Gustavo H. B. Gaspar

Interpolação Polinomial

• objetivo: dada uma tabela com $n+1$ pontos, queremos encontrar um polinômio de grau $\leq n$ que interpola a tabela

$$p(x_j) = f_j, \quad 0 \leq j \leq n$$

1) base canônica $\Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$

$$\begin{cases} p(x_0) = f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots a_n x_0^n \\ \vdots \\ p(x_n) = f_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots a_n x_n^n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

matriz de Vandermonde (V)

• se $x_0, x_1 \dots x_n$ forem distintos entre si $\Rightarrow$ existirá UM ÚNICO polinômio interpolador

• $\det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$

↳ produtória

2) Lagrange

- queremos uma base de polinômio $L_0(x), L_1(x) \dots L_n(x)$ de grau n, tal que:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

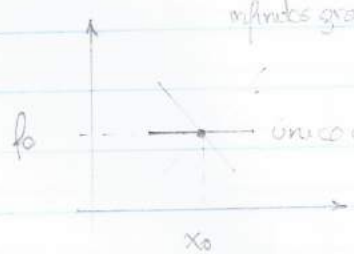
- portanto:

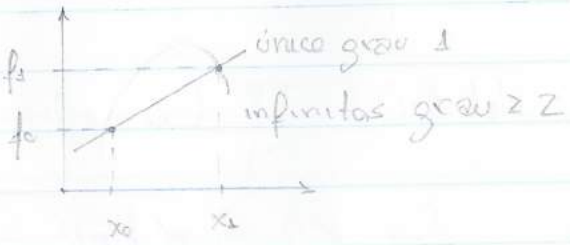
	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_n
$L_0(x)$	1	0	0	$\dots$	0
$L_1(x)$	0	1	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$L_n(x)$	0	0	0	$\dots$	1

- logo temos que: $$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

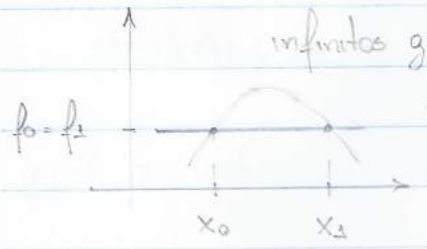
$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots f_n L_n(x)$$

⇒ exemplos:





nenhum grau 0



⇒ exemplo:

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	5
$L_0(x)$	1	0	0
$L_1(x)$	0	1	0
$L_2(x)$	0	0	1

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2+2x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$p(x) = 1 \cdot \left[\frac{x^2-3x+2}{2}\right] + 2 \cdot \left[-x^2+2x\right] + 5 \cdot \left[\frac{x^2-x}{2}\right]$$

$$p(x) = x^2 + 1$$

/ /

- definições:

- erro na interpolação polinomial:

  - erro = $E_n(x) = f(x) - p(x)$ (I)
  - demonstração:

- criamos a função auxiliar $g(t) = f(t) - p_n(t) - \alpha(t-x_0)\cdots(t-x_n)$
  α escolhido tal que $g(t)|_{t=x}$, $\alpha = 0$
  $g(x_j) = 0$ para $0 \leq j \leq n$
  $\therefore$ $g(t)$ tem $n+2$ raízes

- $g'(t)$ tem $n+1$ raízes $\Rightarrow$ $g''(t)$ tem n raízes
  $\therefore$ $g^{(n+1)}(t)$ tem 1 raiz, c $\Rightarrow$ $c \in [x_0, x_n]$

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) + \alpha(n+1)! = 0$$
$$\therefore \alpha = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

- $g(t)|_{t=x} = f(x) - p_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n) = 0$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n) \quad \text{(II)}$$

- de (I) e (II) $\Rightarrow$ $c \in [x_0, x_n]$

$$\boxed{E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)}$$

⇒ exemplo:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

qual o valor de $\operatorname{sen}(\pi/12)$?

se usarmos o intervalor $[0, \pi/6]$: $P_1(\pi/12) = 1/4 = 0{,}25$

$$|E_1(\pi/12)| = \frac{\|f''(c)\|\,|\pi/12 - 0|\,|\pi/12 - \pi/6|}{2!}$$

$$|E_1(\pi/12)| \leq \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)\,|\pi/12 - 0|\,|\pi/12 - \pi/6|}{2!}$$

→ maior valor de $f''(x)$ no intervalo $c \in [0, \pi/6]$ é $f''(c) = -\operatorname{sen}(c)$

$\therefore |E_1(\pi/12)| \leq 0{,}017$

$\operatorname{sen}(\pi/12) \cong 0{,}25 + 0{,}017 = 0{,}267$

$\operatorname{sen}(\pi/12) = 0{,}2588$

- diferença dividida:

$\circ\ f: [a,b] \to \mathbb{R}\ (x_0 \neq x_1) \in [a,b]$

- diferença dividida em x_0 e x_1: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

- para f derivável em x_0: $\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = f'(x_0)$

- definimos para funções deriváveis $f'(x_0) = f[x_0, x_0]$

/ /

OBS.: $f[x_0, x_1, \dots x_n]$ independe da ordem do parâmetro

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

- diferença dividida de ordem n em $x_0, x_1, \dots x_n$ distintos é dada pela recursão:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots x_n] - f[x_0, x_1, \dots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \dots x_n, x]$$

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots x_n, x](x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

⇒ exemplo: $f(x) = 2x^3 + 1$ ⇒

x	0	1	2	3	-1
$f(x)$	1	3	17	55	-1

1ª linha

$$f[0,1] = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

$$f[1,2] = \frac{17-3}{2-1} = 14$$

$$f[2,3] = \frac{55-17}{3-2} = 38$$

$$f[3,-1] = \frac{-1-55}{3-(-1)} = 14$$

2 14 38 14

6 12 8

2 2

2ª linha

$$f[0,1,2] = \frac{f[1,2] - f[0,1]}{2-0} = \frac{14-2}{2-0} = 6$$

$$f[1,2,3] = \frac{38-14}{2} = 12$$

$$f[2,3,-1] = \frac{14-38}{-1-2} = 8$$

3ª linha

$$f[0,1,2,3] = \frac{f[1,2,3] - f[0,1,2]}{3-0} = \frac{12-6}{3} = 2$$

$$f[1,2,3,-1] = \frac{8-12}{-1-1} = 2$$

- diferença simples:

  - pontos igualmente espaçados (espaçamento h)
  - $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

    $\Delta^0 f(x) = f(x)$

    $\Delta^N f(x) = \Delta(\Delta^{N-1} f)(x)$, $N \geq 1$
  - relação entre diferença simples e dividida:

$$f[x_0, x_1, \ldots x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n \cdot n!}$$

  - erro contínuo $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

⇒ exemplo: $f(x) = x^2 + 1$ ⇒

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	5	10
		1	3	5
			2	2

1ª linha

$\Delta^1 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 2 - 1 = 1$

$\Delta^1 f(x_1) = 5 - 2 = 3$

$\Delta f(x_2) = 10 - 5 = 5$

2ª linha

$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0) = 3 - 1 = 2$

$\Delta^2 f(x_1) = 5 - 3 = 2$

3) Newton

- na diferença dividida:

$f[x_0, x_1, \dots x_n]$ será o coeficiente de ordem n do polinômio interpolador $p_n(x)$

$\therefore p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$

desenvolvendo a fórmula:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

- na diferença simples:

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

⇒ exemplo: $f(x) = x^3 + 1$

- diferença dividida

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	28
	1	7	19	
	3	6		
	1			

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_n(x) = 1 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$p_n(x) = 1 + x^3$$

↳ diferença simples:

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	9	28
		1	7	19
			6	12
				6

$\Rightarrow h = 1$

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

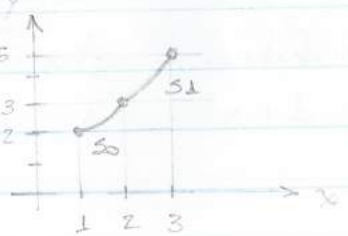
$$p_n(x) = 1 + 1(x - 0) + 3(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$p_n(x) = 1 + x^3$$

- Splines Cúbicos
  - objetivo: achar polinômios cúbicos $S_0(x), S_1(x) \ldots S_{n-1}(x)$ tais que $S_i(x)$ sejam deriváveis até 2ª ordem

⇒ exemplo:

x	1	2	3
f(x)	2	3	5



$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3$$

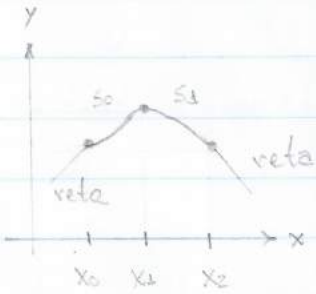
$S_0(x_0) = f_0$	$S_1(x_2) = f_2$
$S_1(x_1) = f_1$	$S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$
$S_0(x_1) = S_1(x_1)$	$S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$

- temos 8 variáveis e 6 equações, faltam 2 equações:
  - a) condições livres / naturais (2 equações)
  - b) condições fixas (2 equações)

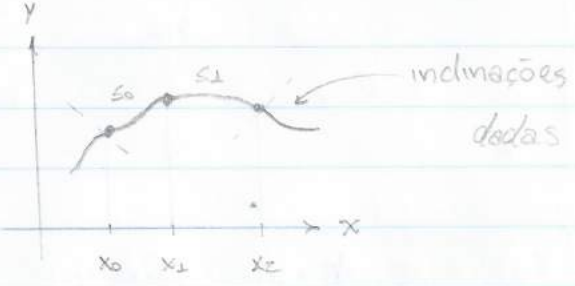
a) condições naturais: $S_0''(x_0) = 0$ e $S_1''(x_2) = 0$

assim $S(x)$ será uma reta se $x \notin [x_0, x_n]$

b) condições fixas: $S_0'(x_0) = f_0'$ e $S_{n-1}'(x_n) = f_n'$



NATURAL



FIXA

- resolvendo o sistema de 8 eq. e 8 incógnitas:

$$S_0(x) = 2 + (3/4)(x-1) + 0(x-1)^2 + (1/4)(x-1)^3$$
$$S_1(x) = 3 + (3/2)(x-2) + (3/4)(x-2)^2 - (1/4)(x-2)^3$$

/ /

⇒ no caso geral:

• condições: $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$, $0 \le j \le n-1$

• 4n variáveis:

(i) $S_j(x_j) = f_j$ $\quad 0 \le j \le n-1$

(ii) $S_{n-1}(x_n) = f_n$

(iii) $S_j(x_{j+1}) = f_{j+1}$ $\quad 0 \le j \le n-1$

(iv) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ $\quad 0 \le j \le n-2$

(v) $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ $\quad 0 \le j \le n-2$

(vi) $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ $\quad 0 \le j \le n-2$

obs.: $h_j = x_{j+1} - x_j$

• para a condição natural: $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ (3/h_1)(a_2 - a_1) - (3/h_0)(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ (3/h_{n-1})(a_n - a_{n-1}) - (3/h_{n-2})(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

demonstração:

de (i): $S_j(x_j) = f_j = a_j$ e $a_n = f_n$

de (iv): $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$

$$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = a_{j+1}, \quad h_j = x_{j+1} - x_j$$

(*)

de (v): $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$

$$b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1} \quad (**)$$

de (vi): $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$

$$c_j + 3d_j h_j = c_{j+1}$$

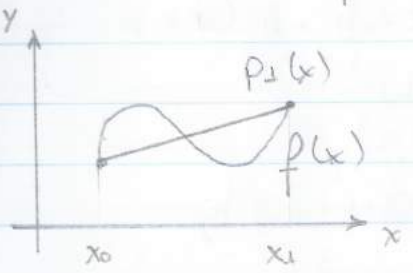
de (*): $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - (c_{j+1} + 2c_j)\frac{h_j}{3}$

de (**): ...

Integração Polinomial:

- objetivo: calcular aproximações de integrais de polinômios.

- Método dos Trapézios
  - têm-se $f(x) = p_1(x) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1)$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1)\,dx$$

$\underbrace{(f_0 + f_1)\frac{h}{2}}$?

área do trapézio

$h = x_1 - x_0$

teorema do valor médio para integrais:

hipóteses: $f(x)$ contínua

$g(x)$ não muda de sinal em $[a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x) \neq 0$

então:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx, \quad c \in [a,b]$$

$$E_T = \int_{x_0}^{x_1} f[x_0, x_1, x]\,(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f[x_0, x_1, c]\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

(continua ≤ 0)

$$f[x_0, x_1, c] = \frac{f''(c_1)}{2!}, \quad c_1 \in [x_0, x_1]$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = ? \Rightarrow \text{mudança variável}$$

x_1	1	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{t-0}{1-0}$
x	t	
x_0	0	$\frac{dx}{h} = dt$

$$dx = h\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \int_0^1 (t-0)h\,(t-1)h\,h\,dt = \frac{-h^3}{6}$$

$$\therefore E_T = \frac{-h^3 f''(c)}{12} = \text{erro}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0+f_1}{2}\right) - \frac{h^3 f''(c)}{12}$$

- caso geral, com n repetições:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0+f_n}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1}\right) - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(c)}$$

$c \in [a,b]$ e $h = \frac{b-a}{n}$ — erro trapézio

/ /

- Método de Simpson
  - aproximar $\int_a^b f(x)dx$ usando N parábolas subdividindo $[a,b]$ em $2N$ subintervalos de passo $h = \frac{b-a}{2N}$
  - demonstração longa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots 4f_{2N-1} + f_{2N}) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(c)$$

erro Simpson

- Extrapolação de Richardson
  - OBS.: não está no cronograma de 2018 mas acho válido passar
  - dada uma função $F(h) = \sum_0^\infty a_j h^j$ queremos calcular $\lim_{h\to 0} F(h) = a_0$

+ rápido + lento

escolhemos $\lambda > 1$ (usualmente $= 2$ ou $= \sqrt{2}$)

$$F(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$$

$$F(h/\lambda) = F_0(h/\lambda) = a_0 + a_1\frac{h}{\lambda} + a_2\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \dots$$

$$F_1(h) = \frac{\lambda F_0(h/\lambda) - F_0(h)}{\lambda - 1}$$

em geral: $$F_n(h) = \frac{\lambda^n F_{n-1}(h/\lambda) - F_{n-1}(h)}{\lambda^n - 1}$$

⇒ exemplo: $f(x) = e^x$ e $\lambda = 2$

$$e = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} \Rightarrow F(h) = \frac{e^{1+h} - e}{h}$$

h	$F_0(h)$	$F_1(h)$	$F_2(h)$	$F_3(h)$
1	4,67077...	2,38285...	2,73861...	2,71779...
1/2	3,52681...	2,64967...	2,720396...	
1/4	3,08824...	2,70271...		
1/8	2,89548...			

$$\frac{4F_1(h/2) - F_1(h)}{4-1}$$

$$F(h) \qquad \frac{2F_0(h/2) - F_0(h)}{2-1} \qquad \frac{8F_2(h/2) - F_2(h)}{8-1}$$

- Método de Romberg

$\cdot\ O(h^2) = \text{erro}$

$$T(h) = I + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots$$

I → integral exata

$T(h)$ → fórmula do trapézio com passo h

$$T_0(h) = T(h)$$

$$T_n(h) = \frac{4^n T_{n-1}(h/2) - T_{n-1}(h)}{4^n - 1}$$

⇒ exemplo: aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

h	$T_0(h)$	$T_1(h)$	$T_2(h)$
1	*	0,747118	0,74608337
1/2	**	0,74685	
1/4	***		

$$* = \frac{(f_0 + f_1)}{2} 1 = 0,683939$$

$$** = \left(\frac{f_0 + 2f_{1/2} + f_1}{2}\right)(1/2) = 0,73137$$

$$*** = \left(\frac{f_0 + 2f_{1/4} + 2f_{1/2} + 2f_{3/4} + f_1}{2}\right)(1/4) = 0,74298$$

• Método de Gauss

• objetivo: escolher pontos de interpolação no intervalo $[a,b]$ para construção do polinômio interpolador e posterior integração

• proposição: se $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ for uma família ortogonal segundo o produto interno $\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$, então cada $p_n(x)$ terá n raízes reais e distintas em $[a,b]$

- considere as $(n+1)$ raízes de $p_{n+1}(x)$: $x_0, x_1, \dots x_n$. Construímos o polinômio interpolador de grau n:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x) \longrightarrow \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{0}^{n} f_j \int_a^b L_j(x)\,dx$$

- considere agora $q(x)$ de grau $2n+1$:

$$\underset{2n+1}{q(x)} = \underset{\leq n}{p(x)}\,\underset{n+1}{q_{n+1}(x)} + \underset{\leq n}{r(x)} \quad \text{e} \quad \int_a^b q(x)\,dx = \sum_i q(x_j) \int_a^b L_j(x)\,dx$$

onde $q(x_j) = p(x_j)\,\underbrace{q_{n+1}(x_j)}_{0} + r(x_j)$

$$\therefore \int_a^b q(x)\,dx = \sum_i r(x_j) \int_a^b L_j(x)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx \Rightarrow \text{exata}$$

⇒ exemplo: $I = [-1, 1]$

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ e $p_2(x) = x^2 - 1/3$

/ /

$n = 1 \Rightarrow$ raízes de $p_2(x)$: $\pm 1/\sqrt{3}$

polinômio interpolador: $p(x) = f(-1/\sqrt{3}) L_0(x) + f(1/\sqrt{3}) L_1(x)$

$$L_0(x) = \frac{x - (-1/\sqrt{3})}{1/\sqrt{3} - (-1/\sqrt{3})}$$

$$L_1(x) = \frac{x - (1/\sqrt{3})}{(-1/\sqrt{3}) - (1/\sqrt{3})}$$

$$p(x) = -f(-1/\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2}(x + 1/\sqrt{3})$$

integração: $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = f(-1/\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} (1/\sqrt{3} - x)\,dx +$

$$+ f(1/\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} (x + 1/\sqrt{3})\,dx$$

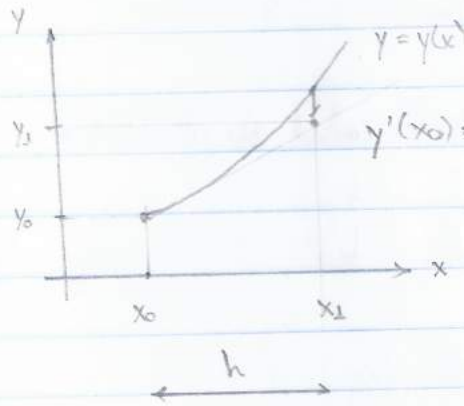
$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

↳ fórmula exata até grau 3
($2n+1$, com $n = 1$)

EDOs

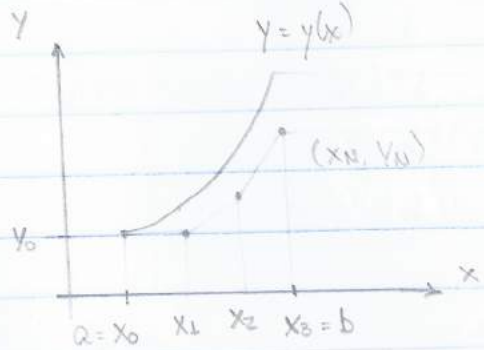
- objetivo: dada uma equação diferencial $y' = f(x,y)$ e $y(x_0) = y_0$, queremos aproximar $y(x)$ em $x_j = x_0 + jh$, $h \neq 0$

- Método de Euler



$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x))$$

- se dividirmos o intervalo de integração da EDO em N subintervalos de tamanho $h = \frac{b-a}{N}$, obtemos:



$\} \; \mathcal{O}(h)$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$y_N = y(x_N) + N\mathcal{O}(h^2) = y(x_N) + \mathcal{O}(h)$$

⇒ exemplo: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \\ y(1) = ? \end{cases}$

EULER: $y_0 = 1$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot x_n \cdot y_n = y_n (1 + hx_n)$

$N = 1, \; h = \frac{1-0}{1} = 1$

n	x_n	y_n
0	0	1
1	1	1

$N = 2, \; h = 1/2$

n	x_n	y_n
0	0	1
1	1/2	1
2	1	1,25

$N = 4, \; h = 1/4$

n	x_n	y_n
0	0	1
1	1/4	1
2	1/2	1,0625
3	3/4	1,1953.
4	1	1,41943

utilizando a extrapolação Richardson

N	h	$F_0(h) = y_N$	$F_1(h)$	$F_2(h)$
1	1	1	1,5	1,618488
2	1/2	1,25	1,588866	
4	1/4	1,41943		

OBS.: resposta "correta"

$$\frac{dy}{dx} = xy \rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = e^{x^2/2 + C} = C_1 \cdot e^{x^2/2} \quad e \quad y(0) = 1 \rightarrow C_1 = 1$$

$$y = e^{x^2/2}$$

$$y(1) = e^{1/2} = 1{,}64872$$

• Método de Euler Modificado (Heun)

• $y' = f(x,y) \rightsquigarrow y'(x) = f(x, y(x))$

$$\int_x^{x+h} y'(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(t, y(t))\,dt$$

• pela regra dos trapézios:

$$y(x+h) - y(x) = \frac{h}{2}\left[f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h)) \right] + \underbrace{O(h^3)}_{\text{erro}}$$

EULER MODIFICADO:

$$\begin{cases} U = y(x) + h f(x, y(x)) \\ y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, U) \right] + O(h^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ U_n = y_n + h f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, U_n) \right] \end{cases}$$

- Método de Runge-Kutta
  - ideia: $y(x+h) = y(x) + hF(x,y,h) + \text{resto}(h^{n})$

$F(x,y,h)$ média ponderada dos valores de f

→ ordem 2: $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \text{resto}(h^3)$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{df}{dx}(x,y) + \frac{df}{dy}(x,y)\right] + \text{resto}(h^3)$$

$$y(x+h) = y(x) + h\left[f(x,y) + \frac{h}{2}\frac{df}{dx} + \frac{h}{2}\frac{df}{dy} + \text{resto}(h^2)\right]$$

procuramos $F(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2}\frac{df}{dx} + \frac{h}{2}\frac{df}{dy} + \text{resto}(h^2)$

utilizando a Fórmula Taylor ↓

$$F(x,y,h) = (a+b)f(x,y) + bch\frac{df}{dx} + bdh\frac{df}{dy} + \text{resto}(h^2)$$

$a+b=1$
$bc = 1/2$ → escolhas populares: $a=b=1/2,\ c=d=1$
$bd = 1/2$ $\quad a=0,\ b=1,\ c=d=1/2$

RK2:
$$\begin{cases} k_1 = hf(x,y) \\ k_2 = hf(x+h, y+k_1) \\ y(x+h) = y(x) + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \end{cases}$$

→ igual a Euler Modificado

→ ordem 4:

RK4:
$$\begin{cases} k_1 = hf(x,y) \\ k_2 = hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(x+h, y+k_3) \\ y(x+h) = y(x) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \text{resto}(h^3) \end{cases}$$

- SISTEMAS DE EDOs
  - consideramos agora um sistema de EDOs $y' = f(x,y)$ onde x é a variável real e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ é uma função da variável x a valores em $\mathbb{R}^n$

Logo, $f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_n(x,y) \end{bmatrix}$ é uma função de domínio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$

  - os métodos discutidos podem ser aplicados a sistemas:

EULER: $y^{(n+1)} = y^{(n)} + hf(x^{(n)}, y^{(n)})$ (não é derivada)

EULER MODIFICADO ou RK2: $y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{h}{2}\left[f(x^{(n)}, y^{(n)}) + f(x^{(n)} + h, y^{(n)} + hf(x^{(n)}, y^{(n)})) \right]$

⇒ exemplo: $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy_1 + y_2 \\ y_1^2 - y_2 \end{bmatrix}$

$y_1'(0) = 1$ e $y_2'(0) = 2$

EULER: $\begin{cases} y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} + h\left[x^{(n)} y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right] \\ y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} + h\left[(y_1^{(n)})^2 - y_2^{(n)}\right] \end{cases}$

EULER MODIFICADO

ou RK2:

$$\begin{cases} U_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} + h\left[x^{(n)} y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right] \\ U_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} + h\left[(y_1^{(n)})^2 - y_2^{(n)}\right] \\ y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} + \frac{h}{2}\left[x^{(n)} y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + (x^{(n)} + h) U_1^{(n+1)} + U_2^{(n+1)}\right] \\ y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} + \frac{h}{2}\left[(y_1^{(n)})^2 - y_2^{(n)} + (U_1^{(n+1)})^2 - U_2^{(n+1)}\right] \end{cases}$$

- EDOs de ordem superior

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} y' = v \\ y'' = v' = f(x) - p(x)v - q(x)y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ f(x) - p(x)v - q(x)y \end{bmatrix}$$

⇒ exemplo: $y'' = xy$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. $y(1) = ?$

$y' = v$

$v' = xy$ $\quad y(0) = 1$ e $v(0) = 2$

EULER: $v_0 = 2$ e $y_0 = 1$ — v'

$v_{n+1} = v_n + h(x_n y_n)$

$y_{n+1} = y_n + h(v_n)$ — y'

$N = 1 \Rightarrow h = 1$

n	x_n	v_n	y_n
0	0	2	1
1	1	2	(3)

$N = 2 \Rightarrow h = 1/2$

n	x_n	v_n	y_n
0	0	2	1
1	1/2	2	2
2	1	2,5	(3)

$N = 4 \Rightarrow h = 1/4$

n	x_n	v_n	y_n
0	0	2	1
1	1/4	2	1,5
2	1/2	2,09375	2
3	3/4	2,34375	2,5234375
4	1	2,81689	(3,109375)

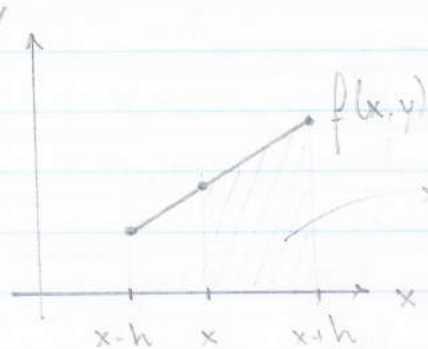
/ /

$\frac{2F_0(h/2) - F_0(h)}{2-1}$ $\frac{4F_1(h/2) - F_1(h)}{4-1}$

extrapolação Richardson

N	h	$F_0(h)$	$F_1(h)$	$F_2(h)$
1	1	3	3	3,2916666
2	1/2	3	3,21875	
4	1/4	3,1009375		

- outros métodos
  - $y' = f(x, y(x))$
    $y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(t, y(t))\, dt$



→ aproximaremos $\int_x^{x+h} f(t, y(t))\, dt$

pela integral do polinômio interpolador de $y'(x)$ em $x, x-h, \ldots x-qh$, onde $q > 0$ e inteiro

para ilustrar: $q = 2$ →

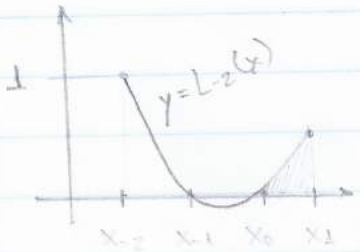
x	x_{-2}	x_{-1}	x_0
$y'(x)$	y_{-2}'	y_{-1}'	y_0'

polinômio interpolador $p_n(x) = y_{-2}' \cdot L_{-2}(x) + y_{-1}' L_{-1}(x) + y_0' L_0(x)$

integrando:

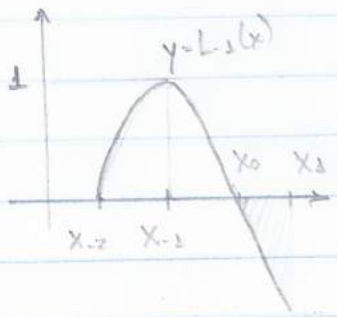
$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)\, dx = y_{-2}' \int_{x_0}^{x_1} L_{-2}(x)\, dx + y_{-1}' \int_{x_0}^{x_1} L_{-1}(x)\, dx + y_0' \int_{x_0}^{x_1} L_0(x)\, dx$$

- $\int_{x_0}^{x_1} L_{-2}(x)\,dx$



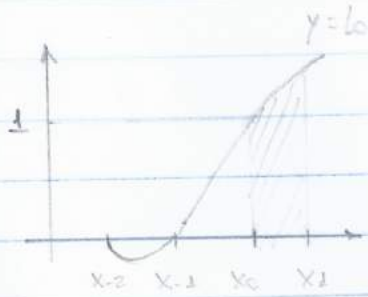
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)}{(x_{-2}-x_{-1})(x_{-2}-x_0)}\,dx = \int_0^1 \frac{(t+1)h\,(t-0)h}{(-2+1)h\,(-2-0)h}\,h\,dt = \frac{5h}{12}$$

- $\int_{x_0}^{x_1} L_{-1}(x)\,dx$



$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_{-2})(x-x_0)}{(x_{-1}-x_{-2})(x_{-1}-x_0)}\,dx = \int_0^1 \frac{(t+2)(t-0)}{(-1+2)(-1-0)}\,h\,dt = -\frac{4h}{3}$$

- $\int_{x_0}^{x_1} L_0(x)\,dx$



$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})}{(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})}\,dx = \int_0^1 \frac{(t+2)(t+1)}{(0+2)(0+1)}\,h\,dt = \frac{23h}{12}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} p(x)\,dx = h\left(\frac{5}{12}y_{-2}' - \frac{4}{3}y_{-1}' + \frac{23}{12}y_0'\right)$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{12}y_{-2}' - \frac{4}{3}y_{-1}' + \frac{23}{12}y_0'\right)$$