MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 2 - 29/06/2019 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Conhecemos os valores da distribuição normal acumulada

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

tabelados abaixo:

x	1	2	2.5
$f(x)$	0.841345	0.977250	0.993790

Estime o valor de $f(1.5)$ através do polinômio interpolador de grau 2 dos pontos tabelados e o erro em relação ao valor exato.

Questão 2 (2.5 pontos) Faça a análise harmônica da função de período 1 cuja expressão é dada por $f(x) = |\sin(\pi x)|$ até o harmônico de segunda ordem.

Questão 3 (2.5 pontos)
a) Utilize a fórmula de integração gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

para aproximar

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$$

b) Determine o valor de n necessário para se garantir um erro menor que o obtido com a fórmula Gaussiana se utilizarmos o método de n-trapézios.
c) Há dois pontos no intervalo $[1, 2]$ tais que se dois polinômios de grau 3 coincidirem nestes pontos então suas integrais de 1 a 2 também coincidem. Quais são eles?

Questão 4 (2.5 pontos) O movimento de um pêndulo forçado é descrito pela equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\theta''(t) + \operatorname{sen}\theta(t) = \cos(t) \ .$$

O pêndulo, inicialmente em repouso, é largado (em $t = 0$) da posição $\theta = \pi/4$. Desejamos estimar a posição do mesmo no instante $t = 0.5$. Para tanto, utilize um passo do método de Euler modificado.

São dados:

Erro na interpolação polinomial: $f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(y)(x - x_0)...(x - x_n)/(n + 1)!$

Erro do método de n-trapézios: $|E_{nT}| \leq \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|(b - a)h^2/12$

Método de Euler modificado: $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n)))$

Observação: Integrais e derivadas analíticas devem ser calculadas sem auxílio de calculadoras. Caso estas sejam utilizadas para este fim as respostas não serão consideradas.