# Resolução P2 - Cálculo III - 2019 - Tipo 1 (21/06/19)

POR: GUSTAVO MURGIA

$\boxed{1}$ Curva: $\gamma(t) = (t^2 - t, \cos(\pi t^2))$, $t \in [0,1]$

$$\int_\gamma 2xye^{x^2}dx + (6y^2 + e^{x^2})dy = ? \rightarrow F(x,y) = (\overbrace{2xye^{x^2}}^{P(x,y)}, \overbrace{6y^2+e^{x^2}}^{Q(x,y)})$$

A derivada da curva fica:

$$\gamma'(t) = (2t-1, -\operatorname{sen}(\pi t^2)\cdot 2\pi t)$$

Percebemos que o produto $F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ fica muito complicado de integrar.

Vamos, então, calcular o rotacional

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{k} = \left(2xe^{x^2} - e^{x^2}2x\right)\vec{k} = 0$$

Como não há falhas no domínio, o campo é conservativo! Ou seja, ele é gradiente.

Vamos calcular o potencial:

$$\int P(x,y)\,dx = \int 2xye^{x^2}dx = \left|\begin{matrix} x^2 = u \\ du = 2xdx \end{matrix}\right| = y\int e^u du = y\,e^u = e^{x^2}y + C(y)$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int [6y^2 + e^{x^2}]dy = \frac{6}{3}y^3 + ye^{x^2} + C(x)$$

Comparando as duas integrais, o potencial é: $\varphi = \frac{6}{3}y^3 + ye^{x^2} + C$

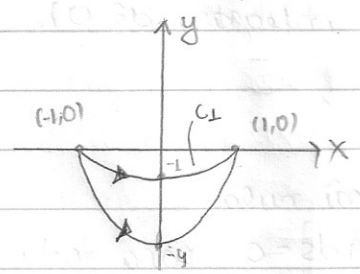
Logo $\int_\gamma 2xye^{x^2}dx + (6y^2+e^{x^2})dy = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = (*)$

$\gamma(1) = (0,-1)$ $\quad$ $\gamma(0) = (0,1)$

$$(*) = \left(-\frac{6}{3} - 1\right) - \left(\frac{6}{3} + 1\right) = -\frac{12}{3} - 2 = -4 - 2 = \boxed{-6}$$

$\boxed{2}$ $C_1$: $y = x^2 - 1$ $\quad$ $C_2$: $y = 4(x^2-1)$

$$\operatorname{Rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$




Como $-C_1 \vee C_2$ formam uma curva fechada (sentido anti-horário) podemos dizer, pelo teorema de Green que:

$$\int_{-C_1 \vee C_2} \vec{F}d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \operatorname{rot}\vec{F}\,dxdy$$

$$\int_{-C_1} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{-1}^{1}\int_{4(x^2-1)}^{(x^2-1)} 1\,dydx$$

$$\int_{\partial C_1} \vec{F}d\vec{r} = \int_{-1}^{1} [(x^2-1) - 4(x^2-1)]dx - K = \int_{-1}^{1} -3(x^2-1)dx - K =$$

$$= [-x^3 + 3x]_{-1}^{1} - K = [-1+3-(1-3)] - K = 4 - K$$

Logo $\int_{-C_1} \vec{F}d\vec{r} = -\int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} = 4-K \Leftrightarrow \boxed{\int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} = K-4}$

$\boxed{3}$ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2+y^2 < 9\}$

↳ circunferências de centro na origem

(I) $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \Leftrightarrow \text{Rot}\vec{F} = 0$

Além disso, se o campo é conservativo $\int_C \vec{F}d\vec{r} = 0$

Porém, só $\text{Rot}\vec{F} = 0 \not\Rightarrow$ campo conservativo.

Para que isso seja verdade, o domínio dele deve ser simplesmente conexo. Caso contrário, essa integral pode ser 0 se C não estiver ao redor de uma singularidade.

Ex de $\vec{F}$ para qual isso não vale: $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$

$\boxed{\text{(I) é Falsa}}$

(II) Se o campo é conservativo, o rotacional é sempre 0.

Logo $\text{rot}\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

$\boxed{\text{(II) é Verdadeira}}$

(III) $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $C \subset A$ com centro na origem $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}(x,y)$ é gradiente em A?

$\vec{F}$ pode ser gradiente em A, mas não é necessariamente.

A integral dar 0 não é um indício de que não há falhas no domínio. (pode haver $\vec{F}$ com falha e que, ao integrar, dê 0).

$\boxed{\text{(III) é Falsa}}$

$\boxed{4}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ e $F: D \to \mathbb{R}$ não nula

(I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $\forall (x,y) \in D \Rightarrow \int_C F(x,y)\,ds = 0$ para toda circunferência $C \subset D$?

↳ campo escalar!!

Essa afirmação não faz sentido pelos seguintes mo-

tivos:

1) A derivada de F (um campo escalar) não fornece informações úteis para o cálculo dessa integral

2) Pense em $F(x,y)=3$ e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ uma parametrização de D, logo $\int_0^{2\pi} 3(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)^{1/2}\, dt = \int_0^{2\pi} 3t = 6\pi$

$\boxed{\text{I é Falsa}}$

(II) Se $F(x,y) = 10$ (valor máximo) e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ uma parametrização de D $(0 \leq t \leq 2\pi)$, temos: $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$$\int_0^{2\pi} 10 \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \boxed{20\pi > 10\pi}$$

$\boxed{\text{II é falsa}}$

(III) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ $\quad C_1$: horário $\quad C_2$: anti-horário

$$\int_{C_1} F(x,y)\, ds = -\int_{C_2} F(x,y)\, ds \ ?$$

Primeiro, percebe que a integral está sendo feita em um campo escalar. Ou seja, ela não depende do sentido de rotação.

Vamos mostrar isso em um exemplo

Parametrizações: $C_1$: $\gamma_1(t) = \left(\frac{\cos t}{2}, \frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$ $\quad \gamma_1'(t) = \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right)$

$C_2$: $\gamma_2(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right)$ $\quad \gamma_2'(t) = \left(\frac{\cos t}{2}, -\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$

$$\|\gamma_1'(t)\| = \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{4} + \frac{\cos^2 t}{4}} = \frac{1}{2}$$

Seja $F(x,y) = 4x^2 + y$

$$F(\gamma_1(t)) = \cos^2 t + \frac{\operatorname{sen} t}{2} \iff \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t + \frac{\operatorname{sen} t}{2}\right] dt = \pi$$

$$F(\gamma_2(t)) = \operatorname{sen}^2 t + \frac{\cos t}{2} \iff \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}^2 t + \frac{\cos t}{2}\right] dt = \pi$$

(A independência da parametrização é uma propriedade do campo escalar).

$\boxed{\text{III é falsa}}$

$\boxed{5}$ Dado que $a^2 + b^2 = 1$ e $b > 0$ e $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = -\frac{2}{3}$

Primeiramente, calculemos o rotacional desse campo vetorial:

$$\operatorname{Rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{k}(2x - 2x) = 0 \rightsquigarrow \text{pode ser conservativo.}$$

Como o domínio do campo é simplesmente conexo (não há falhas), ele é conservativo e gradiente.

Dessa forma, seja $\varphi(x,y)$ o potencial de F:

$$\varphi(x,y) = \int 2xy\,dx = 2y\left[\frac{x^2}{2}\right] = yx^2 + K(y)$$

$$\varphi(x,y) = \int (x^2-y^2)\,dy = -\frac{y^3}{3} + yx^2 + K(x)$$

comparando os dois, temos que $\varphi(x,y) = yx^2 - \frac{y^3}{3}$

Logo:

$$\int_{(1,1)}^{(a,b)} \vec{F}\,d\vec{r} = \varphi(a,b) - \varphi(1,1) = ba^2 - \frac{b^3}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = ba^2 - \frac{b^3}{3} - \cancel{\frac{2}{3}} = -\cancel{\frac{2}{3}}$$

Temos então:

$$\begin{cases} ba^2 - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \\ a^2+b^2 = 1 \\ b>0 \end{cases} \iff \begin{cases} ba^2 - \frac{b^3}{3} = 0 \\ a^2+b^2=1 \iff a^2 = 1-b^2 \\ b>0 \end{cases}$$

$$b(1-b^2) - \frac{b^3}{3} = 0 \iff b - b^3 - \frac{b^3}{3} = 0 \iff b - \frac{4b^3}{3} = 0 \iff \begin{cases} \cancel{b=0} \\ 1 - \frac{4}{3}b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{4}{3}b^2 = 1 \\ b>0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cancel{b = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ b>0 \end{cases}$$

Dado que $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $a^2+b^2=1$, temos:

$$a^2 + \frac{3}{4} = 1 \iff a^2 = \frac{1}{4} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

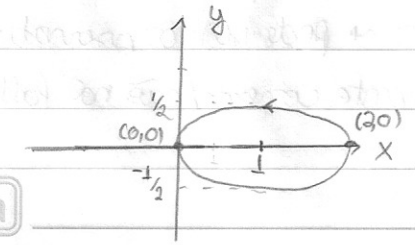
$\boxed{6}$ C: trecho da elipse $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ com $y \geq 0$ de $(2,0)$ a $(0,0)$

$$\int_C (2y+x)\,dx + (e^{2y}+4x)\,dy = ?$$

Primeiramente, vamos calcular o rotacional:

$\text{Rot}\vec{F} = (4-2)\vec{k} = 2\vec{k} \neq 0 \Rightarrow$ Não é conservativo

Vamos desenhar a elipse para entender melhor o problema




Temos duas opções:

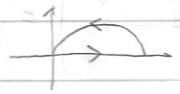
1. Parametrizar e fazer a conta (parece que vai ficar difícil)
2. Usar teorema de green.

Pela simplicidade do rotacional, usaremos o Teorema de green.
Para isso, precisamos fechar a curva no sentido anti-horário, ou seja devemos criar uma curva de (0,0) até (2,0) - a curva $C_2$.

$$\int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \text{rot}\vec{F}\cdot K\,dx\,dy$$

- $C_2$: $y=0$ e $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \gamma(t) = (t, 0)$, $t \in [0,2]$

$F(\gamma(t)) = (t, 4t)$



$\gamma'(t) = (1, 0)$

$\int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^2 t\,dt = 2$

- $\iint_{D_{xy}} 2\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = 1 - r\cos\theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = 2r\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ |J\varphi| = 2r & \end{array} \right| = \int_0^\pi \int_0^1 4r\,dr\,d\theta = 4\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi$

OBS: $J\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos\theta & 2\,\text{sen}\,\theta \\ -r\,\text{sen}\,\theta & -2r\cos\theta \end{vmatrix} = +2r\,\text{sen}^2\theta + 2r\cos^2\theta = 2r$

- Portanto, temos:

$2 + \int_C \vec{F}\,d\vec{r} = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = 2\pi - 2}$

$\boxed{7}$ C: intersecção de $y = x^2 + z^2$ e $y = 3 - 2x$

$\int_C \sqrt{1+z^2}\,ds \rightarrow$ integral de campo escalar

Vamos parametrizar a intersecção:

$y = x^2 + z^2 = 3 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + z^2 = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + z^2 = 4$

$C: \begin{cases} x = 1 - 2\cos\theta \\ y = 1 + 4\cos\theta \\ z = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

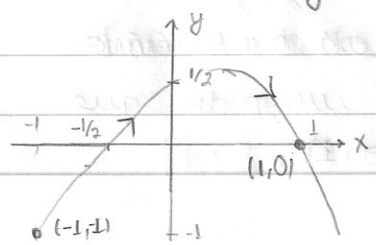
$\gamma(\theta) = (1 - 2\cos\theta,\ 1 + 4\cos\theta,\ 2\,\text{sen}\,\theta)$

$\gamma'(\theta) = (2\,\text{sen}\,\theta,\ -4\,\text{sen}\,\theta,\ 2\cos\theta)$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{4\,\text{sen}^2\theta + 16\,\text{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta} = 2\sqrt{1 + 4\,\text{sen}^2\theta}$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4\,\text{sen}^2\theta} \cdot 2\sqrt{1+4\,\text{sen}^2\theta}\,d\theta \quad 2\int_0^{2\pi} 1 + 4\,\text{sen}^2\theta = 4\pi + 8\pi = 12\pi$

$\boxed{8}$ C: trecho de $2y = -2x^2 + x + 1$ de $(-1,-1)$ a $(1,0)$




$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = 1 + 8 = 9 \quad x = \frac{+1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$x = -1 \Rightarrow 2y = -2 \Leftrightarrow y = -1$

Para resolver o problema, a melhor opção aparenta ser fechar a curva e usar o Teorema de Green, mas primeiro vamos calcular o rotacional:

- $F = \left( \overbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}^{P}, \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{Q} \right)$ → problema com o domínio em (0,0)
- $\text{rot}\vec{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} = \left( \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \right)\vec{k} =$

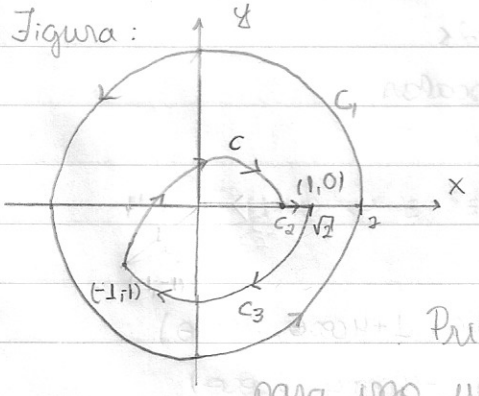
$$= \left( \frac{2(x^2+y^2) - 2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) = 0$$

Teremos que fechar a curva, para isso, usaremos as seguintes curvas: $C_2$: $y=0$ $(1 \leq x \leq 1-\sqrt{2})$

$C_3$: $x^2+y^2=2$ ⇝ pois é a circunf. que contém $(-1,-1)$

Além disso, será necessário isolar a singularidade em (0,0). Podemos fazer isso através de uma circunferência maior ou menor que a curva que fechamos. Como C é no sentido horário, para deixar a orientação certa do Teo. Green, faremos uma circunferência de raio 2 no anti-horário ($C_1$)

Figura:




$$\int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C} \vec{F}d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \text{rot}\vec{F}\vec{k}\,dxdy$$

$$\int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_2 \vee C_3} \vec{F}d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F}d\vec{r}$$

Primeiro, calcularemos a integral sobre $C_1$; para isso, usaremos $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$ e que
↳ anti-horário

$\gamma'(t) = (-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$F(\gamma(t)) = \left( \frac{-2\,\text{sen}\,t}{4}, \frac{2\cos t}{4} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{4\,\text{sen}^2 t}{4} + \frac{4\cos^2 t}{4} \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Agora, calcularemos sobre $C_2$ usando que
↳ está no anti-horário

$\gamma_2(t) = (0, t)$ $t \in [1, \sqrt{2}-1]$ $\gamma_2'(t) = (0, 1)$

$F(\gamma_2(t)) = \left(\frac{-t}{t^2}, 0\right) = (-t^{-1}, 0)$

$\int_{C_2} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\,dt = \int_{C_2} (-t^{-1}, 0)(0, 1)\,dt = 0$

Por fim, calcularemos sobre $C_3$:

$\gamma_3(t) = (\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \sqrt{2}\cos t)$ $\quad t \in [\overbrace{\pi + \frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}, 2\pi] \rightarrow$ horário

$\gamma_3'(t) = (\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\,\text{sen}\,t)$

$F(\gamma_3(t)) = \left(\frac{-\sqrt{2}\cos t}{2}, \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\,t}{2}\right)$

$\int_{C_3} F(\gamma_3(t))\,\gamma_3'(t)\,dt = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} [-\cos^2 t - \text{sen}^2 t]\,dt = -\left[2\pi - \frac{5\pi}{4}\right] = \frac{-3\pi}{4}$

Voltando ao Teorema de Green:

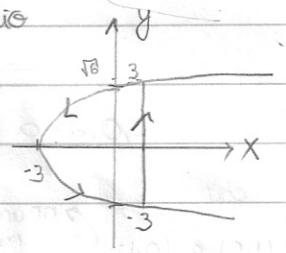
$\int_{C_1} \vec{F}d\vec{r} + \left(\int_{C_2} \vec{F}d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}d\vec{r}\right) = -\int_C \vec{F}d\vec{r}$

$2\pi + \left(0 - \frac{3\pi}{4}\right] = -\int_C \vec{F}d\vec{r} = \frac{8\pi - 3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\boxed{\int_C \vec{F}d\vec{r} = -\frac{5\pi}{4}}$

(poderia ter pensado no de também)

$\boxed{9}$ C: fronteira de $y^2 = 3(x+3)$ e $x = 1$ → percorrida no sentido anti-horário




$y = 0 \Rightarrow 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$x = 0 \Rightarrow y = \pm 3$

Intersecção: $x = 1 \Rightarrow y^2 = 3 + 3 = 6 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{6}$

$F(x,y) = \left(\frac{-y}{4x^2+9y^2}, \frac{x}{4x^2+9y^2}\right)$

Há problema no domínio quando $4x^2 + 9y^2 = 0$, ou seja, em $(0,0)$.

Percebemos que fazer a integral nas duas curvas parece ser muito complicado e que esse campo lembra o de. Vamos calcular o rotacional então.

$\text{Rot}\vec{F} = \left(\frac{(4x^2+9y^2) - x(8x)}{(4x^2+9y^2)^2} - \frac{-(4x^2+9y^2) + y(18y)}{(4x^2+9y^2)^2}\right)\vec{k}$

$$= \left( \frac{2(4x^2+9y^2) - 8x^2 - 18y^2}{(4x^2+9y^2)^2} \right) \vec{k} = 0$$

Por conta do rotacional ser 0, parece ser uma ótima ideia usar o Teorema de Green, mas antes é necessário isolar a singularidade.

Para isso, usaremos a elipse de raios $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$: $4x^2+9y^2=1$ $(C_1)$

Uma parametrização possível é: sentido anti-horário! (deveria ser horário)

$$\gamma(t) = \left(\tfrac{1}{2}\cos t, \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} t\right) \qquad \gamma'(t) = \left(-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{3}\cos t\right) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Assim, o Teorema de Green fica

por ser anti-horário

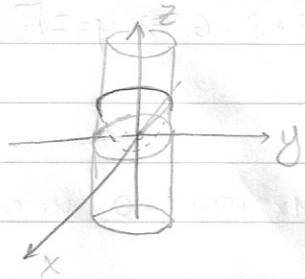
$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \operatorname{rot}\vec{F}\,\vec{k}\,dx\,dy = 0$$

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = +\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{r} = +\int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{3}\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{2}\cos t\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{3}\cos t\right) dt = (*)$$

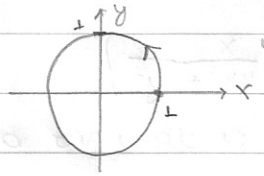
$$F(\gamma(t)) = \left( \frac{-\frac{1}{3}\operatorname{sen} t}{1}, \frac{\frac{1}{2}\cos t}{1} \right)$$

$$(*) = +\int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\,dt = \boxed{+\frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{10}$ C: intersecção de $x^2+y^2=1$ e $2x+y-z=0$ de $(1,0,2)$ a $(0,1,1)$




Projeção no plano xy:




De (1,0) a (0,1): no anti-horário (menor) / no horário (maior)

A questão foi anulada por não deixar o sentido claro. Usaremos o anti-horário

Vamos parametrizar a curva:

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + 2\cos t) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\operatorname{sen} t + \cos t)$$

Logo $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_0^{\pi/2} \{[\operatorname{sen} t + 2\cos t](-\operatorname{sen} t) + \cos^2 t +$

$+ \operatorname{sen} t(-2\operatorname{sen} t + \cos t)\}\,dt = \int_0^{\pi/2} \{-\operatorname{sen}^2 t - 2\operatorname{sen} t\cos t + \cos^2 t - 2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\cos t\}\,dt$

$$\int_0^{\pi/2} [-3\,\text{sen}^2 t - \text{sen}\,t\cos t + \overset{1-\text{sen}^2 t}{\cos^2 t}]\,dt = \int_0^{\pi/2} [1 - 4\,\text{sen}^2 t - \text{sen}\,t\cos t]\,dt = \circledast$$

OBS 1: $\text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}\,t\cos t \iff \text{sen}\,t\cos t = \frac{\text{sen}\,2t}{2}$

OBS 2: $\cos 2t = \cos^2 t - \text{sen}^2 t = 1 - 2\,\text{sen}^2 t \iff \text{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$$\circledast = \int_0^{\pi/2} \left[1 - 2(1-\cos 2t) - \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right] dt = \int_0^{\pi/2} \left[-1 + \cos 2t - \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right] dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,2t}{2}\,dt = \left| \begin{array}{ll} 2t = u & \\ dt = du/2 & \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pi & \\ t = 0 \Rightarrow u = 0 & \end{array} \right| = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos u\,du - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \text{sen}\,u\,du$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cancel{[+\text{sen}\,u]_0^{\pi}}^{\,0} - \frac{1}{4}[-\cos u]_0^{\pi} = \boxed{-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}} \rightarrow \text{anti-horário}$$

Se fosse no sentido horário ($t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$)

$$\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_{\pi/2}^{2\pi} \left[-1 + \cos 2t - \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right] dt = \frac{\pi}{2} - 2\pi + \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos 2t\,dt -$$

$$- \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\text{sen}\,2t}{2}\,dt = \left| \begin{array}{ll} 2t = u & t = 2\pi \Rightarrow u = 4\pi \\ dt = \frac{du}{2} & t = \pi/2 \Rightarrow u = \pi \end{array} \right| = \frac{-3\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{4\pi} \text{sen}\,u\,du + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{4\pi} \cos u\,du =$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}[-\cos u]_{\pi}^{4\pi} + \frac{1}{2}[+\text{sen}\,u]_{\pi}^{4\pi} = \frac{-3\pi}{4} - \frac{1}{4}[+1+1] = \boxed{-\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$ → que não está nas alternativas

$\boxed{11}$ $\gamma(t) = (2t, \text{sen}(\pi t))$, $t \in [0,1]$

$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = ?$ $\qquad \vec{F} = \left(e^x + \ln(1+y^2),\ 1 + \frac{2xy}{1+y^2}\right) = (P(x,y,z), Q(x,y,z))$

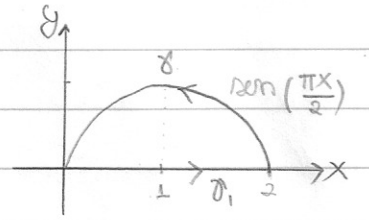
Percebe-se logo ao ler a questão que parece ser trabalhoso trabalhar com esse campo. Vamos calcular o rotacional para ver se vale a pena aplicar o Teorema de Green ou se $\vec{F}$ é conservativo.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y^2)} \cdot 2y\right)\vec{k} = 0$$

OBS: note que o campo não possui singularidades.

Vamos desenhar a curva: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \text{sen}(\pi t) \iff y = \text{sen}(\frac{\pi x}{2}) \end{cases}$ $\qquad x \in [0,2]$

↳ sentido: p/direita




Podemos fechar a curva com

$y = 0$ e $0 \le x \le 2 \rightarrow \gamma_1 = (x,0)$ e $\gamma_1' = (1,0)$

Logo, por Green: $\underbrace{-}_{\text{p/ficar anti-horário}}\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}(x,0)\,d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \text{rot}\,\vec{F}\,\vec{k}\,dx\,dy$

$\vec{F}(x,0) = (e^x, 1)$. Assim, $\int_0^2 (e^x, 1)(1,0)\,dx = \int_0^2 e^x\,dx = [e^x]_0^2 = \boxed{e^2 - 1}$

(poderia ser feita calculando o potencial!)

$\boxed{12}$ $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$ → uma vez no anti-horário

$\vec{F} = \left(6x^5y + \ln(1+\sqrt{1+x^2}),\ x^6 + x^2 + y^2 + e^{y\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 y}}\right)$

A questão apresenta um retângulo fechado percorrido no sentido anti-horário, Green parece ser útil para resolvê-la.

$\operatorname{Rot}\vec{F} = \left(6x^5 + 2x - 6x^5\right)\vec{k} = 2x\vec{k}$

Como $\vec{F}$ está definida dentro do retângulo, temos

$$\int_{\partial R} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} 2x\vec{k}\cdot\vec{k}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 2x\,dx\,dy = \left[x^2\right]_0^2 = \boxed{4}$$