(21/06/2019)

Resolução P3 - Cálculo III - 2019 (TIPO 5) - POR: GUSTAVO MURGIA

I Cilindro limitado pelos planos $z=-1$ e $z=1$ e por $\vec{N}(1,0,0)=\vec{i}$

$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^4\vec{k}$

- Primeiro parametrizaremos o cilindro (modo 1)

$x^2+y^2=4$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = 2\,\text{sen}\,\theta & -1 \leq z \leq 1 \\ z = z \end{cases}$$

- Agora, calcularemos a normal do cilindro:

$$\begin{array}{lccc} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{X_\theta} = & (-2\,\text{sen}\,\theta, & 2\cos\theta, & 0) \\ \vec{X_z} = & (\ 0\ , & 0\ , & 1) \end{array}$$

$\vec{X_\theta} \wedge \vec{X_z} = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0) = \vec{N}$

Percebemos que isso é o mesmo que $(x,y,0)=\vec{N}$, sendo (x,y,z) um ponto.

Ou seja, se a normal for calculada em $(x,y,0)=(1,0,0)$ ela deve ser $(1,0,0)$ também. $(*)$

mas... $x = 2\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 60°$

$y = 2\,\text{sen}\,\theta = 2\cdot\text{sen}\,60° = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq 0$

Isso acontece pois o ponto que foi pedido para se calcular a normal não pertence ao cilindro. Se, ao invés fosse $\vec{N}(2,0,0)$, estaria certo e seria a normal pedida.

Ignorando esse erro (a questão foi anulada), temos:

- $\vec{F}(\Gamma(\theta,z)) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z^4)$

Logo $\vec{F}\cdot\vec{N} = 2^2\cos^2\theta + 2^2\,\text{sen}^2\theta + z^5 = 4(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + z^5 = 4 + z^5$

Integrando: $\iint_S \vec{F}\vec{N}\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} [4+z^5]\,d\theta\,dz = 2\pi\left[4z + \frac{z^6}{6}\right]_{-1}^{1} = 2\pi\left[4+\frac{1}{6} - (-4+\frac{1}{6})\right] =$

$= 2\pi[8] = \boxed{16\pi}$

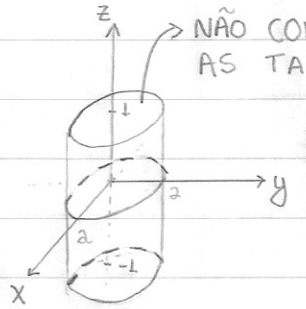
- De outro modo, podemos também resolver pelo teorema de gauss (modo 2)

→ Primeiro, calculamos o divergente:

$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^4)}{\partial z} = 1 + 1 + 4z^3$

• Como $\operatorname{div}\vec{F} = 2+4z^3$ não é muito complicado, o teorema de gauss pode ser uma boa ideia.

> Antes, observamos que a superfície não é fechada.



Por conta disso, precisamos fechá-la. Utilizaremos uma tampa superior (T_1) em $z=1$ e uma inferior (T_2) em $z=-1$.

Teremos então: $\iint_{T_1} \vec{F}\vec{N_1}d\sigma + \iint_{T_2} \vec{F}\vec{N_2}d\sigma + \iint_S \vec{F}\vec{N}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV$

Ou seja: $\iint_S \vec{F}\vec{N}\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV - \iint_{T_1} \vec{F}\vec{N_1}\,d\sigma - \iint_{T_2} \vec{F}\vec{N_2}\,d\sigma$

Observamos que a normal pedida é a exterior, o que valida a igualdade acima (caso contrário, seria só colocar um "−" na frente da integral $\iint_S \vec{F}\vec{N}d\sigma$).

Assim:

$$\iiint_V (2+4z^3)\,dV = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & |J\varphi| = r \\ y = r\,\text{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z & 0 \le r \le 2 \\ & -1 \le z \le 1 \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^1 [2r + 4rz^3]\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[2rz + \frac{4}{4}rz^4\right]_{-1}^1 dr = 2\pi \int_0^2 (2r + r - (-2r + r))\,dr = 2\pi \int_0^2 4r\,dr$$

$$= 8\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 8\pi(2-0) = 16\pi$$

Para satisfazer a lei de gauss, a normal na tampa superior (T_1) é exterior, ou seja, para cima. Visualiza-se facilmente que $\vec{K}$ é uma opção. (cuidado, pois ao escolher $\vec{N_1} = \vec{K}$, só é possível parametrizar se isso for verdade)

Observe, então, que $\vec{F}\cdot\vec{K} = z^4$

Logo: $$\iint_{T_1} z^4\,d\sigma_1 = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & |J\varphi| = r \\ y = r\,\text{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = 1 & 0 \le r \le 2 \end{array} \right| = \int_0^2\int_0^{2\pi} r \cdot 1^4\,d\theta\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi$$

Para T_2, por sua vez, vemos que $\vec{N_2} = -\vec{K}$ é uma possibilidade

$\vec{F}(-\vec{K}) = -z^4$.

logo $\iint_{T_2} -z^4 \, d\sigma_2 = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} |J\varphi| = r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{array} \right| = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} r = -4\pi$

Por fim, $\iint_S \vec{F}\vec{N}\, d\sigma = 16 - 4\pi - (-4\pi) = \boxed{16\pi}$

$\boxed{2}$ Para o campo $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(\sqrt[2]{x^2+y^2+z^2})^3} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, temos:

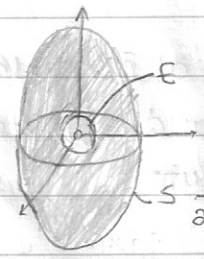
(I) Para S um elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, temos $\iint_S \vec{F}\vec{N}\, d\sigma$.

Mas, observe que há no campo uma singularidade em (0,0,0). Como consequência, podemos aplicar o teorema de Gauss usando uma esfera para isolar a singularidade.

V: volume hachurado

normal da esfera é interna ao volume

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F}\vec{N}\, dS + \iint_\epsilon \vec{F}\vec{N_\epsilon}\, dS_\epsilon$$



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot x}{[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$ (os outros são análogos)

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 0$$ → isso é um resultado notável

logo: $\iint_S \vec{F}\vec{N}\, dS = -\iint_\epsilon \vec{F}\cdot\vec{N_\epsilon}\, dS_\epsilon$

Para um raio ρ constante | $\rho < a, b, c$

Sabemos que uma normal possível para a esfera é $\frac{1}{\rho}(x,y,z)$.

Para ela ser externa ao volume, $\vec{N_\epsilon} = \frac{-1}{\rho}(x,y,z)$. logo:

$$\vec{F}\vec{N_\epsilon} = \frac{-(x^2+y^2+z^2)}{\rho(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\rho(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

$$\iint_\epsilon \frac{-1}{\rho(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\, dS_\epsilon = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \\ |J\varphi| = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{-\rho^2\,\text{sen}\,\varphi}{\rho^2}\, d\varphi\, d\theta = -4\pi$$

Logo $\iint_S \vec{F}\vec{N}\,dS = -(-4\pi) = 4\pi \neq 4\pi abc$

$\boxed{\text{A afirmação I é falsa}}$

(II) Já para a esfera $x^2+y^2+(z-2)^2=1$, não há uma singularidade dentro. Logo:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iint_S \vec{F}\vec{N}\,dS$$

Como $\operatorname{div}\vec{F}=0$ (ver no item I), temos:

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}\,dS = 0$$

$\boxed{\text{II é Verdadeira}}$

(III) Para esse cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, há a singularidade na origem. Podemos fazer um argumento igual ao item I utilizando uma esfera. Chega-se que $\iint_S \vec{F}\vec{N}\,dS = 4\pi$

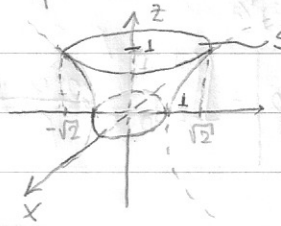
$\boxed{\text{III é Verdadeira}}$

$\boxed{3}$ Hiperbolóide $1+z^2=x^2+y^2$ $\quad 0\leq z\leq 1$ $\quad \vec{N}\cdot\vec{K}\geq 0$

$$\iint_S \cos(z^2)\,dy\wedge dz + \operatorname{sen}(x^3)\,dz\wedge dx + e^{(x^2+y^2)}\,dx\wedge dy$$

· Primeiramente, observe que $\vec{F}(x,y,z) = (\cos(z^2), \operatorname{sen}(x^3), e^{(x^2+y^2)})$.
Verifica-se que $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial\cos(z^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\operatorname{sen}(x^3))}{\partial y} + \dfrac{\partial(e^{(x^2+y^2)})}{\partial z} = 0$.

· Por outro lado, o hiperbolóide em questão não é uma superfície fechada para aplicar o teorema de Gauss.



S: parte do hiperbolóide com $0\leq z\leq 1$ (SEM AS TAMPAS)

Observe também que para $\vec{N}\vec{K}\geq 0$, $\vec{N}$ não é exterior.

Como consequência devemos fechá-lo com uma tampa T_1 em $z=1$ e outra T_2 em $z=0$.

- T_1: $1+1^2 = x^2+y^2 = 2$ $\Rightarrow$ circunferência de raio 2 é o bordo

Normal externa: $\vec{K} = \vec{N_1}$

Logo $\vec{F}\vec{N_1} = \vec{F}\vec{K} = e^{(x^2+y^2)}$

$$\iint_{T_1} e^{(x^2+y^2)}\, ds_1 = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & |J\varphi| = r \\ y = r\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 1 & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2} r\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2} r\, dr = \left| \begin{array}{l} j = r^2 \\ dj = 2r\,dr \\ r = \sqrt{2} \Rightarrow j = 2 \\ r = 0 \Rightarrow j = 0 \end{array} \right| = \pi \int_0^2 e^j\, dj = \pi \left[e^j \right]_0^2 = \pi \left[e^2 - e^0 \right] = \pi \left[e^2 - 1 \right]$$

- T_2: $1+0 = x^2+y^2 = 1$ $\Rightarrow$ circunferência de raio 1 é o bordo

Normal exterior: $\vec{N_2} = -\vec{K}$

Logo $\vec{F}\vec{N_2} = -e^{(x^2+y^2)}$

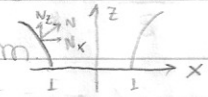
$$\iint_{T_2} -e^{(x^2+y^2)}\, ds_2 = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & |J\varphi| = r \\ y = r\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 0 & 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right| = -\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{r^2} r\, dr\, d\theta =$$

$$= -2\pi \int_0^1 e^{r^2} r\, dr = \left| \begin{array}{l} j = r^2 \\ dj = 2r\,dr \\ r = 1 \Rightarrow j = 1 \\ r = 0 \Rightarrow j = 0 \end{array} \right| = -\pi \int_0^1 e^j\, dj = \pi \left[e^j \right]_0^1 = -\pi \left[e - 1 \right]$$

- Finalmente, por gauss

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{F}\, dV = 0 = \iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds + \overbrace{\iint_{T_1} \vec{F}\vec{N_1}\, ds_1}^{\pi[e^2-1]} + \overbrace{\iint_{T_2} \vec{F}\vec{N_2}\, ds_2}^{-\pi[e-1]}$$

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds = \pi\left[e-1\right] - \pi\left[e^2-1\right] = \pi\left[-e^2+e\right] = -\pi\left[e^2-e\right]$$

Mas, como $\vec{N}$ conforme o enunciado não é exterior (algo que pode ser observado pois em  N_z está no sentido K quando $\vec{N}$ é interior - que é válido só para $z \geq 0$).

Temos: $\boxed{\iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds = \pi\left[e^2-e\right]}$

$\boxed{4}$ S: parte de $x^2+y^2+z^2=1$ com $z \geq 0$

$\vec{N}(0,0,1) = \vec{k}$

$$\iint_S e^{y^2} dy \wedge dz + \cos(z^9+7)\, dz \wedge dx + (z+1)\, dx \wedge dy$$

- Primeiramente, observa-se que $\operatorname{div}\vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$
- Pela simplicidade do divergente, utilizaremos a lei de gauss

Para podermos aplicá-la, devemos fechar a superfície.

Utilizaremos então uma tampa inferior em T_1 com $z=0$.

O bordo dessa tampa será $x^2+y^2+0^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

A normal exterior dela é $-\vec{k}$.

Logo: $\vec{F}(-\vec{k}) = -(z+1) = \vec{F} \cdot \vec{N}_{T_1}$

$$\iint_{T_1} -(z+1)\, ds_1 = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\theta & |J\varphi| = r \\ y = r\operatorname{sen}\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 0 & 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -(0+1)\cdot r\, dr\, d\theta =$$

$$= -2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = -\pi$$

- Além disso

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_V dV \rightarrow \text{como é meia esfera, temos:}$$

$$\iiint_V dV = \frac{1}{2}\text{volume} = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\cdot 1^3 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

- Finalmente $\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iint_{T_1} \vec{F}\vec{N}_1\, ds_1 + \iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds$

$$\frac{2\pi}{3} = -\pi + \iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\vec{N}\, ds = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi+3\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}}$$

$\boxed{5}$ S: $x^2+y^2+z^2=1$ de densidade $\delta(x,y,z) = x^2$

Pede-se a massa

Primeiro parametrizaremos a esfera

$$\begin{cases} x = 1\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = 1\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

Agora, devemos achar $\|X_\theta \wedge X_\varphi\|$

$$\vec{X_\theta} = (\underset{\vec{i}}{-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}, \underset{\vec{j}}{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi}, \underset{\vec{k}}{0})$$

$$\vec{X_\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\vec{X_\theta} \wedge \vec{X_\varphi} = (-\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\cos^2\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$= (-\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi, -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$\|\vec{X_\theta} \wedge \vec{X_\varphi}\| = \sqrt{\cos^2\theta \operatorname{sen}^4\varphi + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^4\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{sen}^4\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi} = \operatorname{sen}\varphi\sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi} = \operatorname{sen}\varphi$$

Logo, a massa é $M = \iint_S \delta(x,y,z)\|\vec{X_\theta} \wedge \vec{X_\varphi}\| ds = \iint_S (\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, ds$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta\,(1-\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi]\, d\theta\, d\varphi = (**)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{2} + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\, d\theta = \left| \begin{array}{l} j = 2\theta \\ dj = 2d\theta \end{array} \right| = (*)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \\ \cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2} \end{array}}$$

resultado notável

$$(*) = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos j\, dj = \pi + \frac{1}{2}[\operatorname{sen} j]_0^{2\pi} = \pi + 0 = \pi$$

$$(**) = \pi\int_0^\pi [\operatorname{sen}\varphi - \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi]\, d\varphi = \pi[-\cos\varphi]_0^\pi - \pi\int_0^\pi \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos\varphi = v \\ dv = \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \\ \varphi = \pi \Rightarrow v = -1 \\ \varphi = 0 \Rightarrow v = 1 \end{array} \right| = \pi[-(-1) - (-(1))] + \pi\int_1^{-1} v^2\, dv = 2\pi - \pi\int_{-1}^{1} v^2\, dv =$$

$$= 2\pi - \pi\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\pi - \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{-1}{3}\right] = 2\pi - \pi\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{6\pi - 2\pi}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

$\boxed{6}$ S parte de $z = 9 - x^2 - y^2$, $0 \le z \le 5$ com $\vec{N}\cdot\vec{K} \ge 0$

$\vec{F}(x,y,z) = (0, Q(x,y,z), 0)$ definido no domínio de S

(I) $\iint_S \vec{F}\vec{N}\, d\sigma = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} \operatorname{div}\vec{F}\, dz\, dy\, dx$

Primeiramente, verifica-se que o teorema de Gauss é válido se a superfície for fechada. Cria-se então duas tampas - uma superior e outra inferior. Para a inferior escolhe-se um círculo de borda $0 = 9 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$. A normal externa é $-\vec{K}$

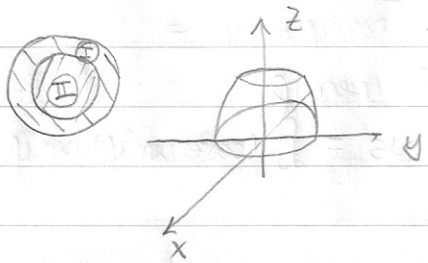
Como a normal externa é $-\vec{k}$, temos:

$$\vec{F}\vec{N}_{T_1} = Q(x,y,z)\vec{j}\cdot(-\vec{k}) = 0$$

O mesmo pode ser feito para a superior.

Ou seja: $\iint_S \vec{F}\vec{N}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV$

O volume está definido com um domínio dividido em dois pedaços:



Pedaço I	Pedaço II
$2 \leq \lvert x \rvert \leq 3$	$-2 \leq x \leq 2$
$\sqrt{4-x^2} \leq \lvert y \rvert \leq \sqrt{9-x^2}$	$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$
$0 \leq z \leq 9-x^2-y^2$	$0 \leq z \leq 5$

Observa-se que a integral descrita não está definida nesse domínio, ela considera apenas $z \geq 0$

$\boxed{\text{I : Falsa}}$

(II) $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{F})\vec{N}\,d\sigma = 3\int_0^{2\pi} Q(3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0)\cos t\,dt$?

$\vec{N}$ é a normal externa, logo:

Por teorema de Stokes, sabemos que:

$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{F})\vec{N}\,d\sigma = \int_{\partial S} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\partial S} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$ (γ uma parametrização)

$\gamma(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0)$ é uma parametrização válida para o círculo de raio 3 com $z=0$. $0 \leq t \leq 2\pi$. Anti-horário: $\tilde{\gamma}(t) = -\gamma(t)$

$\tilde{\gamma}'(t) = -(-3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0)$

Logo, $\vec{F}(\tilde{\gamma}(t)) = (0, Q(-3\cos t, -3\operatorname{sen} t, 0), 0)$

$\vec{F}(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}'(t) = Q(-3\cos t, -3\operatorname{sen} t, 0)\cdot 3\cos t\,dt$

Porém, faltou a parte de cima da superfície!! (erro 1).

Além disso, o sentido na alternativa está errado (erro 2). $\boxed{\text{II: Falso}}$

(III) $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{F})\vec{N}\,d\sigma = 3\int_0^{2\pi} Q(3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0)\cos t\,dt +$
$+ 2\int_0^{2\pi} Q(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 5)\cos t\,dt$

Da mesma forma que no item anterior, o sentido da curva inferior está errado! $\boxed{\text{III: Falsa}}$

$\boxed{7}$ $\vec{F}$ de classe C^1 em $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

(I) $\text{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow F$ é conservativo?

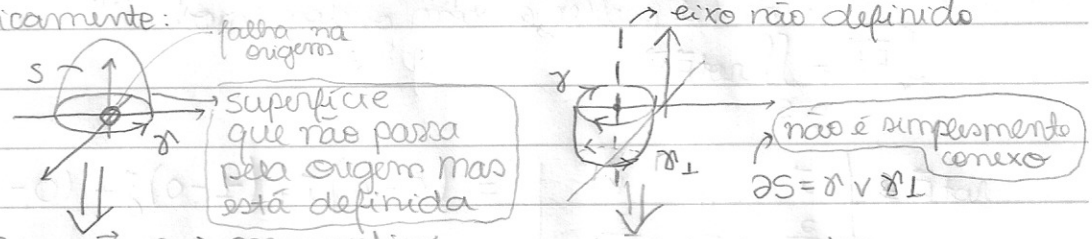
Ao trabalhar no $\mathbb{R}^3$, uma falha de domínio de $\vec{F}$ não significa que ele deixe de ser simplesmente conexo

Pelo teorema de Stokes:

$$0 = \oint_{\partial S = \gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$$, para ser conservativo

Ou seja, γ deve ser exatamente o bordo de S (sem curvas auxiliares), de forma que ele se mantenha definido para ser simplesmente conexo.

Graficamente:



$\Downarrow$ Se $\text{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow$ conservativo

$\Downarrow$ não conservativo

$\hookrightarrow$ Afirmação $\boxed{\text{I é verdadeira}}$

(II) $\vec{F}$ é gradiente $\Rightarrow \vec{F}$ é conservativo $\Rightarrow \text{rot}\vec{F} = 0$

$\text{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{F} = 0$? Contra-exemplo:

Veja $\vec{F} = (x, 0, 0)$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - 0\right)\vec{j} + \left(0 - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$\boxed{\text{II: Falsa}}$

(III) $\text{div}\vec{F} = 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{F} = 0$? Contra-exemplo:

Veja $\vec{F} = (y, 0, 0)$

$$\text{rot}\vec{F} = (0-0)\vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - 0\right)\vec{j} + \left(0 - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\vec{k} = -\vec{k}$$

$$\text{div}\vec{F} = 0$$

$\boxed{\text{III: Falsa}}$

$\boxed{8}$ γ dada pela intersecção de $x+y-z+10=0$ com $x^2+y^2=4$

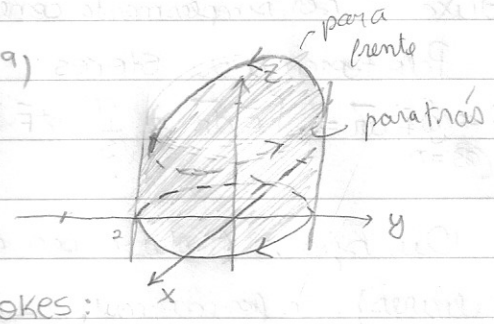
Projeção no plano xy percorrida uma vez no sentido anti-horário.

$\vec{F}(x,y,z) = (\tan(x^4), 9\cos(y^2+17), x+z^9)$

$1x + 1y - 1z + 10$

$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = ?$ normal $= (1,1,-1)$

certa $= (-1,-1,1)$



Podemos usar o teorema de Stokes:

não há problemas com o domínio!

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F}\vec{N}$$

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tan(x^4) & 9\cos(y^2+17) & x+z^9 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$$

Logo, $\text{rot}\vec{F} = -\vec{j}$

Agora, vamos achar a superfície de borda γ:

Parametrizando, temos:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 10 + \rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Achando a normal parametrizada:

$$\vec{X_\theta} = (\overset{\vec{i}}{-\rho\,\text{sen}\,\theta}, \overset{\vec{j}}{\rho\cos\theta}, \overset{\vec{k}}{-\rho\,\text{sen}\,\theta + \rho\cos\theta})$$

$$\vec{X_\rho} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, \cos\theta + \text{sen}\,\theta)$$

$$\vec{X_\theta} \wedge \vec{X_\rho} = (\rho\cos^2\theta + \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \rho\,\text{sen}^2\theta - \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta, -\rho\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \rho\cos^2\theta + \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \rho\,\text{sen}^2\theta, -\rho\cos^2\theta - \rho\,\text{sen}^2\theta)$$

$= (\rho, \rho, -\rho) \rightarrow$ sentido errado:

Normal no sentido correto: $(-\rho, -\rho, \rho)$

Assim, temos $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r} = \iint_S -\rho\, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} +\rho\, d\theta\, d\rho = +2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = +2\pi \cdot 2$

$= \boxed{4\pi}$

$\boxed{9}$ $S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow$ superfície fechada regular por partes

$\hat{N}$ exterior $\qquad R \rightarrow$ região limitada por S

$\vec{F}$ definido em um conjunto que contém S e R

(I) $\frac{1}{3}\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy = \text{Volume?}$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

Pelo teorema de gauss:

$$\frac{1}{3}\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy = \frac{1}{3}\iiint_R 3\,dR = \iiint_R dR = \text{Volume}$$

$\boxed{\text{I é verdadeira}}$

(II)

$$\iint_S \operatorname{Rot}\vec{F}\vec{N}\,d\sigma = 0\ ?$$

Como a superfície é fechada $\partial S = \emptyset$.

Por teorema de Stokes:

$$\iint_S \operatorname{Rot}\vec{F}\vec{N}\,d\sigma = \int_{\partial S = \emptyset} \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \qquad \boxed{\text{II é verdadeiro}}$$

(III) $\vec{F}$ é gradiente $\Rightarrow \iint_S \vec{F}\vec{N}\,d\sigma = 0$?

$\vec{F}$ é gradiente $\Leftrightarrow \vec{F}$ é conservativo $\Leftrightarrow \oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{Rot}\vec{F} = 0$

Pelo teorema de stokes

$$\oint_{\partial S'} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{S'} \operatorname{Rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,d\sigma = 0 \text{ independente da superfície}$$

Analizemos um campo conservativo com $\operatorname{Rot}\vec{F} = 0$ e definido em todo o espaço: $\vec{F} = (x, 0, 0)$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1$$

Logo $\iint_S \vec{F}\vec{N} = \iiint_V 1\,dV = \text{Volume} \neq 0$

$\boxed{\text{III é Falsa}}$

$\boxed{10}$ S: parte da superfície $y = 1 - x^2$ limitada por $y \geq 0$ e $x \geq 0$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 8$

$$\iint_S x \, d\sigma = ?$$

Primeiro, parametrizaremos a superfície:

$$\begin{cases} x = u & u \geq 0 \\ y = 1 - u^2 & y = 1 - u^2 \geq 0 \iff 1 \geq u^2 \iff \cancel{-1} \leq u \leq 1 \\ z = v & 0 \leq v \leq 8 \end{cases}$$

Calculamos, então, a normal:

$$X_u = (\overset{\vec{i}}{1}, \overset{\vec{j}}{-2u}, \overset{\vec{k}}{0})$$

$$X_v = (0, 0, 1)$$

$$\vec{X_u} \wedge \vec{X_v} = (-2u, -1, 0)$$

$$\|\vec{X_u} \wedge \vec{X_v}\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

$$\iint_S x \, d\sigma = \int_0^8 \int_0^1 u \sqrt{4u^2+1} \, du \, dv = \int_0^1 8u \sqrt{4u^2+1} \, du = \left| \begin{array}{l} j = 4u^2 + 1 \\ dj = 8u \, du \\ u = 1 \Rightarrow j = 5 \\ u = 0 \Rightarrow j = 1 \end{array} \right| =$$

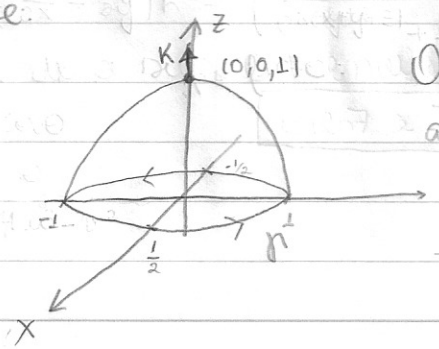
$$= \int_1^5 (j)^{1/2} \, dj = \left[\frac{2}{3} j^{3/2}\right]_1^5 = \frac{2 \cdot 5\sqrt{5}}{3} - \frac{2 \cdot 1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1)}$$

$\boxed{11}$ S: parte da superfície $z = 1 - 4x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$ e orientada por $\vec{N}$ t.q. $\vec{N}(0,0,1) = \vec{k}$

$\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, \arctan(e^{x+y+z}))$

$\iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{N} \, d\sigma = ?$

A partir dos dados do enunciado, temos que a figura é a seguinte:



Observe que em $(0,0,1)$ queremos a normal para cima, que induz uma rotação no anti-horário no bordo.

Para resolver de forma mais fácil a questão, podemos:

- Usar a superfície no plano $z=0$ de bordo γ
- Usar, por Stokes, que $\iint_S \text{Rot}\vec{F}\vec{N}\, d\sigma = \int_{\gamma=\partial S} \vec{F}\, d\vec{r}$

Aparentemente, a segunda opção facilita a resolução pois $z=0$, o que provavelmente vai tirar o $\arctan(e^{x+y+z})$ da conta.

Parametrizando... (no sentido anti-horário)

$$\gamma(t) = \left(\frac{\text{sen}\, t}{2}, \cos t, 0\right)$$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{-\cos t}{2}, \text{sen}\, t, 0\right)$$

$$\int_\gamma \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-\cos t, \frac{\text{sen}\, t}{2}, \arctan\left(e^{\frac{\text{sen}\, t}{2} + \cos t}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\cos t}{2}, \text{sen}\, t, 0\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\text{sen}^2 t}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dt = \boxed{\pi}$$

$\boxed{12}$ Parabolóide $z = x^2 + y^2$ (parabolóide) limitado por $z = 2y + 8$

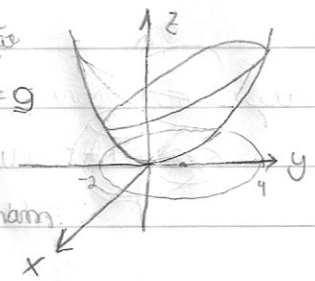
Primeira possibilidade de parametrização: intersecção

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\,\text{sen}\, v \\ z = u^2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 2y + 8 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 9$

Pela figura: $0 \leq v \leq 2\pi$

↳ Nenhuma opção dessa parametr. segue isso



Segunda possibilidade:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\,\text{sen}\, v + 1 \\ z = u^2\cos^2 v + u^2\,\text{sen}^2 v + 2u\,\text{sen}\, v + 1 = u^2 + 2u\,\text{sen}\, v + 1 \end{cases}$$

Para a intersecção: $u^2\cos^2 v + (u\,\text{sen}\, v + 1 - 1)^2 = 9$

$u^2 = 9 \qquad 0 \leq u \leq 3$

$\boxed{\text{Essa é a certa!}} \qquad 0 \leq v \leq 2\pi$