CÁLCULO NUMÉRICO - Gustavo Gaspar

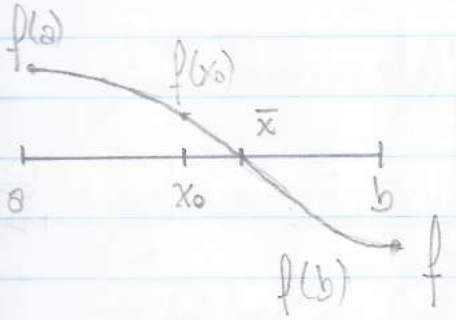
• zero de funções

⇒ objetivo: dada uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, encontrar, se existir, uma raiz $\bar{x} \in [a,b]$ com dada tolerância

⇒ Teorema de Bolzano

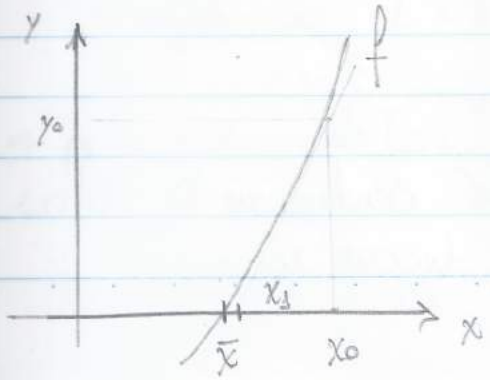
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b)$ tq. $f(\bar{x}) = 0$

↳ demonstração:



i) $x_0 = a+b/2$
ii) $f(a)f(x_0)<0 \Rightarrow \bar{x} \in [a,x_0] \Rightarrow b = x_0$
iii) $f(b)f(x_0)<0 \Rightarrow \bar{x} \in [x_0,b] \Rightarrow a = x_0$
iv) $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \bar{x}$
v) paramos se $b-a < 2\varepsilon$ com $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$

⇒ Método de Newton



eq. reta tg:
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

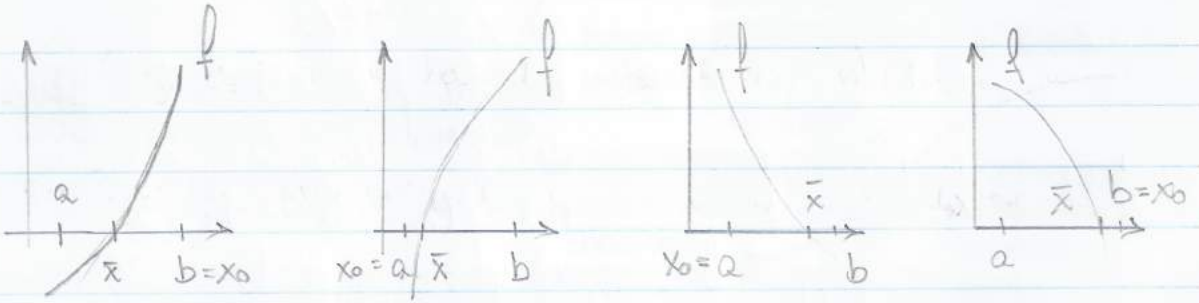
$x \Rightarrow \bar{x} \therefore y = 0$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\therefore \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- convergência do método: critério global de convergência (critério da convexidade)

usar sinais de f' e f''



$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$
$f'' > 0$	$f'' < 0$	$f'' > 0$	$f'' > 0$
x_n decresc.	x_n cresc.	x_n cresc.	x_n decresc.

Método da barriga

OBS.:

- $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, $x_1 \in [a,b]$ ✓ continuar
  $x_1 \notin [a,b]$, trocar x_0

- x_0 escolhido pelo critério global, (x_n) será monotônico (cresc. ou decresc.) e estará dentro de $[a,b]$

⇒ Método de Aproximações Sucessivas

- eq. diferenciais ⇒ método de Euler

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \rightarrow \text{form. Taylor}$$

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(x, y(x))\,dx \quad \rightarrow \text{triangulo}$$

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2}\left(f(x, y(x)) + f(x, y(x+h))\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n, y_{n+1})\right)$$

- em Euler modificado ⇒ trocar y_{n+1} por $x_n + hf(x_n, y_n)$
- poderíamos calcular y_{n+1} com a equação não linear

⇒ Método do Ponto Fixo

- $\phi: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in [a,b]$ é ponto fixo se $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$
- contração: $0 \le M < 1$ se $|\phi(x) - \phi(y)| \le M|x-y|$
- expansão: $L > 1$ se $|\phi(x) - \phi(y)| \ge L|x-y|$

⇒ proposição: $\phi: [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $M = \max_{[a,b]} |\phi'| < 1$ então ϕ é uma M-contração

⇒ proposição: $\phi[a,b] \to [a,b]$ for contínua então existe $\bar{x} \in [a,b]$ t.q. $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$

O método das aproximações sucessivas ou método do ponto fixo consiste em escolher x_0 como aproximação inicial e construir sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$

⇒ escolha de x_0

x_0 será o extremo mais próximo de $\bar{x}$

seja $c = \frac{a+b}{2}$

- $\phi(c) > c$ então $x_0 = b$
- $\phi(c) < c$ então $x_0 = a$
- $\phi(c) = c$ então $x_0 = c$

⇒ Teorema do Ponto Fixo:

$\phi[a,b] \to \mathbb{R}$ e classe C^1. Se $M = \max_{[a,b]} |\phi'| < 1$ e x_0 for extremo mais próximo de $\bar{x}$ ∴ $\phi(x_n) = x_{n+1}$ tende a $\bar{x}$

$$|x_n - \bar{x}| \leq M |x_{n-1} - \bar{x}|$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq M^n |x_0 - \bar{x}| \leq M^n \frac{|b-a|}{2} \leftarrow \varepsilon \text{ estimar } n$$

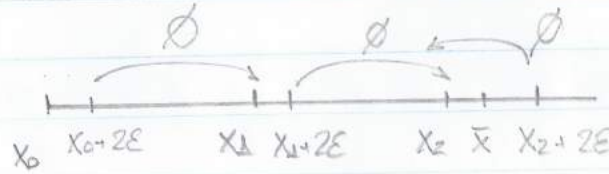
$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{1-M} |x_n - x_{n-1}| \leftarrow \text{corrente}$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M^n}{1-M} |x_1 - x_0| \leftarrow \varepsilon \text{ estimar } n$$

⇒ aproximações sucessivas com aceleração

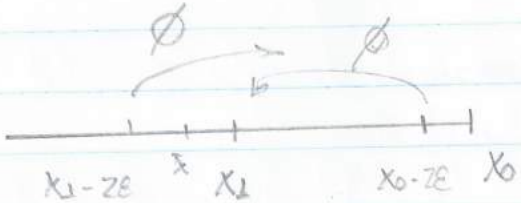
(x_n) crescente: $x_{n+1} = \phi(x_n + 2\varepsilon)$

se $x_{n+1} < x_n + 2\varepsilon$ para e $\bar{x} \approx x_n + \varepsilon$



(x_n) decrescente: $x_{n+1} = \phi(x_n - 2\varepsilon)$

se $x_{n+1} > x_n - 2\varepsilon$ para e $\bar{x} \approx x_n - \varepsilon$



(x_n) alternado: $\bar{x}$ está entre x_n e x_{n-1}

parar se $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ e usar $\bar{x} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$

c/ precisão ε

⇒ convergência quadrática de Newton

$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C\,|x_n - \bar{x}|^2$, $C = \frac{\max |f''|}{2 \min |f'|}$

converge se $f' \neq 0$

- supondo que $f'(\bar{x}) = 0$

escreveremos $f(x) = (x - \bar{x})^\alpha g(x)$, $\alpha > 1$ e $g(\bar{x}) \neq 0$

$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{\alpha}$

a convergência será linear com $M \approx 1 - \frac{1}{\alpha}$ desde que

x_0 seja escolhido próximo de $\bar{x}$

◦ Sistemas Lineares

◦ Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2,1x + 1,5y + 4,2z = 1,0 \\ -3,5x - 2,7y + 1,2z = 2,0 \\ 1,1x + 3,4y + 3,1z = 3,0 \end{cases}$$

2 a.s.

2,1 / -3,5 = -0,60

1,1 / 3,5 = -0,31

(A)

$$\begin{array}{c|cccc} \text{I} & 2,1 & 1,5 & 4,2 & 1,0 \\ \text{II} & -3,5 & -2,7 & 1,2 & 2,0 \\ \text{III} & 1,1 & 3,4 & 3,1 & 3,0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} \text{II} & -3,5 & -2,7 & 1,2 & 2,0 \\ \text{I} & 2,1 & 1,5 & 4,2 & 1,0 \\ \text{III} & 1,1 & 3,4 & 3,1 & 3,0 \end{array} \quad \begin{matrix} (0,6) \\ + \\ + \end{matrix} \quad (0,31)$$

$p_1 = 2$

-0,1 / 2,6 = -0,038

$$\begin{array}{c|cccc} \text{II} & -3,5 & -2,7 & 1,2 & 2,0 \\ \text{I} & -0,60 & -0,10 & 4,9 & 2,2 \\ \text{III} & -0,31 & 2,6 & 3,5 & 3,6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} \text{II} & -3,5 & -2,7 & 1,2 & 2,0 \\ \text{III} & -0,31 & 2,6 & 3,5 & 3,6 \\ \text{I} & -0,60 & -0,10 & 4,9 & 2,2 \end{array} \quad (0,038) \; +$$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

(Ã)

$$\begin{array}{c|cccc} \text{II} & -3,5 & -2,7 & 1,2 & 2,0 \\ \text{III} & -0,31 & 2,6 & 3,5 & 3,6 \\ \text{I} & -0,60 & -0,038 & 5,0 & 2,3 \end{array} \Rightarrow$$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

$z = 2,3 / 5,0 = 0,46$

$y = 3,6 - 0,46 \cdot 3,5 / 2,6 = 0,77$

$x = 2 - 1,2 \cdot 0,46 + 2,7 \cdot 0,77 / -3,5 = -1,0$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 \\ 0,77 \\ 0,46 \end{bmatrix}$$

OBS.: $\det A = (-1)^{\text{trocas}} \det \tilde{A} = (-1)^2 \cdot [(-3,5)(2,6)(5,0)]$

→ refinamento soluções

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 \\ 0,77 \\ 0,46 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{resposta "exata": } \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,01837 \\ 0,78663 \\ 0,46634 \end{bmatrix}$$

- cálculo de $r^{(0)}$ (4as)

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,9870 \\ 1,972 \\ 2,944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01300 \\ 0,02700 \\ 0,05600 \end{bmatrix}$$

- converter $r^{(0)}$ 4as → 2as

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,013 \\ 0,027 \\ 0,056 \end{bmatrix}$$

- resolver $A \cdot C^{(0)} = r^{(0)} \dashrightarrow \tilde{A} \cdot C^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

$$r^{(0)} = \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,013 \\ 0,027 \\ 0,056 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{permutas}} \begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{I} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,027 \\ 0,056 \\ 0,013 \end{bmatrix} \quad (0,31) \quad (0,60)$$

$$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{I} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,027 \\ 0,064 \\ 0,029 \end{bmatrix} \quad (0,038) \Rightarrow \tilde{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,027 \\ 0,064 \\ 0,031 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{C}^{(0)} = \tilde{r}^{(0)} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3,5 & -2,7 & 1,2 & 0,027 \\ & 2,6 & 3,5 & 0,064 \\ & & 5,0 & 0,031 \end{array}\right]$$

$C_3 = 0,031 / 5,0 = 0,0062$

$C_2 = 0,064 - 3,5 \cdot 0,0062 / 2,6 = 0,016$

$C_1 = 0,027 - 1,2 \cdot 0,0062 - 2,7 \cdot 0,016 / -3,5 = -0,018$

$$\tilde{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,018 \\ 0,016 \\ 0,0062 \end{bmatrix}$$

- refinando: $x^{(1)} = x^{(0)} + C^{(0)}$

$$\begin{bmatrix} -1,0 \\ 0,77 \\ 0,46 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,018 \\ 0,016 \\ 0,0062 \end{bmatrix} = x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,0 \\ 0,79 \\ 0,47 \end{bmatrix}$$

- repete-se o procedimento, obtendo $C^{(1)}$ e $x^{(2)} \dots x^{(N)}$
  - critérios de parada:
    - estabelecemos nº máximo de iterações
    - para quando $\text{var}(x^{(n)}, x^{(n+1)}) > \varepsilon$

OBS.: $\text{var}(a,b) = \dfrac{|b-a|}{|b|}$ $\begin{cases} = 0, \text{ se } a = b = 0 \\ = 1, \text{ se } a \neq b = 0 \end{cases}$

- variação relativa:

$$\text{var}(x^{(0)}, x^{(1)}) = \text{máx}\left\{ \underbrace{\frac{0}{1,0}}_{0,025};\ \underbrace{\frac{0,02}{0,79}}_{0,025};\ \underbrace{\frac{0,01}{0,47}}_{0,021} \right\}$$

⇒ nem sempre a condensação pivotal fornece o melhor resultado

- fatoração LU

$A \longrightarrow$ pivotal $\longrightarrow \tilde{A}$

$E_N \cdots E_2 E_1 A = \tilde{A} \iff A = E_1 E_2 \cdots E_N \tilde{A}$

↳ matriz elementar = obtida pela aplicação de uma operação linear à matriz identidade

(↳ aplicação de operação elementar nas linhas de A corresponde ao produto à esquerda pela matriz elementar correspondente

exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (-4) $\rightarrow +$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ = matriz elementar

exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (-4) $\rightarrow +$ $\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ B

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$E \cdot A = B$

⇒ sistema linear: $Ax = b$

$P \cdot Ax = P \cdot b \Rightarrow P$ = matriz I c/ linhas permutadas

$L \cdot Ux = P \cdot b$

$L \cdot y = Pb$

$A \longrightarrow$ pivotal $\longrightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ m_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ m_{31} & m_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}$

(I) $\Rightarrow Ly = Pb \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y$

(II) $y = Ux \Rightarrow U = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow x$

- métodos iterativos

$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ com solução $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ ⇒ aproximação inicial $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix}$

→ método de Jacobi

(J)

$$x^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}y^{(k)}}{a_{11}}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x^{(k)}}{a_{22}}$$

- convergência Jacobi

J $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

diagonal dominante: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. ⟹ critério das linhas → se a diagonal for dominante, Jacobi converge para $\bar{x}$

- erro aproximação

$L = \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \}$ ⟹ $\lambda_i = \frac{|a_{ij}| + |a_{ik}|}{|a_{ii}|}$

satisfaz critério das linhas ⟷ $L < 1$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq L \| x^{(k-1)} - \bar{x} \|_\infty$$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq L^k \| x^{(0)} - \bar{x} \|_\infty$$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq \frac{L}{1-L} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

→ método de Gauss - Seidel

GS
$$x^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} y^{(k)}}{a_{11}}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} x^{(k+1)}}{a_{22}}$$

• convergência Gauss - Seidel

• 2x2 ⇒ $M = \frac{|a_{12} \cdot a_{21}|}{|a_{11} \cdot a_{22}|}$ → $M > 1$ ⇒ trocar ordem equações
$M = 1$ ⇒ GS não funciona

• nxn ⇒ $M = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$; 3x3

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}|}{|a_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2}{|a_{33}|}$$

• convergente para $M < 1$ CRITÉRIO SASSENFELD

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq M^k \| x^{(0)} - \bar{x} \|_\infty$$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq \frac{M}{1-M} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

$$\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty$$

OBS.: critério linhas OK! ⇒ SASSENFELD OK!

• Método dos Mínimos Quadrados

• objetivo: aproximar $f \sim a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots a_n g_n = g$ minimizando erro quadrático $EQ = \langle f-g, f-g \rangle = \|f-g\|^2$

• regressão linear:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_1	f_2		f_n

queremos aproximar $f(x)$ a uma reta $y = ax + b$ minimizando

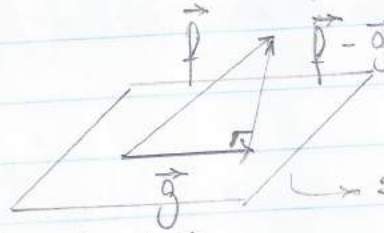
$$EQ = \sum_{j=1}^{n} (f_j - ax_j - b)^2$$

$\therefore f(x) \sim ax + b$

$$\vec{f} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{g}$$

$\vec{f} - \vec{g} \perp \vec{x}$

$\vec{f} - \vec{g} \perp \vec{1}$



$S = [\vec{x}, \vec{1}]$

$\vec{g} = a\vec{x} + b\vec{1}$

$\vec{f} - \vec{g}$ mínimo

$\langle \vec{f} - \vec{g}, \vec{x} \rangle = 0$ (I)

$\langle \vec{f} - \vec{g}, \vec{1} \rangle = 0$ (II)

(I) $\langle \vec{f}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{g}, \vec{x} \rangle = 0$

$\langle \vec{f}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{g}, \vec{x} \rangle \Rightarrow \langle \vec{f}, \vec{x} \rangle = \langle a\vec{x} + b\vec{1}, \vec{x} \rangle$

$\langle \vec{f}, \vec{x} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + b\langle \vec{1}, \vec{x} \rangle$

(II) análogo

$$\therefore \begin{cases} a\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + b\langle \vec{1}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{x} \rangle \\ a\langle \vec{x}, \vec{1} \rangle + b\langle \vec{1}, \vec{1} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{1} \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{1}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle & \langle \vec{1}, \vec{1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{f}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{f}, \vec{1} \rangle \end{bmatrix}$$

- é dado um espaço vetorial c/ produto interno e queremos aproximar um vetor $\vec{f}$ por uma combinação linear de $g_1, g_2, \dots g_n$ (L.I.)

$$f \sim a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots a_n g_n = g$$

$$\begin{matrix} & g_1 & & g_n & & & f \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ g_1 \rightarrow & \langle g_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_n, g_1 \rangle & \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \langle f, g_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_n \rangle \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ g_n \rightarrow & \langle g_1, g_n \rangle & \cdots & \langle g_n, g_n \rangle & & & \end{matrix}$$

- exemplo:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	1

$\Rightarrow$ regressão linear: $f(x) \sim ax + b$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} & x & 1 & & f \\ x & \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ 1 & & & & \end{matrix}$$

$a = 3/10$ e $b = 3/10 \Rightarrow f(x) \sim \frac{3}{10}x + \frac{3}{10}$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \sim 0{,}3\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} + 0{,}3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}3\\0{,}6\\0{,}9\\1{,}2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ regressão parabólica: $f(x) \sim ax^2 + bx + c$

$$\begin{matrix} f \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} \sim a\begin{bmatrix}0\\1\\4\\9\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2 & x & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} f \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -0{,}25 \\ b = 1{,}05 \\ c = 0{,}05 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ regressão linear com pesos:

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	1
$w(x)$	1/2	2	1

$EQ = \sum w_i (f_i - ax_i - b)^2 = \frac{1}{2}(0 - a\cdot 0 - b)^2 + 2(1 - a\cdot 1 - b)^2 + 1(1 - a\cdot 2 - b)^2$

produto interno $\langle u, v \rangle = \sum_i w_i u_i v_i$

$$f(x) \underset{w}{\sim} ax + b \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \sim a\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix}1/2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a = b = 0{,}4$$

⇒ regressão exponencial

$$f(x) \sim a e^{bx} \Rightarrow \ln f(x) \sim \ln a + bx$$
(monolog)

⇒ regressão de potência

$$f(x) \sim a x^b \Rightarrow \ln f(x) \sim \ln a + b \ln x$$
(dilog)

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{ax+b} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \sim ax + b$$

$$\Rightarrow f(x)(ax+b) \sim 1 \Rightarrow axf(x) + bf(x) \sim 1$$

• MMQ em domínio contínuo

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) v(x)\, dx$$

$$\langle u, v \rangle_w = \int_a^b u(x) v(x) \underbrace{w(x)}_{>0} dx$$

• exemplo: $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ de modo a maximizar $\int_0^1 (f(x) - ax - b)^2\, dx$

$$f(x) \sim ax + b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1{,}69 \\ b = 0{,}873 \end{matrix}$$

$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3$

$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = 1/2$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1\, dx = 1$

$\langle f, x \rangle = \dfrac{\int_0^1 xe^x\, dx}{xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx} = 1$

$\langle f, 1 \rangle = \int_0^1 e^x\, dx$

OBS.: em uma aproximação por polinômios na base canônica $f(x) \sim a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ o sistema normal obtido será

Matriz de Hilbert = $H =$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

$Hx = b$

↳ mal-condicionada (pequenas variações em b, produzem grandes variações em $\bar{x}$)

• exemplo: $|x| \sim a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$, $[-\pi, \pi]$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$

$\langle 1, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0$

$\langle 1, \operatorname{sen} x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$

$\langle \operatorname{sen} x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx = 0$

$\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \pi$

$\langle \cos x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$

↳ $\frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\langle 1, |x| \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx =$ área $= \pi^2$

$\langle \operatorname{sen} x, |x| \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow$ impar $\therefore = 0$

$\langle \cos x, |x| \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx \Rightarrow$ par $\therefore = 2\int_0^{\pi} x \cos dx = -4$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \cos x \\ \operatorname{sen} x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} |x| \\ \begin{bmatrix} \pi^2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_0 = \pi/2$

$\Rightarrow a_1 = -4/\pi$

$b_1 = 0$

- famílias ortogonais

- $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma família ortogonal com $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ p/ $i \neq j$

- $f(x) \sim a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots a_n g_n$

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle g_2, g_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \langle g_n, g_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, g_1 \rangle \\ \langle f, g_2 \rangle \\ \langle f, g_n \rangle \end{bmatrix}$$

$$\therefore a_j = \frac{\langle f, g_j \rangle}{\langle g_j, g_j \rangle}$$

- exemplo: família $\{1, \cos kx, \operatorname{sen} kx\}_{k=1}^{\infty}$ é ortogonal em $[-\pi, \pi]$

$$\langle 1, \cos kx \rangle = \langle 1, \operatorname{sen} kx \rangle = \langle \cos kx, \operatorname{sen} jx \rangle = 0$$

$$\langle \cos kx, \cos jx \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

$$\langle \operatorname{sen} kx, \operatorname{sen} jx \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = 2\pi$$

toda aproximação por polinômios trigonométricos $f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ terá coeficientes:

$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{\langle f(x), \cos(kx) \rangle}{\langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{\langle f(x), \operatorname{sen}(kx) \rangle}{\langle \operatorname{sen}(kx), \operatorname{sen}(kx) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

OBS.: cada parcela $a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$ é chamada de harmônico de ordem k

$$a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) = A_k \cos(kx + \phi_k)$$

A_k: amplitude; ϕ_k: fase

$$A_k \cos(kx + \phi_k) = A_k (\cos(kx) \cdot \cos\phi_k - \operatorname{sen}(kx) \cdot \operatorname{sen}\phi_k)$$

$$\therefore \begin{cases} a_k = A_k \cos\phi_k \\ b_k = -A_k \operatorname{sen}\phi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k^2 + b_k^2 = A_k^2 \\ \operatorname{tg}\phi_k = -\dfrac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

$$\boxed{A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\phi_k = \operatorname{arctg}(-b_k/a_k)}, \; a_k \neq 0$$

- construção polinômios ortogonais

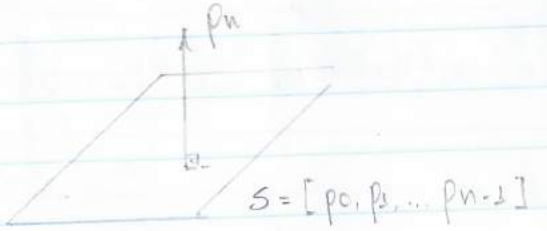
2 → construir família $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ que seja ortogonal em $[a,b]$ ⇒ $\langle p_i, p_j \rangle = \int_a^b p_i p_j \, dx = 0$

grau $p_j = j$

termo principal de $p_j(x)$ normalizado ⇒ $p_j(x) = x^j + \text{resto}$

coeficiente unitário ⇒ polinômio mônico

demonstração:



$p_n \perp p_0, p_1, \dots p_{n-1}$

- $p_{n+1}(x) = x^{n+1} + \text{resto}$ e $p_n(x) = x^n + \text{resto}$

$g(p_{n+1}(x) - x p_n(x)) \leq n$

$\therefore p_{n+1}(x) - x p_n(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots a_n p_n(x)$

- $a_j = \dfrac{\langle p_{n+1}(x) - x p_n(x), p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle}$, $0 \leq j \leq n$

- $\langle p_{n+1}(x) - x p_n(x), p_j \rangle = \langle p_{n+1}(x), p_j \rangle - \langle x p_n, p_j \rangle$

$= -\langle p_n, x p_j \rangle = 0$ ($\langle p_{n+1}(x), p_j \rangle = 0$, $\langle p_n, p_j \rangle = 0$)

$0 \leq j \leq n-2$

$$p_{n+1} - x p_n = a_{n-1} p_{n-1} + a_n p_n$$

$a_{n-1} = \dfrac{\langle p_n, x p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}$ e $a_n = \dfrac{\langle p_n, x p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$

• mudança de variável (polinômios ortogonais)

família ortogonal $\{p_j\}$ em $[a,b] \Rightarrow$ família ortogonal $\{q_j\}$ em $[c,d]$

$\{p_j\} \Rightarrow f(x)$ $\quad$ $\{p_j\} \Rightarrow F(y)$

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c} \Rightarrow \frac{dx}{b-a} = \frac{dy}{d-c}$$

$$\left\langle \frac{f(x)}{b-a}, g(x) \right\rangle = \left\langle \frac{F(y)}{d-c}, G(y) \right\rangle$$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\frac{dx}{b-a} = \int_c^d F(y)\,G(y)\,\frac{dy}{d-c}$$

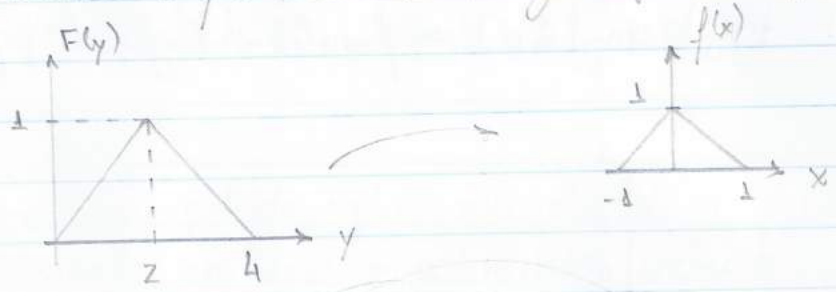
f e g são ortogonais em $[a,b]$ $\Downarrow$ F e G serão em $[c,d]$

$$f(x) \sim a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots a_n p_n(x)$$
$$F(y) \sim \tilde{a}_0 P_0(y) + \tilde{a}_1 P_1(y) + \dots \tilde{a}_n P_n(y)$$

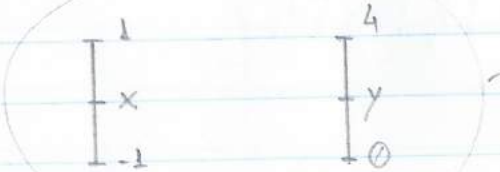
$$\therefore a_j = \frac{\langle f(x), p_j(x) \rangle}{\langle p_j(x), p_j(x) \rangle} = \frac{\langle F(y), P_j(y) \rangle}{\langle P_j(y), P_j(y) \rangle} = \tilde{a}_j$$

• exemplo: a família $\{1, x, x^2 - 1/3\}$ é ortogonal em $[-1, 1]$.

Aproximar a função dada a seguir por um polinômio de grau ≤ 2



solução:



$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{4}$$

$$x = y/2 - 1$$

família ortogonal $\{1, x, x^2 - 1/3\} \Rightarrow \{1, y/2 - 1, (y/2 - 1)^2 - 1/3\}$

$$f(x) \sim a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$$
$$F(y) \sim a_0 P_0(y) + a_1 P_1(y) + a_2 P_2(y)$$

$$a_0 = \frac{\langle f(x), p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{2}$$

(área)

$$a_1 = \frac{\langle f(x), p_1(x) \rangle}{\langle p_1(x), p_1(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0$$

(ímpar)

$$a_2 = \frac{\langle f(x), p_2(x) \rangle}{\langle p_2(x), p_2(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3) f(x)\,dx}{\int (x^2 - 1/3)^2\,dx} = -\frac{15}{16}$$

$\rightarrow 2\int_0^1 (1 - x)(x^2 - 1/3)\,dx$

$[a,b]$ $f(x) \sim \frac{1}{2} p_0(x) + 0 \cdot p_1(x) - \frac{15}{16} p_2(x)$

$[c,d]$ $F(y) \sim \frac{1}{2} P_0(y) + 0 \cdot P_1(y) - \frac{15}{16} P_2(y)$

$1 \qquad \frac{y-1}{2} \qquad \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1/3$

$\therefore F(y) = -\frac{15y^2 + 60y - 8}{64}$

- análise harmônica discreta

$x_j = j \cdot \frac{\pi}{N}$, $1 \le j \le 2N$ onde $N \in \mathbb{N}^*$. Então a família $\{1, \cos(Nx), \cos(kx), \operatorname{sen}(kx)\}_{k=1}^{N-1}$ é ortogonal segundo o produto interno: $\langle u, v \rangle = \sum_{1}^{2N} u(x_j)\, v(x_j)$

além disso, $\langle 1, 1 \rangle = \langle \cos Nx, \cos Nx \rangle = 2N$

$\langle \cos kx, \cos kx \rangle = \langle \operatorname{sen} kx, \operatorname{sen} kx \rangle = N$

- $N = 4 \Rightarrow x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$, $x_4 = \pi$

$x_5 = 5\pi/4$, $x_6 = 3\pi/2$, $x_7 = 7\pi/4$, $x_8 = 2\pi$

$\therefore \{1, \cos 4x, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \cos 3x, \operatorname{sen} 3x\}$ tem tabelas ortogonais

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -1 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -1 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$

norma $2N$ | norma $2N$ | norma N | norma N