MAP3121 – Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 1

1º semestre de 2019 – Prof. Claudio H Asano

1. Deseja-se estimar a altura acima do nível do mar de três pontos A, B e C. Como as medidas estão sujeitas a erros, mediram-se, além das altitudes dos três pontos, as diferenças de altitudes entre eles, obtendo-se o seguinte sistema linear para as alturas x_A, x_B e x_C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Obtenha a solução do sistema no sentido de mínimos quadrados. O sistema normal deve ser resolvido usando o Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e 2 algarismos significativos.

2. Cometeram-se alguns pequenos erros na solução do sistema da Questão 1 obtendo-se a seguinte decomposição LU da matriz do sistema normal

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.33 & 1 & 0 \\ -0.34 & -0.46 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2.6 & -1.2 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

   e a aproximação $(1.1, 1.8, 2.7)$ para a solução.

   (a) Calcule uma etapa de refinamento a partir desta aproximação, usando a decomposição LU dada, para o cálculo da correção. A matriz original deve ser usada no cálculo do resíduo.

   (b) Justifique por que o método de Gauss-Seidel pode ser usado para resolver o sistema normal, com garantia de convergência. A partir da solução refinada, calcule uma iteração do método de Gauss-Seidel com três algarismos significativos, e estime o erro.

3. A função $f(x) = e^{-x} - 2x^2 - 0.5$ tem 3 raízes.

   (a) Encontre um intervalo tal que o Método de Newton convirja para a raiz intermediária para qualquer chute inicial dado neste intervalo, justificando a convergência.

   (b) Calcule a raiz intermediária com precisão 10^{-3}.

4. A tabela abaixo representa medidas do número de células de uma cultura de levedo

t	0	4	8	12	16
N	18	80	336	597	664

   onde t é medido de horas. A população obedece a lei

$$N(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}}.$$

   Manipulando-se esta expressão, obtêm-se a relação

$$\frac{N(t)}{N(t+\Delta t)} = e^{-\gamma \Delta t} + \frac{1 - e^{-\gamma \Delta t}}{\alpha} N(t) = a + bN(t)$$

   com Δt constante. Use este fato para estimar α e γ pelo MMQ. Usando os valores de α e γ, estime β pelo MMQ a partir da expressão para $\frac{\alpha}{N(t)} - 1$.

Respostas: 20191map3121P1 MAP3121 – Métodos Numéricos e Aplicações, Prova 1, 1º semestre de 2019, Prof. Claudio H Asano

1. O sistema normal é

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

com $\bar{A} = \begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & -1.0 \\ -0.33 & 2.7 & -1.3 \\ -0.33 & -0.48 & 2.1 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.67 \\ 6.0 \end{bmatrix}$ e $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.7 \\ 2.9 \end{bmatrix}$.

2.(a) O resíduo é $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ -0.60 \\ 0.80 \end{bmatrix}$, calculado com precisão dupla de 4 algarismos significativos. Para calcular a correção c, resolvemos $Ac = LUc = r^{(0)}$ solucionando primeiro $Ly = r^{(0)}$, obtendo $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ -0.53 \\ 0.63 \end{bmatrix}$ e, em seguida, resolvemos $Uc = y^{(0)}$, obtendo $c^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.058 \\ 0.32 \end{bmatrix}$. Assim $x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.7 \\ 3.0 \end{bmatrix}$.

2.(b) Como $\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_2 = \frac{5}{9}$ e $\beta_3 = \frac{11}{27}$, segue que $M = \frac{2}{3} < 1$ e pelo critério de Sassenfeld, a sequência de Gauss-Seidel será convergente. Partindo de $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.7 \\ 3.0 \end{bmatrix}$, obtemos com 3 algarismos significativos, $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.23 \\ 1.74 \\ 2.99 \end{bmatrix}$. Para estimar o erro, usamos que $\|x^{(1)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{M}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{(2/3)}{1-(2/3)} \max\{0.07, 0.04, 0.01\} = 0.14$.

3.(a)

(i) Sinal de f''.
Como $f'(x) = -e^{-x} - 4x$ e $f''(x) = e^{-x} - 4$, segue que a única raiz de f'' ocorre em $x = -\ln(4)$, com $f''(x) > 0$ para $x < -\ln(4)$ e $f''(x) < 0$ para $x > -\ln(4)$.

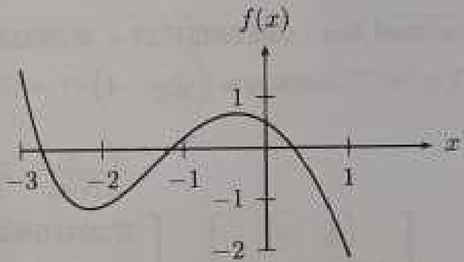
(ii) Sinal de f'.
Já sabemos que f' tem um máximo global em $x = -\ln(4)$ porque f' é estritamente crescente para $x < -\ln(4)$ e estritamente decrescente para $x > -\ln(4)$. Por inspeção, temos

x	$f'(x)$	$f(x)$
-3	-8.086	1.586
-2	0.611	-1.111
$-\ln(4) \approx -1.386$	1.545	-0.344
-1	1.282	0.218
0	-1	0.5
1	-4.368	-2.132

e concluímos que f' tem somente duas raízes: uma localizada em $[-3,-2]$ que será um mínimo local de f (pois f' é crescente ali) e uma outra em $[-1,0]$ que será um máximo local de f (pois f' é decrescente ali).

(iii) Localização da raiz intermediária.
A raiz intermediária está em $[-\ln(4),-1]$, onde $f'>0$ e $f''\leq 0$.

(iv) Escolha da aproximação inicial x_0.
Pelo Teorema da concavidade, precisamos escolher $x_0=-\ln(4)$, mas se escolhermos $x_0=-1$, obtemos $x_1=-1.17030407566\in[-\ln(4),-1]$. Deste modo, escolhendo-se qualquer $x_0\in[-\ln(4),-1]$, a sequência do método de Newton convergirá para a raiz intermediária de f.



3.(b) Como a raiz intermediária está em $[-\ln(4),-1]$, onde $f'>0$ e $f''\leq 0$, escolhemos $x_0=-\ln(4)$.

x_n	$x_n+2\varepsilon$	$f(x_n+2\varepsilon)$	$f'(x_n+2\varepsilon)$
$-\ln(4)$	-1.38429436112	-0.34053376179	1.54516944981
-1.16390833043	-1.16190833043	-0.00403540166	1.45160678674
-1.15912837535	-1.15712837535	0.00289397089	pare

Assim, $\bar{x}=-1.15812837535$ com precisão $\varepsilon=0.0001$. Para arredondar:

x	$f(x)$
-1.159	0.00018293728
-1.157	0.00307981664

x	$f(x)$
-1.160	-0.00126672388
-1.158	0.00163178518

Portanto $\bar{x}=-1.159\pm 0.0001$. A raiz "exata" é $\bar{x}=-1.15912622402$.

4. A aproximação é

$$\frac{N(t)}{N(t+\Delta t)} \underset{\text{MMQ}}{\sim} a+bN(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{18}{80} \\ \frac{80}{336} \\ \frac{336}{597} \\ \frac{597}{664} \end{bmatrix} \underset{\text{MMQ}}{\sim} a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 18 \\ 80 \\ 336 \\ 597 \end{bmatrix}$$

com sistema normal associado

$$\begin{bmatrix} 4 & 1031 \\ 1031 & 476029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.92500569399 \\ 748.963688854 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0.17140357282 \\ b = 0.00120212551184 \end{cases}$$

De $e^{-\gamma\Delta t} = a$ segue que $\gamma = \frac{\ln(a)}{-\Delta t} = 0.440933607028$ e de $\frac{1-e^{-\gamma\Delta t}}{\alpha} = b$, obtemos $\alpha = \frac{1-a}{b} =$ 689.276135493.

Alternativas para calcular β com MMQ:

(i) Como $\frac{\alpha}{N(t)} - 1 = \beta e^{-\gamma t}$, fazemos a aproximação

$$\frac{\alpha}{N(t)} - 1 \underset{\text{MMQ}}{\sim} \beta e^{-\gamma t}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{18} - 1 \\ \frac{\alpha}{80} - 1 \\ \frac{\alpha}{336} - 1 \\ \frac{\alpha}{597} - 1 \\ \frac{\alpha}{664} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.2931186384 \\ 7.61595169365 \\ 1.05141706992 \\ 0.154566391109 \\ 0.0380664691145 \end{bmatrix} \underset{\text{MMQ}}{\sim} \beta \begin{bmatrix} 1.00000000000 \\ 0.171403572819 \\ 0.0293791847752 \\ 0.00503569723699 \\ 0.000863136498055 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-4\gamma} \\ e^{-8\gamma} \\ e^{-12\gamma} \\ e^{-16\gamma} \end{bmatrix}$$

Daí o sistema normal fica $1.03026842452\beta = 38.6302209516$ e assim $\beta = 37.4952973731$.

(ii) Como $\frac{\alpha}{N(t)} - 1 = \beta e^{-\gamma t}$, segue que $\left(\frac{\alpha}{N(t)} - 1\right) e^{\gamma t} = \beta$. Assim fazemos a aproximação

$$\left(\frac{\alpha}{N(t)} - 1\right) e^{\gamma t} \underset{\text{MMQ}}{\sim} \beta$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha}{18} - 1\right) \\ \left(\frac{\alpha}{80} - 1\right) e^{4\gamma} \\ \left(\frac{\alpha}{336} - 1\right) e^{8\gamma} \\ \left(\frac{\alpha}{597} - 1\right) e^{12\gamma} \\ \left(\frac{\alpha}{664} - 1\right) e^{16\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.2931186385 \\ 44.4328643117 \\ 35.7878231800 \\ 30.6941390308 \\ 44.1024904002 \end{bmatrix} \underset{\text{MMQ}}{\sim} \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com sistema normal que fornece o valor de β como sendo a média dos valores na coluna da esquerda. Assim $\beta = 38.4620871124$.

(iii) Como $\frac{\alpha}{N(t)} - 1 = \beta e^{-\gamma t}$, segue que $\ln\left(\frac{\alpha}{N(t)} - 1\right) + \gamma t = \ln(\beta)$. Assim fazemos a aproximação

$$\ln\left(\frac{\alpha}{N(t)} - 1\right) + \gamma t \underset{\text{MMQ}}{\sim} \ln(\beta)$$

$$\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{\alpha}{18} - 1\right) \\ \ln\left(\frac{\alpha}{80} - 1\right) + 4\gamma \\ \ln\left(\frac{\alpha}{336} - 1\right) + 8\gamma \\ \ln\left(\frac{\alpha}{597} - 1\right) + 12\gamma \\ \ln\left(\frac{\alpha}{664} - 1\right) + 16\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61880882272 \\ 3.79397938284 \\ 3.57760770092 \\ 3.42407172532 \\ 3.78651625238 \end{bmatrix} \underset{\text{MMQ}}{\sim} \ln(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

com sistema normal que fornece o valor de $\ln(\beta)$ como sendo a média dos valores na coluna da esquerda. Assim $\ln(\beta) = 3.64019677684$ e $\beta = 38.0993330541$.

4. Para simples ilustração, os gráficos correspondentes serão (i) em azul, (ii) em verde e (iii) em preto.