IME-USP

08/04/2024

MAT2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Gabarito - Primeira Prova - A

Nome:____

NUSP:____________________ Turma:____________________

Assinatura:____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

Instruções

Nesta prova, não é permitido usar as Regras de L'Hospital

(1) A prova tem início às 07:30 e terminará às 09:30 do dia 08/04/2024.
(2) Só será permitida a admissão de alunos nos locais de provas até as 08:00.
(3) Não é permitido sair dos locais de prova antes das 08:30.
(4) **Durante a prova, não é permitido** *portar* **qualquer aparelho eletrônico, em particular celulares e relógios conectados, mesmo que desligado. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala.**
(5) Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos de identificação.
(6) Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões, justificando todas as suas afirmações. As questões podem ser resolvidas à lápis ou à tinta na folha que contém seu enunciado.
(7) As páginas em branco da prova podem ser utilizadas para rascunho, mas tais anotações não serão consideradas na correção das questões.

Caso seja constatado o não cumprimento de algum dos itens acima, o aluno envolvido receberá nota 0 e o incidente será reportado às comissões de graduação e de ética da Poli.

Questão 1 (3 pontos)**.** Decida se os limites abaixo existem e calcule-os em caso afirmativo. Justifique sua resposta.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x+6}}{\sqrt[3]{8x^3+2x^2+7}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{x^3-8}$

Questão 2 (2 pontos)**.** Considere a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-9x, & x\geq 3\\ 8-3x, & 1\leq x<3\\ -x^2-x+7, & x<1\end{cases}$$

a) Determine os pontos onde g é contínua. Justifique bem sua resposta.

b) Determine os pontos onde g é derivável. Justifique bem sua resposta.

Questão 3 (2 pontos)**.** Considere a curva no plano (x, y) dada por:

$$y^3 + y + 2xy = 2\cos(x).$$

a) Mostre que para $x = 0$, devemos ter $y = 1$ como única solução na equação acima.

b) Seja $y = f(x)$ uma função derivável definida em um intervalo aberto I implicitamente pela equação acima. Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

Questão 4 (3 pontos)**.** Um avião de guerra voa com a trajetória no tempo $t \geq 0$ (em minutos) descrita pelo o gráfico da função

$$f(t) = \frac{1}{(2t+1)^2}$$

medida em km.

a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto $(2, f(2))$.

b) Descreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(t)$ no ponto $(T, f(T))$, em termos do parâmetro T.

c) Se o alvo do avião de guerra encontra-se no ponto $(20, 0)$ e assumindo que o disparo de um míssil percorre uma trajetória reta na direção que o avião aponta no momento que é disparado, encontre o tempo T no qual o piloto deve disparar o míssil para acertar o alvo.

Soluções:

Solução (Q-1)**.** a) Temos que:

Quando fazemos $x \to -\infty$, consideramos $x < 0$, para o qual $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Assim

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x+6}}{\sqrt[3]{8x^3+2x^2+7}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+5/x+6/x^2}}{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{8+2/x+7/x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+5/x+6/x^2}}{x\sqrt[3]{8+2/x+7/x^3}} = \frac{-\sqrt{4}}{\sqrt[3]{8}} = -1$$

b) Temos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{x^3-8} = \frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{(x^2-6x+8)}\frac{(x^2-6x+8)}{x^3-8} = \frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{(x^2-6x+8)}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Assim,

$$\lim_{x\to2} \frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{x^3-8} = \lim_{x\to2}\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2-6x+8)}{(x^2-6x+8)}\frac{(x-4)}{(x^2+2x+4)}\right)$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right) \cdot \lim_{x\to2}\left(\frac{(x-4)}{(x^2+2x+4)}\right) = 1 \cdot (\frac{-2}{12}) = -\frac{1}{6}.$$

Solução (Q-2). a) Como polinômios são funções contínuas, vemos que g é contínua em $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$. Assim verificamos que:

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = 3^2 - 27 = -18 \neq \lim_{x\to 3^-} g(x) = 8 - 9 = -1;$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 8 - 3 = 5 = \lim_{x\to 1^-} g(x) = -1 - 1 + 7;$$

Portanto, g é contínua em $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

b) Como polinômios são funções deriváveis, vemos que g é derivável em $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

Como g não é contínua em $x=3$, vemos que g não é derivável em $x=3$.

Em $x=1$, olhamos para:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -2\cdot 1 - 1 = -3\ ,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -3(1)^2 - 2(1-1) = -3$$

Pela igualdade dos limites laterais, vemos que existe:

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -3.$$

Portanto, g é derivável em $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Solução (Q-3). a) Para $x=0$,

$$y^3 + y = 2.$$

$$y^3 + y - 2 = 0$$

$$(y-1)(y^2+y+2) = 0$$

Como $y^2+y+2\neq 0$, uma vez que seu descriminante é $\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = -7 < 0$, vemos então que devemos ter $y=1$.

b) Derivando implicitamente, obtemos

$$3[f(x)]^2\cdot f'(x) + f'(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = -2\ \mathrm{sen}(x).$$

Fazendo $x=0$ e $f(0)=1$:

$$3\cdot f'(0) + f'(0) + 2 = 0,$$

de onde segue que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Dessa forma, uma equação para a reta tangente ao gráfico de f em $(0,f(0))$ é $y - 1 = -\dfrac{1}{2}x$

Solução (Q-4). a) Temos que

$$f'(t) = \frac{-2}{(2t+1)^3}\cdot 2 = \frac{-4}{(2t+1)^3}$$

Assim, $f'(2) = {}^{-4}/_{125}$. Portanto a equação da reta tangente é :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\frac{4}{125}(x-2) + \frac{1}{25}.$$

b) Do item anterior:

$$f'(T) = \frac{-4}{(2T+1)^3}$$

.

Portanto a equação da reta tangente é em $t = b$ é:

$$y = f'(T)(x-T) + f(T) = -\frac{4}{(2T+1)^3}(x-T) + \frac{1}{(2T+1)^2}.$$

c) Queremos encontrar o ponto T para o qual a reta tangente passe por $(20, 0)$, ou seja, tal que:

$$0 = -\frac{4}{(2T+1)^3}(20-T) + \frac{1}{(2T+1)^2}$$
$$\therefore 0 = \frac{1}{(2T+1)^2}\left(-\frac{4}{(2T+1)}(20-T) + 1\right).$$

Como ${}^{1}/_{(2T+1)^2} \neq 0$:

$$0 = -\frac{4}{(2T+1)}(20-T) + 1,$$
$$\therefore 1 = \frac{4}{(2T+1)}(20-T),$$
$$\therefore 2T + 1 = 80 - 4T,$$
$$\therefore T = \frac{79}{6}.$$

Ou seja, $T = {}^{79}/_{6}$ minutos.