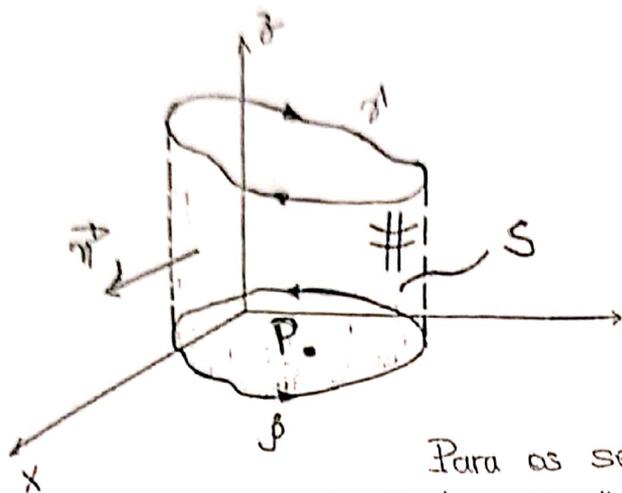
Para o teorema de Stokes, existem dois modos mais recorrentes para isolar os pontos nos quais o campo não está definido.

Considere a curva γ e o ponto P para o qual o campo \vec{F} não está definido:



1º Modo: Definimos uma curva α auxiliar aproximadamente no plano da curva γ para isolar a singularidade.

2º Modo: Definimos uma curva paralela ao plano Oxy e unimos com γ , determinando imediatamente a superfície S (Ver figura a seguir).



A curva β decorrente da projecção de α em Oxy é a mais natural para usarmos no 2º modo de isolar a singularidade. A superfície S é a indicada na figura.

Para os sentidos adotados na figura, pela regra da mão direita, o versor \vec{n} aponta para fora da superfície S , isto é, gostando-se do eixo z conforme mostra a figura.

Nas condições do exemplo, onde P pertence ao plano Oxy , o teorema de Stokes fica:

$$\int_{\alpha \cup \beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Exemplo 5.5.1 (P32014)

Calcule $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2} + yz, \frac{x}{2x^2+y^2} - xz, e^{z^2} + z^2 \right)$$

e α é a intersecção de $z = 5 - x^2 - 2y^2$ e $z = 3x^2 + 1$, orientada de modo que sua projecção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - 2y^2 \\ z = 3x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 5 - x^2 - 2y^2 = 3x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \quad (\text{Elipse})$$

Portanto, a projeção da interseção das superfícies é uma elipse em Oxy .

Como o campo é muito extenso, iremos dividi-lo em 2:

$$\vec{F}(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{-y}{2x^2+y^2}, \frac{x}{2x^2+y^2}, 0 \right)}_{\vec{F}_1} + \underbrace{\left(yz, -xz, e^{z^2} + z^2 \right)}_{\vec{F}_2}$$

▪ Rotacional:

$$\text{rot} \vec{F}_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} = 0 \vec{k} \quad (\text{CAMPO CONSERVATIVO})$$

$$\text{rot} \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & e^{z^2} + z^2 \end{vmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

▪ Teorema de Stokes.

Como o campo \vec{F}_2 não apresenta singularidades, seu domínio é \mathbb{R}^3 , iremos começar por ele.

Precisamos definir uma superfície S_2 que tenha como bordo a curva γ . Se tomarmos qualquer uma das duas superfícies no interior da elipse, definimos uma superfície S_2

que possui como bordo a curva γ

Portanto,

$$S_{2I} = \begin{cases} x^2 + y^2/2 \leq 1 \\ z = 3x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad S_{2II} = \begin{cases} x^2 + y^2/2 \leq 1 \\ z = 3 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Parametrizando S_{2I} :

Iremos usar coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \sqrt{2}$$

$$z = 3r^2 \cos^2 \theta + 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

Obs: NÃO há jacobiano, pois não estamos mudando de variável, estamos parametrizando diretamente com coordenadas polares.

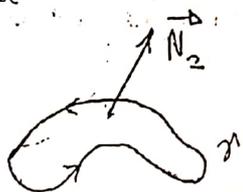
$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta \sqrt{2}, 3r^2 \cos^2 \theta + 1)$$

$$\vec{x}_r = (\cos \theta, \sin \theta \sqrt{2}, 6r \cos^2 \theta)$$

$$\vec{x}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta \sqrt{2}, -6r^2 \cos \theta \sin \theta)$$

$$\vec{x}_r \wedge \vec{x}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{R} \\ \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta & 6r \cos^2 \theta \\ -r \sin \theta & r \sqrt{2} \cos \theta & -6r^2 \sin \theta \cos \theta \end{vmatrix} = -6\sqrt{2} r^2 \cos \theta \vec{j} + \sqrt{2} r \vec{k}$$

$\vec{N}_2 = -6\sqrt{2} r^2 \cos \theta \vec{j} + \sqrt{2} r \vec{k}$ é um vetor que aponta para cima (no sentido do eixo $z > 0$), então a superfície S_2 está orientada de acordo com o sentido da curva γ :



A figura ao lado não representa o formato correto da curva γ , mas é útil para representar o sentido de percurso de γ a partir do sentido do vetor normal \vec{N}_2 .

Teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F}_2 \cdot \vec{N}_2 \, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos \theta, \sqrt{2} r \sin \theta, -6r^2 \cos^2 \theta - 2) \cdot (-6\sqrt{2} r^2 \cos \theta, 0, \sqrt{2} r) \, d\theta \, dr =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} -12\sqrt{2} r^3 \cos^3 \theta - 2\sqrt{2} r \, d\theta \, dr =$$

$$\stackrel{*}{=} - \int_0^1 \frac{12\sqrt{2} r^3}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} + 2\sqrt{2} r \theta \Big|_0^{2\pi} \, dr =$$

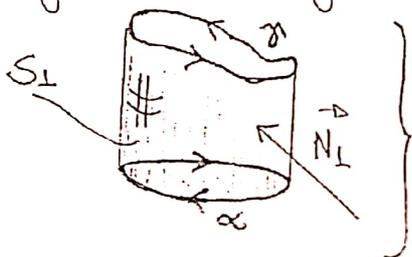
$$= - \int_0^1 6\sqrt{2} r^3 (2\pi) + 4\pi \sqrt{2} r \, dr = - \left[\frac{12\sqrt{2} \pi r^4}{4} + \frac{4\pi \sqrt{2} r^2}{2} \right] \Big|_0^1 =$$

$$= - [3\sqrt{2} \pi + 2\sqrt{2} \pi] = -5\sqrt{2} \pi$$

Para o campo \vec{F}_1 , podemos calcular $\int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$ de dois modos:

1º modo: usando a definição, parametrizando a curva γ com o parâmetro t e o campo com a curva, ou seja, $\vec{F}(\gamma(t))$.

2º modo: isolando a singularidade em $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$, e aplicando o teorema de Stokes na superfície S_1 , devidamente orientada. Neste segundo modo, podemos definir uma elipse no plano Oxy e definir a superfície S_1 conforme mostra a figura a seguir:



O sentido de percurso de γ , definido no enunciado, induz o percurso de α .

1º modo:

• Parametrização da curva γ (sentido anti-horário)

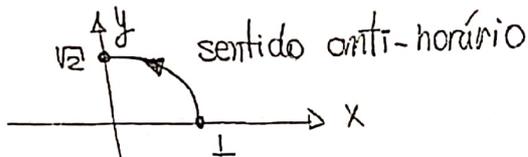
$$\gamma(t) = (\cos t, \sqrt{2} \sin t, 3 \cos^2 t + 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \sqrt{2} \cos t, -6 \cos t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Observe que γ está parametrizada no sentido anti-horário, para verificar basta tomarmos dois instantes:

$$\gamma(0) = (1, 0, 4)$$

$$\gamma(\pi/2) = (0, \sqrt{2}, 1)$$



$$\int_{\gamma} \vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{2} \sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}, 0 \right) \cdot (-\sin t, \sqrt{2} \cos t, -6 \cos t \sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} \sin^2 t}{2} + \frac{\sqrt{2} \cos^2 t}{2} dt$$

$$= \pi \sqrt{2}$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \pi \sqrt{2} - 5\pi \sqrt{2} = -4\pi \sqrt{2}$$

2º modo:

Vamos definir α no plano Oxy . A curva α pode ter formato arbitrário, vamos escolher aquele que facilita a parametrização do campo \vec{F}_{\perp} . Vamos definir α analisando o denominador do campo \vec{F}_{\perp} , de modo a simplificá-lo.

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2}, \frac{x}{2x^2+y^2}, 0 \right)$$

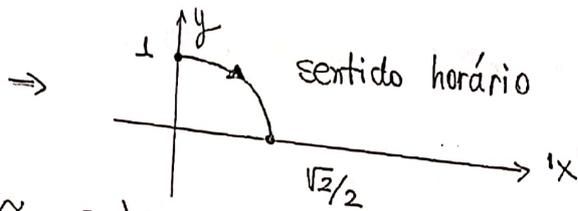
Tomando $\alpha(t) = \left(\frac{\text{sent}}{\sqrt{2}}, \text{cost}, 0 \right)$ o campo \vec{F}_1 fica parametrizado da seguinte modo:

$$\vec{F}_1(\alpha(t)) = \left(\frac{-\text{cost}}{1}, \frac{\text{sent}}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad \text{obs: } \alpha(t) \in [0, 2\pi]$$

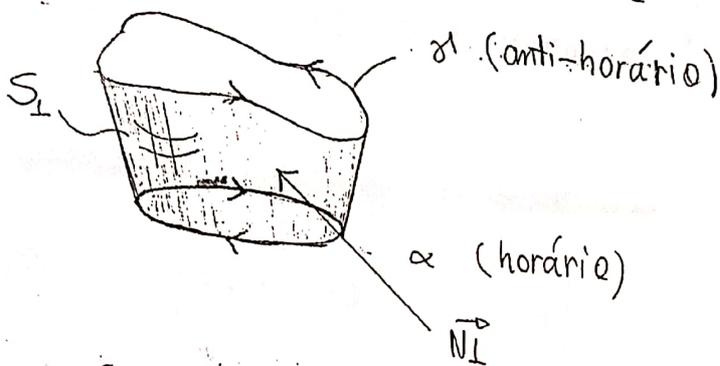
Note que a curva $\alpha(t)$ é percorrida no sentido horário:

$$\alpha(0) = (0, 1, 0)$$

$$\alpha(\pi/2) = (\sqrt{2}/2, 0, 0)$$



Deste modo, γ e α estão orientadas convenientemente. Podemos esboçar a situação:



A superfície S_1 é provavelmente difícil de ser parametrizada, mas neste caso isso não é problema, pois o rotacional do campo é nulo: $\text{rot} \vec{F}_1 = 0$.

Aplicando o teorema de Stokes:

$$\int_{\alpha \cup \gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} \text{rot} \vec{F}_1 \cdot \vec{N}_1 ds = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = - \int_{\alpha} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t, 0 \right)$$

$$\int_{\alpha} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 0 \right) \cdot \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t, 0 \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{\cos^2 t}{\sqrt{2}} - \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$= -\pi\sqrt{2} \quad \Rightarrow \int_{\alpha} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \pi\sqrt{2}$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \pi\sqrt{2} - 5\pi\sqrt{2}$$

$$= -4\pi\sqrt{2}$$

5.6 RESUMO PARA PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO TEOREMA DE STOKES.

1) Integral do tipo trabalho $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e γ é uma curva em \mathbb{R}^3 .

2) Se o campo for grande, você deve separá-lo em dois:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

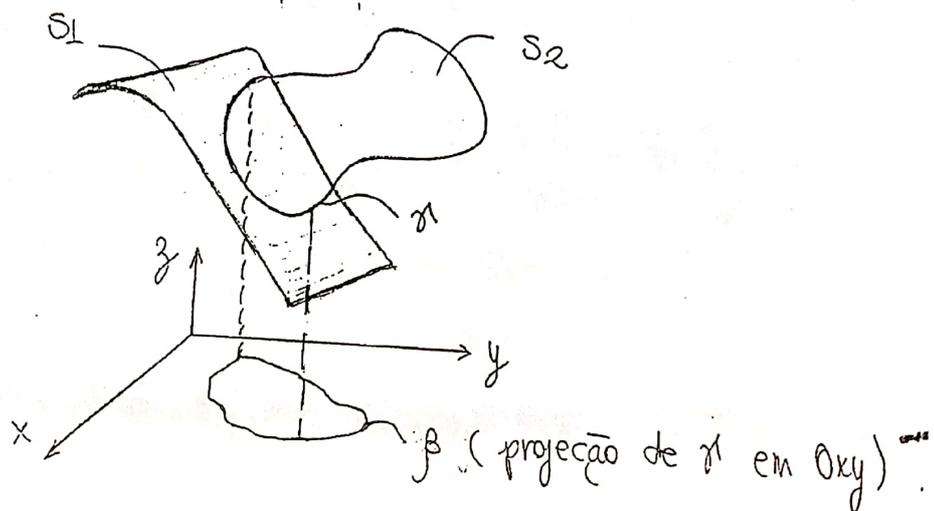
3) Geralmente, quando o campo \vec{F} é grande, um dos campos será o "dA", que é da seguinte forma:

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) \quad (*)$$

(*) Pode haver variações deste campo, mas ele costuma ter esse "jeitão".

4) Para aplicar o teorema de Stokes, precisamos definir uma superfície que tenha como bordo a curva γ .

4.1) Quando a curva γ é obtida a partir da interseção entre duas superfícies, você pode escolher qualquer uma das duas para usar no teorema de Stokes.



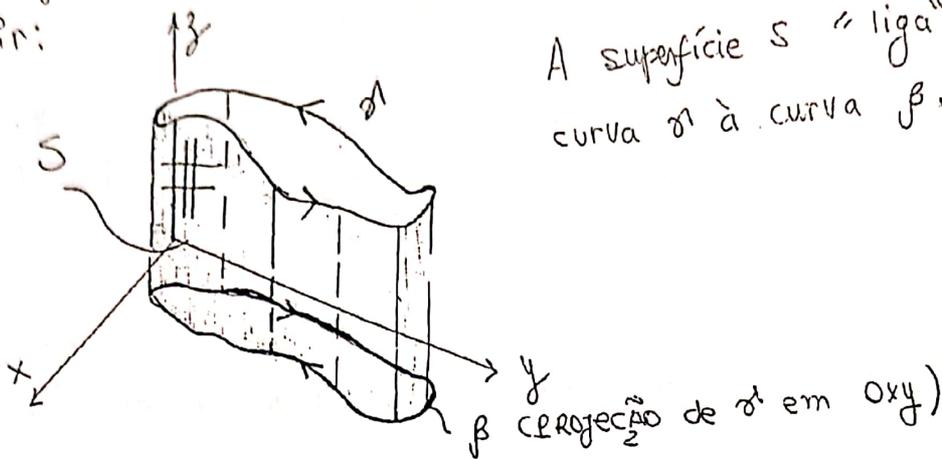
$$S: \begin{cases} S_1 \text{ ou } S_2 \\ \text{no interior de } \beta \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{isso foi feito na p\u00e1g. 21} \\ \text{no exemplo 5.5.1.} \end{array} \right]$$

4.2) As vezes a curva \u00e9 definida de forma anal\u00edtica, isto \u00e9, a curva j\u00e1 vem na forma parametrizada: $\gamma = \gamma(t)$

Por exemplo, $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t, t)$

Neste caso, \u00e9 mais f\u00e1cil definir uma curva

auxiliar, no plano Oxy , que seja a projeção de α em Oxy . A superfície S é indicada na figura a seguir:



5) Orientação da Superfície S .

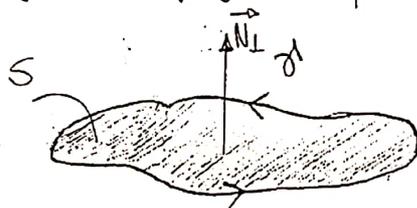
Para parametrizar S , definimos a função $\phi(u,v)$, da qual obtemos \vec{x}_u e \vec{x}_v . O vetor normal \vec{N} que orienta a superfície S é dado por:

$$\vec{N} = \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \quad \text{ou} \quad \vec{N} = \vec{x}_v \wedge \vec{x}_u.$$

Como $\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = -\vec{x}_v \wedge \vec{x}_u$, podemos simplesmente escrever:

$$\vec{N} = \pm \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v$$

S é a superfície que tem como bordo a curva γ :



Para escolher entre "+" e "-" em $\vec{N} = \pm \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v$, basta verificar para qual caso $\vec{N} = \vec{N}_1$ (Na prática, basta ver se aponta para cima ou para baixo).

6) Campos com singularidades

criamos uma superfície a partir da união de α com δ , onde α é uma curva qualquer em \mathbb{O}^3 . Geralmente, criamos circunferências e elipses para a curva α .



OBS: Sempre verifique se é conveniente usar o teorema de Stokes, às vezes vale a pena usar a própria definição.

⑥ Teorema de Gauss

Este teorema, também chamado de Teorema da Divergência, é um caso especial do Teorema de Stokes, que é mais geral. Ano após ano, uma questão da P3 é dedicada a ele e é por isso que eu escrevo estas palavras e rocô as lê.

Antes de chegarmos propriamente no Teorema de Gauss, devemos apresentar dois conceitos.

6.1. Integral do Fluxo de um campo vetorial

Quando temos uma superfície orientada S com vetor unitário normal $\vec{n} = \frac{\pm \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|}$, e um

campo vetorial \vec{F} , $\vec{F}: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então definimos o fluxo de \vec{F} através de S por meio da integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \equiv \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Vocês já devem ter visto integrais desse tipo, seja em Mec Flu (onde o campo vetorial \vec{F} poderia ser o campo de velocidades do escoamento de um fluido e, portanto, a

integral apresentada corresponderia ao fluxo do escoamento através de S) seja em Física III, ao estudar o fluxo de um campo elétrico \vec{E} ou de um campo magnético \vec{B} através de uma superfície.

Curiosamente, quando apresentamos as quatro Leis de Maxwell na forma integral, duas delas são dadas por integrais do tipo que foi apresentado.

Observação: supondo $\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|}$, então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\|} \right) dS = \iint_{D(u,v)} \vec{F} \cdot (\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v) \, du \, dv$$

onde $D(u,v)$ é o domínio de variação dos parâmetros u e v e S é uma superfície parametrizada regular orientável

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

orientada pelo campo de vetores normais \vec{n} .

Exemplos

(I) Determine o fluxo do campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ através da esfera } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Primeiramente, vamos parametrizar a superfície:

$$X: \begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \operatorname{coss}\varphi \end{cases}, \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{matrix}$$

Então

$$\vec{X}_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) =$$

$$= (-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, 0)$$

$$\vec{X}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{coss}\varphi)$$

E o produto vetorial $\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi$ fica

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & 0 \\ \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{coss}\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \vec{i} - \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \vec{j} - [\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \cos^2\theta] \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi = (-\operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta, -\operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi)$$

Logo, $\vec{n} = \frac{\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi}{\|\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi\|}$ é a normal que aponta para

dentro da esfera. Vejamos qual é o fluxo nesse sentido (de fora para dentro):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} \vec{F} \cdot [\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi] \, d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} \underbrace{(\operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)}_{\vec{F}(x(\theta, \varphi))} \cdot (-\operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta, -\operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi) \, d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{[-\operatorname{sen}^3\varphi \cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\varphi \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi]}_{-\operatorname{sen}^3\varphi} \, d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [-\operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos^2\varphi] \, d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi -\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot [\cos\varphi]_0^\pi = -4\pi$$

Portanto, temos um fluxo negativo de 4π . Ele é negativo porque ocorre no sentido oposto ao da normal escolhida, isto é, ocorre de dentro para fora.

(II) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = (x, y, z)$ e S

é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$; $0 \leq z \leq 2$. Adote a normal que aponta para o eixo z .

Parametrizando S com coordenadas cilíndricas

$$S: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 2 \end{matrix}$$

Calculando

$$\vec{X}_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\text{e } \vec{X}_z = (0, 0, 1):$$

Então

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

Essa normal aponta para o sentido positivo dos eixos (no 1º quadrante). Logo, a normal pedida é $\vec{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ e

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\cos\theta, \sin\theta, z) \cdot (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \, dz \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [-\cos^2\theta - \sin^2\theta] \, dz \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^2 dz \, d\theta = -4\pi$$

Observações:

- Se $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)$
então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

(apenas uma questão de notação)

- Vimos nos exemplos que, usualmente, o sólido S é uma quádrlica. Isso é matéria de Cálculo II e vale a pena lembrar.

▪ Elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

▪ Parabolóide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$$

* sinal negativo no eixo do parabolóide

▪ Parabolóide Hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$$

Como não é o escopo deste resumo, não farei os desenhos. Consultar pág. 747 do segundo volume do Stewart.

▪ Cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

* sinal negativo indica o eixo do cone

▪ Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

* um sinal negativo no eixo do hiperbolóide

▪ Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

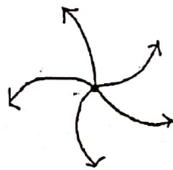
* dois sinais negativos. O eixo com coeficiente positivo é o eixo do hiperbolóide

6.2. Divergente

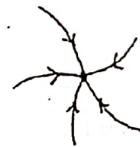
Lembrando que $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, calculamos o divergente de um campo vetorial \vec{F} num sistema cartesiano de coordenadas assim:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

O operador divergente mede a magnitude de uma fonte ou sorvedouro de um campo vetorial em um dado ponto. Note que, ao contrário do rotacional, o divergente é um escalar. Por exemplo:



As linhas de força do campo saem do ponto. Ele é o que chamamos de fonte. Aqui $\text{div} > 0$



Agora as linhas de força do campo convergem para o ponto. Ele é um sorvedouro e $\text{div} < 0$.

O divergente também será/foi visto em Física III e em Mecânica dos Fluidos, onde expressa a conservação de massa pela equação da continuidade.

Exemplos

Ⓘ Qual o divergente do campo $\vec{F} = \sin x \vec{i} + \ln x \vec{j} + 8y \vec{k}$?

Como $\vec{F} = (\sin x, \ln x, 8y)$, vemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\sin x, \ln x, 8y) = \\ &= \frac{\partial(\sin x)}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial(\ln x)}{\partial y}}_0 + \underbrace{\frac{\partial(8y)}{\partial z}}_0 = \cos x \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{F} = \cos x$$

Ⓜ Calcule o divergente do campo

$$\vec{F} = (x^2 + z) \vec{i} + y^3 x \vec{j} - (z^2 + x^2 + y^2) \vec{k}.$$

O campo é $\vec{F} = (x^2 + z, y^3 x, -x^2 - y^2 - z^2)$.

Fazendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, obtemos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x^2 + z)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3 x)}{\partial y} + \frac{\partial(-x^2 - y^2 - z^2)}{\partial z} =$$

$$= 2x + 3y^2 x - 2z$$

Agora, chegamos finalmente ao Teorema de Gauss, que relaciona o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície com o divergente desse campo.

6.3. Enunciado do Teorema

Tomando V uma região sólida simples cuja superfície fronteira seja S , S orientada com a normal \vec{n} apontando para fora. Se \vec{F} é um campo vetorial que possui componentes com derivadas parciais contínuas, então

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{F} \cdot dV}$$

ou, analogamente para $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,

$$\boxed{\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz}$$

Percebemos que o teorema relaciona o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície com o comportamento do campo dentro dela. Além disso, ele segue a mesma lógica de todos os teoremas da matéria e do TFC, dizendo que a integral de uma espécie de derivada (o divergente) numa região é igual a integral da fronteira dessa região numa dimensão uma unidade inferior.

Fisicamente, ele diz que o fluxo do campo pela superfície S , ou seja, a taxa na qual o campo

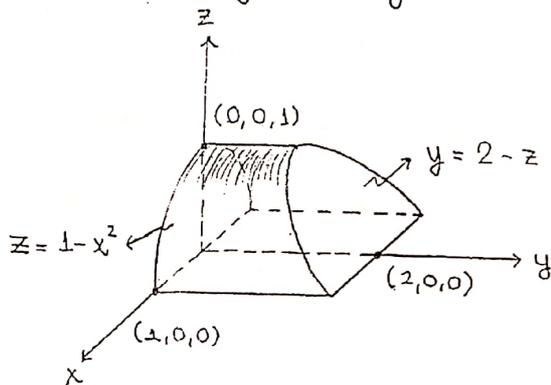
"sai" da região delimitada por S pode ser calculada somando as fontes e subtraindo os sorvedouros de campo no interior de S .

Na prática, vamos usar Gauss para calcular uma integral de superfície muito difícil. Muitas vezes, essa superfície não será fechada, de modo que teremos que fechá-la usando outras superfícies, surgindo mais de uma integral na fórmula apresentada anteriormente (S pode ser entendida como a reunião de superfícies que delimitam a fronteira de V). Além disso, assim como visto durante o estudo do Teorema de Stokes, podem existir (na prova: vão existir) singularidades. Elas deverão ser isoladas com uma superfície conveniente.

Exemplos

(I) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = (xy, y^z + e^{xz^2}, \text{sen } xy)$

e S é a superfície delimitada por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ e $y = 2 - z$.



Para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$,

teríamos que dividi-la em quatro integrais, uma para cada superfície. Vamos usar Gauss.

Calculando o divergente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 + e^{xz^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overset{0}{\operatorname{sen} xy})}{\partial z} = \\ &= y + 2y = 3y \end{aligned}$$

As quatro superfícies delimitam um volume V , região delimitada por $0 \leq z \leq 1 - x^2$, $0 \leq y \leq 2 - z$ e $-1 \leq x \leq 1$.

Então,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_V 3y \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dz \, dx = \\ &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-z} dz \, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} [2-z]^2 dz \, dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[-(2-1+x^2)^3 + (2-0)^3 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[8 - (1+x^2)^3 \right] dx = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left[8 - 1 - 3x^2 - 3x^4 - x^6 \right] dx = \\ &= \left[7x - x^3 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = 7 - 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \\ &= \frac{184}{35} \end{aligned}$$

II) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F} = (x^2y, xy^2, 5-4xyz)$ e

S é a superfície $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$, orientada pela normal \vec{n} com componente $z > 0$.

A superfície é uma semiesfera de raio 2 acima do plano xy . Vamos fechá-la com o plano $z = 0$, que denotaremos S_1 . Então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$\text{Como } \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial (5-4xyz)}{\partial z} =$$

$$= 2xy + 2xy - 4xy = 0, \text{ temos que}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Calculando a integral sobre S_1 (bem mais fácil!), notando que $\vec{n} = -\vec{k}$,

$$- \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{k} \, dS = \iint_{S_1} (5 - 4xyz) \, dS = \iint_{S_1} 5 \, dS =$$

\downarrow
 $z=0$
(condições para estarmos em S_1)

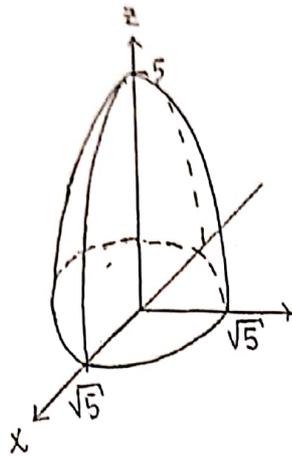
$$= 5 \cdot \text{Área}(S_1) = 5 \cdot \pi(2)^2 = 20\pi$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 20\pi$$

7. Exercícios de Prova

P3 - 2016

3ª Questão: (3,5) Sejam $\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{(4x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}} + (0, 0, z^3)$ e S parte do parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada com $\vec{N}(0, 0, 5) = \vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$.



- A interseção de S com o plano xy é um círculo de raio $\sqrt{5}$.
- Essa superfície não é fechada.
- O campo \vec{F} deve ser decomposto em $\vec{F}_1 = \frac{(x, y, z)}{(4x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ e $\vec{F}_2 = (0, 0, z^3)$

Para calcular a integral pedida, vamos decompor \vec{F} e calcular cada parcela separadamente.

■ \vec{F}_1

Este campo possui uma singularidade ^{o ponto (0,0,0)} em $(0, 0, 0)$. Logo, devemos fechar S e isolá-la.

Seja $S_1: z=0$. Então $S_1(u, v) = (u, v, 0)$ e

$$\vec{N}_{S_1} = -\vec{k}$$

Seja $S_2: 4x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z > 0$. Então

$$S_2(\theta, \varphi) = \left(\frac{r \sin \varphi \cos \theta}{2}, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \right), \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

$$\text{e } \vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi = r^2 \sin \varphi \left(\cos \theta \sin \varphi, \frac{\sin \theta \cdot \sin \varphi}{2}, \frac{\cos \varphi}{2} \right)$$

Como sabemos, $\text{div } \vec{F}_1 = 0$. Portanto,

$$\iint_S \vec{F}_1 \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} dS = 0$$

Fazendo a integral sobre S_1 :

$$\iint_{S_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{D(u,v)} \frac{(u, v, 0) \cdot (0, 0, -1)}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \, dS = 0$$

Agora, integrando sobre S_2 :

$$\iint_{S_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \operatorname{sen} \varphi}{r^3} \left(\frac{r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta}{2}, \frac{r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta}{2}, r \cos \varphi \right) \cdot \left(\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta}{2}, \frac{\cos \varphi}{2} \right) \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \text{após algumas manipulações} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{-\cos \varphi}{2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\therefore \iint_S \vec{F}_1 \cdot \vec{n} \, dS = \pi$$

■ \vec{F}_2

Este campo não possui singularidade. Precisamos apenas fechar S com $S_1: z=0$, de modo que, $S_1(u,v) = (u,v,0)$ e $\vec{n}_1 = -\vec{k}$.

Neste caso, $\operatorname{div} \vec{F}_2 = \frac{\partial (z^3)}{\partial z} = 3z^2$. Logo,

$$\iint_S \vec{F}_2 \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}_2 \, dV$$

Calculando,

$$\iint_{S_z} \vec{F}_2 \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_z} (0, 0, z^3) \cdot (0, 0, -1) \, dS = 0$$

$z=0$, pois estamos em $S_z: z=0$.

$$\iiint_V 3z^2 \, dV : \text{ o dom\u00ednio \u00e9 } 0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5 \geq x^2 + y^2$$

Mudando para cil\u00edndricas,

$$V: \begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r \leq \sqrt{5} \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z & 0 \leq z \leq 5 - r^2 \end{cases} ; J = r$$

\mathbb{R}

$$\iiint_V 3z^2 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{5-r^2} 3z^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} \left[z^3 \right]_0^{5-r^2} r \, dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} [125r - 75r^3 + 15r^5 -$$

$$- r^7] \, dr = 2\pi \left[\frac{125}{2} r^2 - \frac{75}{4} r^4 + \frac{15}{6} r^6 - \frac{r^8}{8} \right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{125 \cdot 5}{2} - \frac{75 \cdot 25}{4} + \frac{15 \cdot 125}{6} - \frac{625}{8} \right] = \frac{625\pi}{4}$$

$$\therefore \iint_S \vec{F}_2 \cdot \vec{n} \, dS = \frac{625\pi}{4}$$

Finalmente,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \pi + \frac{625\pi}{4} = \boxed{\frac{629\pi}{4}}$$

P3 - 2015

Questão 2 (3,5 pontos) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ sendo $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{12}, \frac{y^3}{48}, z \right)$ e S a parte da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, limitada pelos planos $z = 3$ e $z = -3$, orientada pela normal \vec{N} que se afasta do eixo z (exterior).

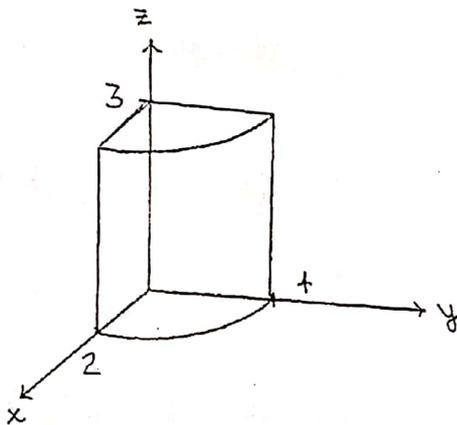
S não é fechada. Vamos fechá-la com $S_1: z = -3$ e $S_2: z = 3$. Então

$$\bullet S_1(u, v) = (u, v, -3), \quad \vec{n}_1 = -\vec{k} \quad \text{e}$$

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{16} \leq 1 \right\}$$

$$\bullet S_2(u, v) = (u, v, 3), \quad \vec{n}_2 = \vec{k} \quad \text{e}$$

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{16} \leq 1 \right\}$$



Às lado, a representação da parte do nosso sólido contida no primeiro octante.

Usando o Teorema de Gauss,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$$

Fazendo os cálculos

$$\bullet \operatorname{div} \vec{F} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + 1$$

Mudando para cilíndricas:
$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = 4r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $-3 \leq z \leq 3$ e $J = 8r$.

Logo,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-3}^3 (r^2 + 1) 8r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot 6 \cdot 8 \int_0^1 [r^3 + r] \, dr = 96\pi \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right] \Big|_0^1 = 72\pi$$

$$\bullet \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{D(u,v)} \left(\frac{u^2}{12}, \frac{v^2}{48}, -3 \right) \cdot (0, 0, -1) \, dS = 3 \iint_{D(u,v)} dS$$

$$= 3 \cdot \text{Área}(S_1) = 3\pi \cdot 4 \cdot 2 = 24\pi$$

$$\bullet \text{Analogamente para } S_2, \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 24\pi$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 72\pi - 24\pi - 24\pi = \boxed{24\pi}$$