Cálculo Numérico P1 - 2018 — Akira 2018

I) Sistemas Lineares

→ Algoritmo da decomposição de Gauss:

$$E_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$
$$E_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}$$
$$\vdots$$
$$E_n: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] = [a_{ij}], \text{ com}$$

$1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n+1$

Matriz aumentada — Processo de eliminação

Passo 1: p/ i = 1 ... n-1 executar passos 2 a 4

Passo 2: p é o menor inteiro com $i \le p \le n$ e $a_{pi} \neq 0$

se não houver p inteiro então → SAÍDA
PARAR o algoritmo ↳ Mais incógnitas que eqs.

Passo 3: se $p \neq i$, então $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$ ← trocar
↳ caso o primeiro elemento da linha seja 0.

Passo 4: para $j = i+1, \dots, n$ executar 5 e 6

Passo 5: $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

Passo 6: executar $(E_j - m_{ji}E_i) \to (E_j)$

Passo 7: se $a_{nn} = 0$ então SAÍDA
PARE → não há sol. única

Passo 8: executar $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$ → substituição iniciar o último termo
← substituição.

Passo 9: para $i = n-1, \dots, 1$ fazer

$$x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]/a_{ii}$$

Passo 10: SAÍDA
PARE

Exemplo.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Solução:

$i = 1$, $p = 1$ → $m_{ji} = m_{j1} = \frac{a_{j1}}{a_{11}}$

com $j = 2, 3, 4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

se $p = i$ → $p \neq i$
$a_{pi} = 0$ → $p = 3$
→ $E_3 \leftrightarrow E_2$
$i = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

$i = 3$ (último i)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Obs: o alg. falha quando temos duas ou mais linhas l.d.

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_3 = \frac{[-4 - (-1)x_4]}{-1} = 2$$

$$x_2 = \frac{[6 - [(-1)x_3 + x_4]]}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{[-8 - [(-1)x_2 + 2x_3 + (-1)x_4]]}{1} = -7$$

Obs: $Ax = b$
- Se mudar linhas → mudar b
- Se mudar colunas → mudar x

→ Fatoração de Matrizes

- Se pudermos decompor A em L e U, o sistema linear dado por $Ax = b$ poderá ser resolvido da forma $y = Ux$ e $Ly = b$. Isso é vantajoso pois L e U estão "carregados de 0".

Teorema: se a eliminação de Gauss puder ser realizada no (S.L) $Ax = b$ sem trocas de linhas,

então a matriz A pode ser fatorada no produto de uma matriz triangular inferior L e uma matriz triangular superior U. tal que A = LU em que:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

coeficientes $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

Diagonal é sempre 1.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

cópia da 1ª linha

2ª linha após a primeira eliminação

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

$m = \frac{2}{1}$; $m = \frac{-1-3}{-1} = 4$

L U

Algoritmo de decomposição LU:

Admitimos a existência da decomposição:

Passo 1: para $j = 1, \ldots, n$: calcular $\begin{cases} l_{j1} = a_{j1}/u_{11} \\ u_{1j} = a_{1j} \end{cases}$ (1ª coluna de L; 1ª linha de U)

Passo 2: para $i = 2, \ldots, n-1$ executar 3 e 4:

Passo 3: para $j = i, \ldots, n$ calcular

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

Passo 4: para $j = i, \ldots, n$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right]$$

Passo 5: SAÍDA (l_{ij} para $j = 1 \ldots i$ e $i = 1 \ldots n$)

SAÍDA (u_{ij} para $j = 1 \ldots n$ e $i = 1 \ldots n$)

Para a resolução do sistema temos as fórmulas:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{e} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right]$$

Teorema: se $\det A \neq 0$ então $\exists P$ matriz de permutação tq $PA = LU \Rightarrow A = (P^t L) U$.

Para resolver o sistema fazemos $P^t L \cdot y = b$ e $Ux = y$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{PA}_{A'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ⇒ Matriz Permutação: troca de linhas da matriz identidade

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

L U

$A = (P^t L) \cdot U$, onde $P^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P^t L \cdot y = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 4$; $y_2 = 3/2$

$-\frac{y_1}{2} + y_3 = 3/2 \Rightarrow y_3 = \frac{5}{2}$

$$U_x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} =$$

$5x_3 = 5/2 \Rightarrow x_3 = 1/2$

$2x_2 + x_3 = 3/2 \Rightarrow x_2 = 1/2$

$2x_1 - x_2 + 8x_3 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1 - \frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = \frac{8}{2} - \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 1/4$

→ Condensação pivotal (ou pivotamento ~~parcial~~ ~~parcial~~): Trocar linhas de forma que o pivô no início de cada etapa ($i = 1, \dots, n-1$) seja o número de maior módulo dentre os elementos da $i$ésima coluna abaixo ou na diagonal. → para que a solução convirja para o valor exato.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 \\ 27 & 110 & -3 \\ 22 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 134 \\ 38 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \\ 0 & -87,7 & 16,5 & -71 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,7 & 16,5 & -71 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,7 & 16,5 & -71 \\ 0 & 0 & 52,1 & 52,1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1,0 \\ x_2 = 0,998 \\ x_1 = 1,0 \end{cases}$$

Refinamento de Soluções:

- Se $\tilde{x}$ for uma aproximação para a solução x de $Ax = b$ e o vetor resíduo $r = b - A\tilde{x}$ tiver a propriedade de que $\|r\|$ é pequena então $\|x - \tilde{x}\|$ será pequena. Porém isso nem sempre é verdadeiro, por isso calculamos um fator de correção c de forma a corrigir a solução aproximada a partir do valor residual

$$\boxed{\begin{aligned} r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} \\ r^{(k)} &= Ac^{(k)} \end{aligned}}$$

- $x^{(k)}$: k-ésima solução aproximada
- $c^{(k)}$: k-ésimo fator de correção
- $r^{(k)}$: k-ésimo resíduo

Primeiro Refinamento:

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

$Ac^{(0)} = r^{(0)} \Rightarrow c^{(0)}$

$x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)}$

Segundo Refinamento:

$r^{(1)} = b - Ax^{(1)}$

$Ac^{(1)} = r^{(1)} \Rightarrow c^{(1)}$

$x^{(2)} = x^{(1)} + c^{(1)}$

Para que o resíduo seja significativo: (envolve subtração de valores de mesma grandeza)

- Calcular o resíduo com dupla precisão (dobro de algarismos significativos)
- Resp. final do resíduo ⇒ voltar a precisão simples.

Exemplo: refinamento com dois algarismos significativos.

$$\begin{bmatrix} 3,1 & 1,2 & 2,3 \\ 2,4 & -2,5 & 1,1 \\ -4,3 & 1,3 & 2,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}$$

Sol:

Da Eliminação de Gauss e da ~~refinamento~~ condensação pivotal obtemos que:

$$x^{(0)} = [-0,21 \quad -0,48 \quad 1,0]^t$$

(1) Cálculo de resíduo com dupla precisão

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix}1,0\\2,0\\3,0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3,1 & 1,2 & 2,3\\2,4 & -2,5 & 1,1\\-4,3 & 1,3 & 2,7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,21\\-0,48\\1,0\end{bmatrix}$$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix}1,0\\2,0\\3,0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0,1073\cdot 10^{1}\\0,1796\cdot 10^{1}\\0,2979\cdot 10^{1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,7300\cdot 10^{-1}\\0,2040\\0,2100\cdot 10^{-1}\end{bmatrix}$$

4 alg. significativos

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix}-0,073\\0,20\\0,021\end{bmatrix}$$

2 alg. significativos

(2) Achar o valor e de correção:

$$Ac^{(0)} = r^{(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}3,1 & 1,2 & 2,3\\2,4 & -2,5 & 1,1\\-4,3 & 1,3 & 2,7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,073\\0,20\\0,021\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-4,3 & 1,3 & 2,7 & 0,021\\ & 2,1 & 4,2 & -0,058\\ & & 6,2 & 0,16\end{array}\right]$$

$c_1 = -0,014$, $c_2 = -0,081$, $c_3 = 0,026$

(3) Refinar $x^{(0)}$:

$$x^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix}-0,21\\-0,48\\1,0\end{bmatrix}}_{x^{(0)}} + \underbrace{\begin{bmatrix}-0,014\\-0,081\\0,026\end{bmatrix}}_{c^{(0)}} = \begin{bmatrix}-0,22\\-0,56\\1,0\end{bmatrix}$$

- Podemos calcular a variação relativa da solução refinada $x^{(1)}$ com $x^{(0)}$.
- Definamos

~~$Var^{(k)}(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = máx$~~

$$Var^*(a,b) = \left|\frac{b-a}{b}\right| \text{ se } b \neq 0$$

(b: $x_i^{(k)}$; a: $x_i^{(k-1)}$)

$Var^*(a,b) = 0$ se $a = b = 0$

$Var^*(a,b) = 1$ se $b = 0$ e $a \neq 0$.

$Var = máx\{Var^*(x^{(k)}, x^{(k-1)})\}$

Dado ~~Definindo~~ $\varepsilon > 0$, o processo iterativo para quando $Var \leq \varepsilon$.

Exemplo: $x^{(0)}$ $x^{(1)}$

$$Var = máx\left\{\begin{bmatrix}-0,21\\-0,48\\1,0\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}-0,22\\-0,56\\1,0\end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\left|\frac{-0,22+0,21}{-0,22}\right|; \left|\frac{-0,56+0,48}{-0,56}\right|, \left|\frac{1-1}{1}\right|\right\} =$$

$$= \{0,045; 0,14; 0\} = 0,14 = 15\%$$

- Condicionamento: refere-se a segurança relativa de que um pobr resíduo pequeno implique uma solução aproximada correspondentemente precisa

Número de Condicionamento: $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, onde

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Se $K(A)$ próximo de 1 o sistema é bem condicionado. Caso contrário, o sistema é mal condicionado e a solução $x^{(0)}$ pode estar muito distante da solução exata e o refinamento pode não convergir.

O mal condicionamento pode ocorrer devido ao fato de um sistema ser muito sensível a mudanças (exemplo: mudança na precisão da matriz A).

→ Métodos iterativos:

- Pouco recomendados para sistemas lineares de pequenas dimensões já que o tempo para se obter a precisão desejada excede o tempo necessário para se obter com métodos diretos (decomposição LU, eliminação de Gauss, etc.).
- Usado para sistemas de grandes dimensões com grande porcentagem de zeros.
- Usados para contornar o mal condicionamento.

→ Método de Gauss-Seidel

"A ideia do método é isolar a incógnita x_i em cada linha i. Na ~~linha~~ incógnita x_{i+1} utilizamos o valor calculado na linha anterior x_i."

Dado o sistema $Ax = b$ ~~temos~~ e a aprox inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)} \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)} \right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n} x_n^{(k)} \right]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1} x_1^{(k+1)} - a_{n2} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)} \right]$$

O critério de parada do método é

$$Var^*(a,b) = \left| \frac{b - a}{b} \right| \text{ se } b \neq 0$$

($a = x_i^{(k-1)}$, $b = x_i^{(k)}$)

$Var^*(a,b) = 0$ se $a = b = 0$

$Var^*(a,b) = 1$ se $a \neq 0$ e $b = 0$

$Var = \max \{ Var^*(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \}$

Se $Var < \varepsilon$, sendo $\varepsilon > 0$ dado, para o algoritmo.

Exemplo: $x^{(0)} = [0,0,0,0]^t$; $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{6}{10} + \frac{x_2^{(k-1)}}{10} - \frac{2x_3^{(k-1)}}{10}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{25}{11} + \frac{1}{11} x_1^{(k)} + \frac{1}{11} x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11} x_4^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{11}{10} - \frac{1}{5} x_1^{(k)} + \frac{1}{10} x_2^{(k)} + \frac{1}{10} x_4^{(k-1)}$$

$$x_4^{(k)} = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} x_2^{(k)} + \frac{1}{8} x_3^{(k)}$$

Realizando as iterações:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6000	2,3272	-0,9873	0,8789
2	1,0300	2,037	-1,014	0,9844
3	1,0065	2,0036	-1,0025	0,9983
4	1,0009	2,0003	-1,0003	0,9999
5	1,0001	2,0000	-1,0000	1,0000

$Var = 8 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} = \varepsilon$

Logo $\tilde{x} = x^{(5)} = [1,0001 \quad 2,0000 \quad -1,0000 \quad 1,0000]^t$

→ **Convergência do Método de Gauss-Seidel:**

- Para $n = 2$:

Dado $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$, com $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$.

A iteração de GS é $\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^{(k-1)} \right] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^{(k)} \right] \end{cases}$

com $k \geq 1$. Logo $x^{(k)}$ converge $\Leftrightarrow \left| \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}} \right| < 1$

Se $\left| \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}} \right| > 1$ podemos trocar linhas para que convirja.

- Para n qualquer:

Critério de Sassenfeld

Definimos $\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} = \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \dots + |a_{2n}|}{|a_{22}|}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}| + |a_{34}| + \dots + |a_{3n}|}{|a_{33}|}$$

Logo, $\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right]$, com $i = 2, \dots, n$

Prop: seja $M = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i$. Se $M < 1$ então $x^{(k)}$ convirgirá para x quando $k \to \infty$ por Gauss-Seidel. → Cond. necessária mas não suficiente!

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0_1} \\ \alpha_{0_2} \\ \alpha_{0_3} \end{bmatrix}$$ — tanto faz!

$\beta_1 = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$\beta_2 = \frac{3/4 \cdot 1 + 1}{2} = 7/8$

$\beta_3 = \frac{3/4 \cdot 1 + 7/8 \cdot 2}{3} = 5/6$

$\therefore \beta_{máx} = 7/8 < 1$

$x^{(k)}$ converge por GS para x

→ Para cada iteração!

Prop (erro de Gauss-Seidel por Sassenfeld): seja $M = \max_{1 \le i \le n} \beta_i$. Dado $\varepsilon > 0$, se

$\max_{1 \le j \le n} |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \le \frac{1-M}{M}\varepsilon$, $k \ge 1$.

(número da iteração; índice do valor)

$|\Delta x_i^{(k+1)}|$

então $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \le \varepsilon$.

↳ pode ser usado como critério de parada!

• Para o processo todo

Critério das Linhas: $\|x^{(k)} - \bar{x}\| \le \frac{M^k}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

Prop: se os coeficientes de A satisfazem

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| < 1$$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ com $|a_{ii}| \ne 0$

então a sequência $x^{(k)}$ de GS converge para $\bar{x}$ (solução exata de $Ax = b$).

↳ é mais fraco que o Critério de Sassenfeld

↳ para cada linha da matriz, somamos seus coeficientes que não estão na diagonal e depois dividimos pelo termo da diagonal. Se para todas as linhas essa conta der menor que 1 então temos convergência por Gauss-Seidel.

↳ podemos trocar as linhas da matriz para que haja convergência por este critério.

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ → $\frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} > 1$; → $\frac{8+2}{1} = 10 > 1$ → Não converge; → $\frac{5}{6} < 1$

$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ → $3/8$; → $3/4$; → $5/6$ → Converge

Obs (Método de Jacobi): assim como no Método de Gauss-Seidel, isolamos uma incógnita e realizamos as iterações. Mas neste método, de uma iteração para outra, não utilizamos os valores calculados nas iterações anteriores.

→ Método SOR (sobre-relaxamento)

A iteração de Gauss-Seidel é

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$$

Podemos melhorar a iteração de Gauss-Seidel utilizando o SOR, ou seja, acelerar a convergência:

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1+i}^{n} x_j^{(k-1)}\right)$$

↳ é SOR se $\omega > 1$.

Exemplo:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ 0x_1 - x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

$x^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^t$ e $\omega = 1{,}25$.

Por Gauss-Seidel:

$x_1^{(k)} = -0{,}75x_2^{(k-1)} + 6$

$x_2^{(k)} = -0{,}75x_1^{(k)} + 0{,}25x_3^{(k-1)} + 7{,}5$

$x_3^{(k)} = 0{,}3125x_2^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)} - 7{,}5$

$0{,}25x_2^{(k)} - 6$

Pelo SOR:

$$x_1^{(k)} = -0{,}25x_1^{(k-1)} + 1{,}25\left(-0{,}75x_2^{(k-1)} + 7{,}5\right) =$$

$$= -0{,}25x_1^{(k-1)} - 0{,}9375x_2^{(k-1)} + 7{,}5$$

$$x_2^{(k)} = -0{,}25x_2^{(k-1)} + 1{,}25\left(-0{,}75x_1^{(k)} + 0{,}25x_3^{(k-1)} + 7{,}5\right) =$$

$$= -0{,}9375x_1^{(k)} - 0{,}25x_2^{(k-1)} + 0{,}3125x_3^{(k-1)} + 9{,}375$$

$$x_3^{(k)} = 0{,}3125x_2^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)} + 1{,}25\left(0{,}25x_2^{(k)} - 6\right) =$$

$$= 0{,}3125x_2^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)} - 7{,}5.$$

Basta realizar as iterações!

II) Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

→ MMQ: caso discreto

Queremos saber como os dados x_i se relacionam com os dados y_i. Esta relação pode ser feita através de uma função (afim, quádrica, etc.). No entanto, essa função é apenas uma aproximação do relacionamento verdadeiro entre os dados. Dessa forma, utilizamos o MMQ para reduzir ao máximo a diferença entre esta aproximação e a relação real.

O erro a ser minimizado é:

$$E(\underbrace{a_0, a_1, \dots, a_m}_{\text{coeficientes}}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{f(x_i)}_{y_i} - g(x_i)\right)^2, \text{ com}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$$

Para minimizar o erro faremos:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_j} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0$$

Isto é o mesmo que projetar a relação real no subespaço gerado por $g_m, \dots, g_1, g_0, 1$.

• $m = 1$: → aproximar por uma reta

$$\begin{matrix} & \downarrow x & \downarrow 1 \\ x \to & \end{matrix}\begin{bmatrix} \langle x, x\rangle & \langle 1, x\rangle \\ \langle x, 1\rangle & \langle 1, 1\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, x\rangle \\ \langle f, 1\rangle \end{bmatrix}$$

onde $1 = (1, 1, \dots, 1)$.

$$g(x) = a_1 \cdot x + a_0 \simeq f(x)$$

• $m = 2$ → aproximar por um polinômio de grau 2

$$\begin{matrix} & \downarrow x^2 & \downarrow x & \downarrow 1 \\ x^2 \to & \\ x \to & \\ 1 \to & \end{matrix}\begin{bmatrix} \langle x^2, x^2\rangle & \langle x, x^2\rangle & \langle 1, x^2\rangle \\ \langle x^2, x\rangle & \langle x, x\rangle & \langle 1, x\rangle \\ \langle x^2, 1\rangle & \langle x, 1\rangle & \langle 1, 1\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, x^2\rangle \\ \langle f, x\rangle \\ \langle f, 1\rangle \end{bmatrix}$$

Logo, $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \simeq f(x)$.

• m = qualquer e funções $\{g_k\}_0^{k=m}$ não necessariamente polinomial.

$$\begin{matrix} & \downarrow g_m & \downarrow g_{m-1} & & \downarrow g_0 \\ g_m \to & \\ g_{m-1} \to & \\ \vdots & \\ g_0 \to & \end{matrix}\begin{bmatrix} \langle g_m, g_m\rangle & \langle g_{m-1}, g_m\rangle & \cdots & \langle g_0, g_m\rangle \\ \langle g_m, g_{m-1}\rangle & \langle g_{m-1}, g_{m-1}\rangle & \cdots & \langle g_0, g_{m-1}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle g_m, g_0\rangle & \langle g_{m-1}, g_0\rangle & \cdots & \langle g_0, g_0\rangle \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f, g_m\rangle \\ \langle f, g_{m-1}\rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_0\rangle \end{bmatrix}$$

Exemplo: $m = 1$ → regressão linear

x_i	0	1	2
$f(x_i) = y_i$	0	1	1

$$\langle x, x\rangle = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\langle x, 1\rangle = 1\cdot0 + 1\cdot1 + 1\cdot2 = 3 = \langle 1, x\rangle$$

$$\langle 1, 1\rangle = 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 3$$

$$\langle y, x\rangle = 0\cdot0 + 1\cdot1 + 2\cdot1 = 3$$

$$\langle y, 1\rangle = 0\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminação de Gauss ou Decomposição LU}} \begin{matrix} a_1 = 1/2 \\ a_0 = 1/6 \end{matrix}$$

$$f(x) = y \simeq \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$$

$$E(1/2, 1/6) = (0 - f(0))^2 + (1 - f(1))^2 + (1 - f(2))^2 =$$

$$= 0{,}17^2 + (1 - 0{,}67)^2 + (1 - 1{,}17)^2 = 0{,}1667.$$

Exemplo: $m=2$ ∴ polinomial

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	1

$\langle x^2, x^2 \rangle = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 9\cdot 9 = 98$

$\langle v, x^2 \rangle = \langle x^2, v \rangle = \langle x, x \rangle = 1 + 4 + 9 = 14$

$\langle x^2, x \rangle = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 9\cdot 3 = 36 = \langle x, x^2 \rangle$

$\langle v, x \rangle = \langle x, v \rangle = 1 + 2 + 3 = 6$

$\langle v, v \rangle = 4$

$$\begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$a_2 = -0,25$; $a_1 = 1,05$; $a_3 = 0,05$.

$f(x) \cong -0,25x^2 + 1,05x + 0,05$.

Exemplo: aproximar f por uma função $g(x) = a_0 g_0 + a_1 g_1$, onde $g_0(x) = x$ e $g_1(x) = \cos x$

$\curvearrowright m = 2$

x	0	1,5	3	4,5	6,0
$f(x)$	1,0	1,5	2,0	4,3	7,0

$\langle g_0, g_0 \rangle = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 67,5$

$\langle g_1, g_1 \rangle = \sum_{i=1}^{5} \cos^2 x_i = 2,951$

$\langle g_0, f \rangle = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 69,71$

$\langle g_0, g_1 \rangle = \langle g_1, g_0 \rangle = 1,948$

$\langle g_1, f \rangle = \sum_{i=1}^{5} \cos x_i \cdot y_i = 6,76$

$$\begin{bmatrix} 67,5 & 1,948 \\ 1,948 & 2,951 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,948 \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,951 & 1,948 \\ 1,948 & 67,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,76 \\ 69,71 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1,64$; $a_0 = 0,9854$

Logo, $f(x) \cong g(x) = 1,64 \cos x + 0,9854 \cdot x$

→ Sistemas Sobredeterminados

São sistemas com mais equações (linhas) do que ~~colunas~~ incógnitas (colunas). Nesses tipos de sistemas não temos uma solução exata. Logo, utilizamos o sistema normal para chegar a uma solução aproximada.

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 = b_1 \\ c x_1 + d x_2 = b_2 \\ e x_1 + f x_2 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix}}_{u} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ d \\ f \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\therefore \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \begin{bmatrix} \langle u,u \rangle & \langle u,v \rangle \\ \langle v,u \rangle & \langle v,v \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle b, x_1 \rangle \\ \langle b, x_2 \rangle \end{bmatrix}$$

Outra abordagem possível seria utilizar a inversa:

$$\boxed{x^* = (A^t \cdot A)^{-1} A^t \cdot y}$$

Dessa forma a solução aproximada seria dada por $A \cdot x^*$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \therefore u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

→ MMQ: caso contínuo

Agora, os dados que queremos relacionar não estão mais na forma de elementos individuais. Mas sim na forma de intervalos e funções. Logo, dado um intervalo I vamos relaciona-lo por meio de uma função g com a função real f.

Na prática, não teremos mais um somatório e sim uma integral.

O erro a ser minimizado será:

$E(a_0, \dots, a_m) = \int_{x_1}^{x_F} (f(x) - g(x))^2 dx$, onde

$g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot g_k(x)$.

Suponhamos que desejemos ~~minimizar~~ aproximar a função $f(x)$ pela função $g(x) = a_m g_m + \dots + g_0 \cdot a_0$ no intervalo $I = [\alpha_0, \alpha_1]$. Logo, o sistema normal será:

$$\begin{matrix} \\ g_m \\ g_{m-1} \\ \vdots \\ g_0 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} g_m & g_{m-1} & \cdots & g_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \langle g_m, g_m \rangle & \langle g_{m-1}, g_m \rangle & \cdots & \langle g_0, g_m \rangle \\ \langle g_m, g_{m-1} \rangle & \langle g_{m-1}, g_m \rangle & \cdots & \langle g_0, g_{m-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle g_m, g_0 \rangle & \langle g_{m-1}, g_0 \rangle & \cdots & \langle g_0, g_0 \rangle \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, g_m \rangle \\ \langle f, g_{m-1} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_0 \rangle \end{bmatrix}$$

onde $\langle f, g_m \rangle = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x) \cdot g_m(x) dx$ e

$\langle g_m, g_m \rangle = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} g_m(x) \cdot g_m(x) dx$, etc.

Exemplo:

Aproximar $f(x) = e^x$ por $g(x) = g_1 a_1 + g_0 a_0$, onde $g_1 = x$ e $g_0 = 1$ no intervalo $[0, 1]$

$\langle x, x \rangle = \langle g_1, g_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \langle g_1, g_0 \rangle = \langle g_0, g_1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 dx = 1$

$\langle e^x, x \rangle = \int_0^1 x e^x dx = 1$

$\langle e^x, 1 \rangle = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

$$\begin{matrix} \\ g_1 \\ g_0 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} g_1 & g_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e-1 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1{,}69$ e $b = 0{,}87$

Logo, $f(x) \tilde{=} 1{,}69x + 0{,}87$

III) Zeros de Função

→ **Método da Bissecção**

Ideia: vamos dividir o intervalo pela metade e procurar a raiz nesses intervalos.

1º passo: definir $f(x)$ ← Garante a convergência!

2º passo: escolher o intervalo adequado $I = [a, b]$

- aplicar o TVI (se $f(a) \cdot f(b) < 0$ há pelo menos uma raiz) ← garante uma raiz em I!
- verificar se $f'(x) \neq 0$ (crescente ou decrescente)
- verificar se $f''(x) \neq 0$ (não muda de concavidade).

3º passo: método iterativo

- definir $p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, onde $a_1 = a$ e $b_1 = b$
- se $f(p_1) = 0$ então $p = p_1$ ← raiz verdadeira
- se $f(p_1) \neq 0$ e $f(p_1) \cdot f(a_1) > 0$ então $p \in (p_1, b_1)$

→ $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$.

- se $f(p_2) \neq 0$ e $f(p_1) \cdot f(a_1) < 0$ então $p \in (a_1, p_1)$

→ $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$

- continuar até atingir $f(p_1) = 0$ ou o critério de parada.

Critério de parada: $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon$

Erro: $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, $n \geq 1$.

Estimar o número de iterações

→ **Método do Ponto Fixo (Aproximações Sucessivas)**:

p é um ponto fixo de $\phi \Leftrightarrow \phi(p) = p$!

Para encontrar a raiz de uma função ~~em~~ f, podemos definir uma função ϕ que tenha ponto fixo nesta raiz, ou seja, se $f(p) = 0 \Rightarrow \phi(p) = p$. Podemos definir ϕ como:

- $\phi(x) = x - f(x) \Rightarrow \phi(p) = p - f(p) = p$
- $\phi(x) = x - \lambda f(x) \Rightarrow \phi(p) = p - \lambda f(p) = p$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ideia: tomar os valores encontrados em ϕ para realizar as iterações

1º passo: isolar a variável x de forma a encontrar a função ϕ.

Exemplo: $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ (escolher um!)

$x^2 = \frac{10 - x^3}{4} \Rightarrow x = \pm\left(\frac{10-x^3}{4}\right)^{1/2}$

$\phi(x) = \left(\frac{10-x^3}{4}\right)^{1/2}$

2º passo: definir um intervalo que contenha p (raiz verdadeira).

- Realizar os mesmos procedimentos do método da bissecção para f
- No intervalo escolhido é importante que ϕ e f sejam contínuas.

3º passo: testar a convergência

- ϕ e ϕ' devem ser contínuas no intervalo
- garantir que $|\phi'| \leq k$ (k: máx de ϕ' no intervalo), $0 < k < 1$
  - ↳ testar nos extremos do intervalo
  - ↳ fazer a segunda derivada e analisar nos pontos onde ela é zero.
- verificar se $p_{n+1} = \phi(p_n)$ cai sempre dentro do intervalo.
  - ↳ analisar os máximos e mínimos de ϕ

4º passo: escolha do valor inicial p_0:

$c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \phi(c) < c \Rightarrow p_0 = a \\ \phi(c) > c \Rightarrow p_0 = b \\ \phi(c) = c \Rightarrow c = p \end{cases}$

5º passo: cálculo do número de passos iterações

$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ dado

(erro de todo processo iterativo)

6º passo: método iterativo

$p_{n+1} = \phi(p_n)$

Exemplo: $p_1 = \phi(p_0)$, $p_2 = \phi(p_1)$, $p_3 = \phi(p_2)$ ... $p_{n+1} = \phi(p_n)$

Para cada iteração podemos calcular o erro:

Ver Método de Newton!

→ Método de Newton

Ideia: é um aprimoramento da função ϕ do método anterior para que haja uma convergência mais rápida.

1º passo: definir f (se não for dada)

2º passo: encontrar a função ϕ:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(Garante a convergência)

3º passo: definir um intervalo $I = [a,b]$ (igual as técnicas utilizadas no método da bissecção)

- Utilizar o TVI para garantir a existência de raízes no intervalo.
- Garantir a unicidade da raiz no intervalo analisando a primeira derivada ($f'(x) \neq 0$) $\forall x \in [a,b]$
- ($f''(x) \neq 0$) garantir que f não muda de concavidade $\forall x \in [a,b]$

4º passo: escolher x_0 inicial

- $x_0 = a$ se $f' \cdot f'' < 0$
- $x_0 = b$ se $f' \cdot f'' > 0$

5º passo: iteração

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (com análise de erro a cada iteração)

sequência decrescente

$x_{n+1} = (x_n \pm 2\delta) - \frac{f(x_n \pm 2\delta)}{f'(x_n \pm 2\delta)}$ (δ é a precisão a cada iteração)

sequência crescente

- Se a sequência for crescente: analisar $x_n + 2\delta \leq \phi(x_n + 2\delta) (= x_{n+1})$ para cada iteração. Se $x_n + 2\delta > \phi(x_n + 2\delta)$ então passamos da raiz e devemos parar.
- Se a sequência for decrescente: analisar $x_n - 2\delta \geq \phi(x_n - 2\delta) (= x_{n+1})$ para cada iteração. Se $x_n - 2\delta < \phi(x_n - 2\delta)$ então passamos a raiz e devemos parar.

- Se a função for oscilante:

$$\varepsilon_n = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$$

Analisar se $\varepsilon_n \leq \delta$. Se $\varepsilon_n > \delta$ parar o algoritmo