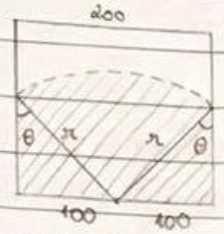
QUA QUI SEX SAB DOM

MAP3121 - P1 2018

• ZEROS DE FUNÇÕES

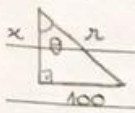
④ 

Q3-P1 2016: determinar o tamanho de r para que a área seja igual a $20\,000\,m^2$

erro menor que 10^{-3}

calcular θ e depois r

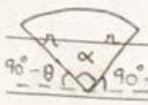
resolução: 1) encontrar a função da qual queremos a raiz



$\frac{100}{r} = \sin\theta \Rightarrow r = \frac{100}{\sin\theta}$

$\frac{x}{r} = \cos\theta \Rightarrow x = r\cos\theta = \frac{100}{tg\theta}$

$A = \frac{100x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{10000}{tg\theta}\right) \xrightarrow{2\Delta} A_\Delta = \frac{10000}{tg\theta}$



$180° = 2(90°-\theta) + \alpha$

$\alpha = 2\theta$

$A_\circ = \frac{(2\theta)}{2\pi}\cdot\pi r^2 = \theta r^2 = \frac{10000\theta}{\sin^2\theta}$ ← regra de 3

a área é dada por: $A = A_\Delta + A_\circ = 10000\left(\frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{tg\theta}\right)$

descobrir θ para o qual $A(\theta) = 20\,000$ é o mesmo que encontrar a(s) raiz(es) de $A(\theta) - 20000$, então o que queremos é encontrar θ tal que: $10000\left(\frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{tg\theta}\right) - 20\,000 = 0$, que é o mesmo θ que resolve:

$f(\theta) = \frac{\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{tg\theta} - 2$, $f(\theta) = 0$

2) limites de θ: máximo → $\frac{\pi}{2}$, resulta em área nula

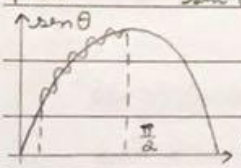
mínimo → $arctg\left(\frac{100}{200}\right) \cong 0{,}1476\pi$

$f(0{,}1476\pi) = 23\,174{,}3726\,m^2$ e $f(0{,}5\pi) = -4\,292{,}036732\,m^2$

temos pelo menos uma raiz no intervalo

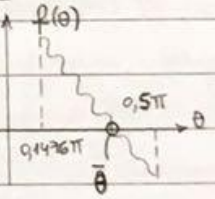
3) derivada e (de) crescimento: como o problema pede pra encontrar O ponto, a princípio não precisaria provar que a raiz é única no intervalo escolhido. Mas, como sabemos que quanto maior o θ menor a área de pasto e o que difere a equação $A(\theta)$ de $f(\theta)$ é um fator constante, temos que $\uparrow\theta \downarrow A(\theta) \downarrow f(\theta)$, ou seja, nesse intervalo $f'(\theta) < 0$.

$f'(\theta) = \frac{\sin^2\theta - \theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta} + \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\theta\sin(2\theta)}{\sin^4\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} = -\frac{\theta\sin(2\theta)}{\sin^4\theta}$



no intervalo considerado, tanto sen θ quanto sen(2θ) serão positivos; assim, $f'(\theta) < 0$ em todo o intervalo ($\theta > 0$ também)

esboço do gráfico:

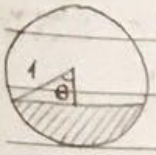


4) escolha do ponto: meio chato de descobrir a curvatura e achar o ponto de início, vamos chutar π/4 que tá mais ou menos no meio. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5707963267$, está à esquerda de $\bar\theta$ então a sequência de θ_ns será crescente

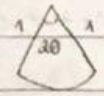
5) método de Newton: $\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{f(\theta_n)}{f'(\theta_n)}$ → como o enunciado deu a precisão usamos pra ir mais rápido; como a sequência é crescente uso $+2\varepsilon$.

θ_n	$\theta_n + 2\varepsilon$	$f(\theta_n+2\varepsilon)$	$f'(\theta_n+2\varepsilon)$	devo responder na precisão pedida: verificar por Bolzano
π/4	0,787398163	0,564530833	-3,134521361	
0,968075511	0,970075511	0,110714594	-1,953518567	$f(1{,}031) \cong 2{,}654\cdot10^{-4} > 0$
1,026749963	1,028749963	$4{,}05373851\cdot10^{-3}$	-1,688416149	$f(1{,}033) \cong -3{,}084\cdot10^{-3} < 0$
1,031150875	1,033150875	$-3{,}336169247\cdot10^{-3}$	quando o sinal troca eu paro	então $\theta = 1{,}032 \pm 10^{-3}$
				e $r = 116{,}506\,m$

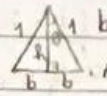
② Exercício 20 da lista de zeros: cilindro deitado de raio 1 e comprimento ℓ; com erro menor que 10^{-3}, qual θ faz o líquido ocupar $\frac{1}{4}$ do volume?



1) qual o volume de líquido em função de θ?



$A_0 = \frac{2\theta}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 = \theta$



$b = \sin\theta$ $h = \cos\theta$

$A = \frac{(b+b)\,h}{2} = \sin\theta\cos\theta$

} a área fraturada é: $A(\theta) = \theta - \sin\theta\cos\theta$ e $V(\theta) = \ell(\theta - \sin\theta\cos\theta)$

tentando em pontos conhecidos: $V(0) = 0$ ✓ $\quad V(\pi) = \pi\ell$ ✓ $\quad V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\ell}{2}$ ✓

quero θ que faz $V(\theta)$ ser igual a $\frac{V(\pi)}{4} = \frac{\pi\ell}{4}$ → achar as raízes de $f(\theta) = \ell(\theta - \sin\theta\cos\theta) - \frac{\pi\ell}{4}$, que são os mesmos que as de:

$f(\theta) = \theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{4}$

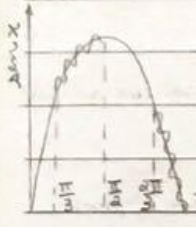
2) definir o intervalo: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > 0$

sabemos que tem pelo menos uma raiz no intervalo; da definição do problema, sabemos que a raiz é única (apenas um ângulo resulta em volume de líquido igual a $V_{total}/4$)

OBS.: 3) derivada e (de)crescimento: se quiser justificar melhor a unicidade da raiz no intervalo

$f'(\theta) = 1 - (\sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos^2\theta) = 1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 - \cos(2\theta) \geq 0$ pois: $\left[-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \rightarrow 1 \geq -\cos\alpha \geq -1 \rightarrow 2 \geq 1 - \cos\alpha \geq 0\right]$



$f''(\theta) = +\sin(2\theta)\cdot 2 = 2\sin(2\theta)$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leq 2\theta \leq \pi \Rightarrow$

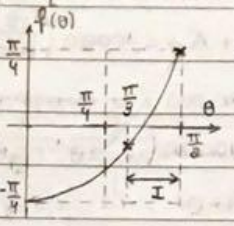
$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \geq \sin(2\theta) \geq \sin(\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}866 \geq \sin(2\theta) \geq 0 \therefore f''(\theta) \geq 0$

sinais do gráfico: $f(0) = -\frac{\pi}{4}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$f'(\theta) \geq 0$ e $f''(\theta) \geq 0$



a raiz está no intervalo e é única

4) escolha do ponto inicial: como $f'(\theta)\cdot f''(\theta) \geq 0$, escolho $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, e a sequência decrescerá

5) método de Newton com precisão pré-fixada: $\theta_{novo} = (\theta_n - 2\varepsilon) - \frac{\phi(\theta_n - 2\varepsilon)}{\phi'(\theta_n - 2\varepsilon)}$; subtraio 2ε porque $\bar{\theta}$ está à esquerda

θ_n	$\theta_n - 2\varepsilon$	$\phi(\theta_n - 2\varepsilon)$	$\phi'(\theta_n - 2\varepsilon)$
$\frac{\pi}{2}$	1,568796327	0,781398168	1,999999997
1,178095353	1,176095353	0,035731084	1,704270018
1,155129729	1,153129729	−0,000302846022	

→ para quando ϕ troca de sinal

$\bar{\theta} = 1{,}155129729 - 10^{-3} = 1{,}154129729$

na precisão pedida: $\bar{\theta} = 1{,}154$

$\phi(1{,}153) = -3{,}245242088\cdot 10^{-3} < 0$

$\phi(1{,}155) = 9{,}919797282\cdot 10^{-5} > 0$

} há pelo menos 1 raiz no intervalo: $\bar{\theta} = 1{,}154 \pm 10^{-3}$ rad

se, por acaso, com 1,154 não tivesse dado certo (os dois com o mesmo sinal), tentaria com 1,155 (próximo número mais perto para a precisão desejada) e, se não funcionasse, com 1,153.

③ Exercício 21 da lista de zeros: qual é a altura a para que $V(a) = \int_0^a \pi e^{2x}\,dx$ seja igual a $5\,cm^3$ (vaso cilíndrico)? $\varepsilon = 10^{-3}$

1) achar a função: $\int_0^a \pi e^{2x}\,dx = \pi\int_0^a e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^a = \frac{\pi}{2}(e^{2a} - 1)$ → queremos a tal que $\frac{\pi}{2}(e^{2a} - 1) - 5 = 0$

2) definir o intervalo: $f(0) = -5 < 0$

$f(1) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) - 5 \cong 5{,}036 > 0$

} há pelo menos uma raiz no intervalo

3) derivada: $f'(a) = \pi e^{2a} > 0, \forall a$ e $f''(a) = 2\pi e^{2a} > 0, \forall a$

4) escolha de a_0: como $f'(a)f''(a) > 0, \forall a$, devemos começar pelo ponto mais à direita → $a_0 = 1$ e a sequência decrescerá

5) método de Newton com $\varepsilon = 10^{-3}$:

a_n	$a_n - 2\varepsilon$	$\frac{\pi}{2}(e^{2(a_n - 2\varepsilon)} - 1) - 5$	$\pi e^{2(a_n - 2\varepsilon)}$
1	1,998	4,989571773	23,12077362
0,782194943	0,780194943	0,907257638	14,95661079
0,719533596	0,717533596	0,026433813	13,19446044
0,715530187	0,713530187	−0,026198032	

→ para quando $f(a)$ troca de sinal

$\bar{a} = 0{,}715530187 - 10^{-3}$

$\bar{a} = 0{,}714530187 \pm 10^{-3}$

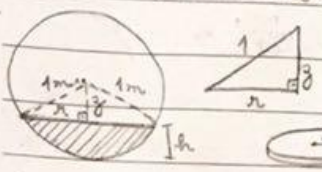
na precisão pedida: $\bar{a} = 0{,}715$

$f(0{,}714) \cong -0{,}02$

$f(0{,}716) \cong 6{,}23\cdot 10^{-3}$

} por Bolzano, há pelo menos 1 raiz entre eles: $\bar{a} = 0{,}715 \pm 10^{-3}$

④ um tanque esférico de raio 1m apoiado em uma superfície horizontal plana é usado para armazenar um produto líquido. Determine, com um erro de 1 cm, qual é a altura do líquido em relação à superfície quando ele ocupa $\frac{1}{4}$ do volume do tanque.



$1^2 = r^2 + z^2$ $\quad dV = \pi r^2 dz = \pi(1-z^2)dz \xrightarrow{z+h=1} = \pi(1-(1-h)^2)dh = \pi(1-1+2h-h^2)dh$

$r^2 = 1-z^2$ $\quad V = \int_0^h \pi(2h-h^2)dh = \pi\left(h^2 - \frac{h^3}{3}\right)$

quero achar h tal que: $\pi\left(h^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow h^2 - \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(h) = 3h^2 - h^3 - 1 = 0$

$f'(h) = 6h - 3h^2$ → OBS.: não posso escolher zero porque é raiz de f': não vai ter pontos em que a derivada é zero

$f(0,5) = -0,375$ } ok por Bolzano $\quad$ $f'(h) \neq 0$ e contínua; $f'(h) = 0$ em 0 e em 2, que estão fora do intervalo escolhido, então ok.

$f(0,75) = 0,265625$ } ok por Bolzano $\quad$ $f''(h) = 6 - 6h \neq 0$ e contínua

método de Newton: $h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)} = h_i - \frac{(3h^2 - h^3 - 1)}{(6h - 3h^2)} = \phi(x)$ [DICA: $h_0 \to = \to ans - \frac{(3ans^2 - ans^3 - 1)}{(6ans - 3ans^2)}$ vai direto; bom para convergir para um valor e depois testá-lo jogando em $\phi(x)$, antes de perder tempo fazendo as iterações]

h	$\phi(h)$
0,75	0,6556
0,6556	0,652707
0,6527	0,652704
0,65270344	0,652703644

precisão de 1 cm = 0,01 m

e se eu errar o lado do arredondamento quando for truncar?

teste 1: 0,65 — $f(0,64) < 0$ ok! teste 2: 0,66 — $f(0,65) < 0$ ok! teste 3: 0,64 — $f(0,63) < 0$ não ok :(

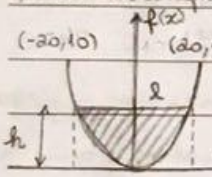
$f(0,66) > 0$ $\quad$ $f(0,67) > 0$ $\quad$ $f(0,65) < 0$

mais perto de $\bar{h}$ original

no caso, tanto $0,65 \pm 0,01$ m quanto $0,66 \pm 0,01$ m são respostas, pois houve troca de sinal; $0,64 \pm 0,01$, por outro lado, não é resposta.

⑤ Q4-P1 2011: calha retificada de perfil parabólico, com profundidade máxima de 10m e largura máxima de 40m, na superfície. Qual altura do nível fará com que ele ocupe $3/4$ do volume que a calha comporta?

1) encontrar a equação que representa o problema:



preciso achar uma relação entre h e l: → avaliando nos 3 pontos: $(0,0) \to f(0) = 0 = c$

$(20,10) \to f(20) = 10 = a \cdot 400 + b \cdot 20$

$(-20,10) \to f(-20) = 10 = 400a - b$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} 400a + 20b = 10 \\ 400a - 20b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 0,025$ $\quad b = 0$

$f(x) = 0,025x^2$

a relação que temos é $h = 0,025l^2$. A área que queremos é:

$A(l) = A_{\square} - A_{\int} = l \cdot h - \int_0^l 0,025x^2\,dx = l \cdot h - 0,025 \cdot \frac{l^3}{3} = (0,025l^2)l - 0,025 \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot 0,025l^3 = \frac{l^3}{60} \xrightarrow{2 \text{ lados}} A(l) = \frac{l^3}{30}$

área que a calha comporta: $A(20) = \frac{20^3}{30} = \frac{800}{3}$ $\quad \therefore g(l) = \frac{l^3}{30} - \frac{800}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{l^3}{30} - 200$, queremos l tal que $\phi(l) = 0$

2) limites: $A(10) = -\frac{500}{3} < 0$ $\quad A(17) \tilde{=} -36,233 < 0$ $\quad$ escolho l entre 17 e 19

$A(15) = -87,5 < 0$ $\quad A(19) \tilde{=} 28,633 > 0$

3) derivada: $g'(l) = \frac{l^2}{10} > 0, \forall l$ $\quad g''(l) = \frac{l}{5} > 0, \forall l$ $\quad$ o ponto zero já está fora do meu intervalo ✓

por Bolzano, sabemos que tem pelo menos uma raiz entre 17 e 19. Sendo $g'(l)$ estritamente crescente, sabemos que a raiz é única

4) escolha do l_0: como $g'(l) \cdot g''(l) > 0$ em todo o intervalo, escolho $l_0 = 19$ m. A sequência l_n será decrescente

l_n	$g(l_n)$	$g'(l_n)$
19	28,6333	36,1
18,20683287	1,17868369	33,14887632
18,1712756	$2,300427662 \cdot 10^{-3}$	33,01952568
18,17120593	$5,5426 \cdot 10^{-8}$	33,01927825
18,17120593(...)	0	

os números 18,17120593 nas duas últimas linhas são diferentes, mas minha calculadora não tem dígitos suficientes

adotando precisão de 10^{-3} → somente para dar a resposta ←,

chego em: $\bar{l} = 18,171$ m → $g(18,170) \tilde{=} -0,0398 < 0$ $\quad g(18,172) \tilde{=} 0,026227 > 0$ $\quad \bar{l} = 18,171 \pm 10^{-3}$ m

(6) Exercício 3 da lista de zeros: $p \in \mathbb{Z}$ e $p>0$. Mostrar que $x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$ pode ser usada para obter-se $\sqrt[p]{a}$ com $a \geq 0$

resolução: $\sqrt[p]{a} = x \Rightarrow x^p = a \rightarrow f(x) = x^p - a = 0$ e $f'(x) = p x^{p-1}$ é contínua

usando o método de Newton (meio que pra ver se dá certo, já que tem x_{n+1}): $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{x^p - a}{p x^{p-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x^p}{p x^{p-1}} + \frac{a}{p x^{p-1}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{p}\left(-x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{p}\left(x_n(p-1) + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$

b) calcular $\sqrt[3]{7}$ com $\varepsilon = 0{,}001$: $a=7$ e $p=3 \rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{7}{x_n^2}\right)$

• aproximações sucessivas: x_n — 2* → 1,916666667 → 1,912938458 → 1,912931183 → 1,912931183; $\bar{x} = 1{,}913$ — $f(1{,}912) \bar{=} -0{,}01022 < 0$; $f(1{,}914) \bar{=} 0{,}01174 > 0$ } $\bar{x} = 1{,}913 \pm 10^{-3}$

x_{n+1}: 1,916666667 | 1,912938458 | 1,912931183 | 1,912931183

• método de Newton: $f(1) = 1^3 - 7 = -6$, $f(2) = 2^3 - 7 = 1$ } pelo menos uma raiz entre 1 e 2 ‖ $f'(x) = 3x^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ crescente ∴ a raiz é única

como tem precisão pré-fixada acelero o processo

x_n	$x_n - 2\varepsilon$	$f(x_n - 2\varepsilon)$	$f'(x_n - 2\varepsilon)$
2**	1,998	0,976023992	11,976012
1,916504752	1,914504752	0,017255738	10,995950 88
1,91 29324 31	1,91 09324 31	-0,021918774 → parar o método	

$\bar{x} = 1{,}912931183 \pm 0{,}001 = 1{,}912 \pm 0{,}001$

1912 → $+\varepsilon$: $f(1{,}913) = 0{,}000755497 > 0$; $-\varepsilon$: $f(1{,}911) = -0{,}021978969 < 0$

há 1 raiz entre 1,911 e 1,913 → $\bar{x} = 1{,}912 \pm 0{,}001$

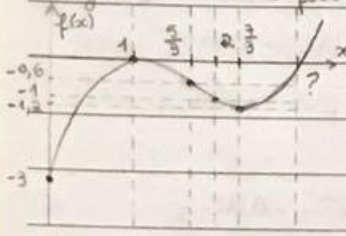
* sabemos que $\bar{x}$ será um pouco menor que 2, pois $\sqrt[3]{8} = 2$. Um bom lugar para começar

** como $f'(x) = 3x^2 > 0$ e $f''(x) = 6x > 0$, $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ no intervalo → devo escolher o limite superior

(7) Exercício 4 da lista de zeros: aplique o método de Newton para calcular o maior zero de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Faça 4 iterações

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \rightsquigarrow x = \frac{7}{3}$ e $x = 1$ são os pontos de máximo ou mínimo locais. Avaliando o sinal: $\overset{1}{+} \;|\; \overset{7/3}{-} \;|\; +$ ou seja, a função é crescente até 1, decrescente entre 1 e $7/3$ e crescente a partir de $7/3$

$f''(x) = 6x - 10 \rightsquigarrow x = \frac{5}{3}$ é o ponto de inflexão (mudança na curvatura). Avaliando o sinal: $\overset{5/3}{-} \;|\; +$ ou seja, a concavidade é negativa até 5/3 e positiva após esse ponto.



combinando as informações:

		1		5/3		2		7/3	
f(x)	+		−		−		−		+
f'(x)	−		−		+		+		+

descobrindo pontos: $f(0) = -3$; $f(1) = 0$; $f\left(\frac{5}{3}\right) \bar{=} -0{,}5926$; $f(2) = -1$; $f\left(\frac{7}{3}\right) \bar{=} -1{,}185$; $f(5) = 32$; $f(4) = 9$; $f(3{,}5) = 3{,}125$

escolho o intervalo $\frac{7}{3} < \bar{x} < 3{,}5$; nesse intervalo, $f(x) \cdot f'(x) > 0$ então começo pelo limite superior: $x_0 = 3{,}5$

método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightsquigarrow x_0 = 3{,}5 \rightarrow x_1 = 3{,}14 \rightarrow x_2 = 3{,}02 \rightarrow x_3 = 3{,}00 \rightarrow x_4 = 3{,}00$

• SISTEMAS LINEARES

(8) Exercício 17 da lista de sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \frac{|-3|+|-1|}{|5|} = \frac{4}{5}$; $\beta_2 = \frac{|-1|\beta_1 + |-2|}{|3|} = \frac{14}{15}$; $\beta_3 = \frac{|0|\beta_1 + |-1|\beta_2}{|4|} = \frac{7}{30}$ } $M = \frac{14}{15}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \frac{|-1|+|0|}{|4|} = \frac{1}{4}$; $\beta_2 = \frac{|-2|\beta_1 + |-1|}{|3|} = \frac{1}{2}$; $\beta_3 = \frac{|-1|\beta_1 + |-3|\beta_2}{|5|} = \frac{7}{20}$ } $M = \frac{1}{2} = \max_{1 \leq i \leq 3} \beta_i$

o mais adequado é o segundo sistema linear, pois possui menor M (resulta em menor número de iterações)

Gauss-Seidel: $x_{n+1} = \frac{2 + y_n}{4}$ $\quad y_{n+1} = \frac{2x_{n+1} + 3}{3}$ $\quad z_{n+1} = \frac{1 + x_{n+1} + 3y_{n+1}}{5}$ $\rightsquigarrow (0,0,0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

número mínimo de iterações para erro $< 10^{-4}$: $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$

quando estiver na k-ésima iteração, vou querer que a distância máxima entre ela e a solução seja menor que 10^{-4}

a distância máxima entre $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ é dada por $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \text{máx}\left[\left|0-\frac{1}{2}\right|, \left|0-\frac{1}{3}\right|, \left|0-\frac{1}{2}\right|\right] = \frac{1}{2}$

então: $0{,}0001 \geq \frac{0{,}5^k}{1-0{,}5} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 0{,}0001 \geq \frac{0{,}5^k}{0{,}5} \cdot 0{,}5 \Rightarrow \ln(0{,}0001) \geq k \ln(0{,}5) \Rightarrow k \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}5)} = 13{,}29 \therefore k \geq 14$ iterações ($\ln(0{,}5) < 0$)

(9) Exercício 20 da lista de sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Sassenfeld: $\beta_1 = \frac{|1|+|1|}{|-4|} = 0{,}5$

$\beta_2 = \frac{|-5| \cdot 0{,}5 + |-2|}{|6|} = 0{,}75 < 1$

$\beta_3 = \frac{|-1| \cdot 0{,}5 + |-1| \cdot 0{,}75}{|3|} = \frac{5}{12}$

$M = \max_{1 \leq i \leq 3} \beta_i = 0{,}75 < 1 \therefore$ é convergente

b) $x^{(k+1)} = \frac{-2 - y^{(k)} - z^{(k)}}{-4}$ $\quad y^{(k+1)} = \frac{-1 + 5x^{(k+1)} + 2z^{(k)}}{6}$ $\quad z^{(k+1)} = \frac{1 + x^{(k+1)} + y^{(k+1)}}{3}$; $(0,0,0) \to (0{,}5, 0{,}25, 0{,}58) \to (0{,}7, 0{,}62, 0{,}77)$

c) $10^{-10} \geq \frac{0{,}75^k}{1-0{,}75} \cdot 0{,}58 \Rightarrow 10^{-10} \geq 0{,}75^k \cdot 2{,}32 \Rightarrow \ln\left(\frac{10^{-10}}{2{,}32}\right) \geq k \ln(0{,}75) \Rightarrow k \geq \frac{-23{,}86740}{-0{,}28768} \approx 82{,}96 \therefore k \geq 83$ iterações ($\ln(0{,}75) < 0$)

d) $x^{(k+1)} = \frac{-2 - y^{(k)} - z^{(k)}}{-4}$ $\quad y^{(k+1)} = \frac{-1 + 5x^{(k+1)} + 2z^{(k)}}{6}$ $\quad z^{(k+1)} = \frac{1 + x^{(k+1)} + y^{(k+1)}}{3}$; $(0,0,0) \to (0{,}5, -0{,}167, 0{,}333) \to (0{,}543, 0{,}362, 0{,}443)$

e) A melhor aproximação é a de Gauss-Seidel, porque ele atualiza o vetor no meio do processo

(10) Exercício 2 da lista de sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Sassenfeld: $\beta_1 = \frac{|1|+|6|}{|2|} = \frac{7}{2} > 1$

$\beta_2 = \frac{|4| \cdot 7/2 + |1|}{|-2|} = \frac{15}{2} > 1$

$\beta_3 = \frac{|1| \cdot 7/2 + |-5| \cdot 15/2}{|-2|} = \frac{41}{2} > 1$

$M = \max_{1 \leq i \leq 3} \beta_i = \frac{41}{2} > 1 \to$ não satisfaz o critério

vimos satisfazer o critério das linhas, trocar os maiores elementos (em módulo) de cada linha

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \textcircled{6} \\ \textcircled{4} & -2 & 1 \\ 1 & \textcircled{-5} & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} \textcircled{4} & -2 & 1 \\ 1 & \textcircled{-5} & -2 \\ 2 & 1 & \textcircled{6} \end{bmatrix}$$

→ tentativa 1: consigo alocar um dos maiores → elementos em cada coluna

→ verifico minha tentativa: $\beta_1 = \frac{|-2|+|1|}{|4|} = \frac{3}{4} < 0$

$\beta_2 = (|4| \cdot \frac{3}{4} + |-2|) \cdot \frac{1}{|-5|} = \frac{11}{20} < 0$

$\beta_3 = (|2| \cdot \frac{3}{4} + |1| \cdot \frac{11}{20}) \cdot \frac{1}{|6|} = \frac{41}{120} < 0$

$M = \frac{3}{4} < 0$ então ok

OBS.: também satisfaz o critério das linhas: $4 > 2+1 \quad 5 > 1+2 \quad 6 > 2+1$

d) número de iterações para erro menor que 10^{-2}: $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 2$, pois $x^{(0)} = (0,0,0)$ e sei que $|x_1| \leq 2$, $|x_2| \leq 2$ e $|x_3| \leq 2$ (como não sei $x^{(1)}$ ainda adoto o máximo possível)

$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty = 10^{-2}$, pois é o erro aceitável na variável de maior erro na iteração k

$M = \frac{3}{4} \to 10^{-2} \geq \frac{0{,}75^k}{0{,}25} \cdot 2 \Rightarrow 0{,}125 \cdot 10^{-2} \geq 0{,}75^k \Rightarrow \ln(0{,}125 \cdot 10^{-2}) \geq k \ln(0{,}75) \Rightarrow k \geq \frac{\ln(0{,}125 \cdot 10^{-2})}{\ln(0{,}75)} = 23{,}24 \to 24$ iterações ($\ln(0{,}75) < 0$)

e) calcule 2 iterações por Gauss-Seidel a partir de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0,0,0)$:

$x_1^{(k+1)} = \frac{2 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4}$ $\quad x_2^{(k+1)} = \frac{-4 - x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}}{-5}$ $\quad x_3^{(k+1)} = \frac{3 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{6}$

$(0,0,0) \to (0{,}5, 0{,}9, 0{,}18) \to (0{,}91, 0{,}91, 0{,}045)$ OBS.: $\bar{x} = (1,1,0)$

(11) Q3 - P1 2016:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a) decomposição LU:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 8 & 4 \\ -1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 3/2 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} \otimes(+1/2) \\ \oplus \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 8 & 4 \\ -1/2 & 0 & 5 & 5/2 \\ 0 & 2 & 1 & 3/2 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 5 & 5/2 \end{array}\right]$$

$p_1 = 1$ $\qquad$ $p_3 = 2$

$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1/2&0&1\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}2&-1&8\\0&2&1\\0&0&5\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ ← guarda as permutações de linhas $A=\begin{bmatrix}2&-1&8\\-1&-1/2&1\\0&2&1\end{bmatrix}$

verificando: $L\cdot U=\begin{bmatrix}2&-1&8\\0&2&1\\-1&1/2&1\end{bmatrix}$ e $P\cdot A=\begin{bmatrix}2&-1&8\\0&2&1\\-1&1/2&1\end{bmatrix}$

resolvendo o sistema: $5z=5/2 \Rightarrow z=1/2$

$2y+z=3/2 \Rightarrow y=1/2$

$2x-y+8z=4 \Rightarrow x=1/4$

b) reescreva o sistema para que o método de Gauss-Seidel seja convergente e calcule uma iteração a partir de $x^{(0)}=(0,-\frac{1}{2},1)$, $\varepsilon=10^{-3}$:

Tanto faz com que β_1 seja o menor possível, pois ele entra no cálculo de β_2 e de β_3. Imagino que cada uma das equações está na 1ª linha e veja qual o menor β_1:

- se a equação 1 estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|-1|+|8|}{|2|}=\frac{9}{2}>1$ ✗
- se a equação 2 estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|1/2|+|1|}{|-1|}=\frac{3}{2}>1$ ✗
- se a equação 3 estiver na 1ª linha: nem posso calcular ∴

→ se não posso colocar nenhuma das equações na 1ª linha, não consigo fazer satisfazer o critério de Sassenfeld apenas trocando as linhas → vou precisar trocar as colunas

Novamente tanto faz com que β_1 seja o menor possível, dessa vez escolhendo o maior elemento como a 1ª coluna:

- se a equação 1 estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|-1|+|2|}{|8|}=\frac{3}{8}<1$ ✓
- se a equação 2 estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|1/2|+|1|}{|-1|}=\frac{|1/2|+|-1|}{|1|}=\frac{3}{2}>1$ ✗
- se a equação 3 estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|1|+|0|}{|2|}=\frac{1}{2}<1$ ✓

→ vou escolher o menor para colocar na primeira linha e testar: troco as variáveis de (x,y,z) para (z,y,x)

$$\begin{matrix}1\\3\\2\end{matrix}\begin{bmatrix}8&-1&2\\1&2&0\\1&1/2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$\beta_1=\frac{3}{8}<1$

$\beta_2=\frac{|1|\cdot 3/8+|0|}{|2|}=\frac{3}{16}<1$

$\beta_3=\frac{|1|\cdot 3/8+|1/2|\cdot 3/16}{|-1|}=\frac{15}{32}<1$

→ converge pelo critério de Sassenfeld e: $M=\max_{1\le i\le 3}\beta_i=\frac{15}{32}$

OBS.: coloquei a equação 2 na 3ª linha porque ela é a que tem menor "diferença" entre os elementos, ou seja, no critério das linhas é a que mais se aproxima de 1; colocando ela na última linha, seu β sofrerá influência dos anteriores, que seriam menores que 1 (senão eu pararia o cálculo por saber que não é solução), e β_3 se afastará de 1, fazendo M ser menor e diminuindo o número de iterações necessários (M é quanto o erro de $x^{(k)}$ a $x^{(k-1)}$ é menor que o erro de $x^{(k-1)}$ a $x^{(k-2)}$). Se eu não tivesse pensado nisso, calcularia β_2 com a 2ª equação na 2ª linha e veria que ele deu maior que 1, conseguindo chegar na resposta certa do mesmo jeito.

Para essa configuração, tenho: $z^{(k+1)}=\frac{4+y^{(k)}-2x^{(k)}}{8}$ $y^{(k+1)}=\frac{3/2-z^{(k+1)}}{2}$ $x^{(k+1)}=\frac{1/2-z^{(k+1)}-1/2\,y^{(k+1)}}{-1}$

Partindo de $z^{(0)}=1$, $y^{(0)}=-1/2$ e $x^{(0)}=0$ → $z^{(1)}=0{,}4375$, $y^{(1)}=0{,}53125$, $x^{(1)}=0{,}203125$ → na precisão dada: 0,438; 0,531; 0,203

O erro após esta iteração é de: $\|x^{(1)}-\bar{x}\|_\infty \le \frac{M}{1-M}\cdot\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty$ → erro inicial

$\|x^{(1)}-\bar{x}\|_\infty \le \frac{15/32}{17/32}\cdot \max\left(|1-0{,}438|,|-1/2-0{,}531|,|0-0{,}203|\right)=\frac{15}{17}\cdot\max(0{,}562,1{,}031,0{,}203) \rightarrow \|x^{(1)}-\bar{x}\|_\infty \le \frac{15}{17}\cdot 1{,}031\cong 0{,}910$ (mas achei estranho)

Para erro menor que 10^{-3}: $\|x^{(k)}-\bar{x}\|_\infty \le 10^{-3}$ e $\|x^{(k)}-\bar{x}\|_\infty \le \frac{M^k}{1-M}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty$

$10^{-3}\ge\frac{(15/32)^k}{17/32}\cdot 1{,}031 \Rightarrow 10^{-3}\ge\left(\frac{15}{32}\right)^k\cdot 1{,}941 \Rightarrow \ln\left(\frac{10^{-3}}{1{,}941}\right)\ge k\ln\left(\frac{15}{32}\right) \Rightarrow -7{,}570807\ge k\cdot(-0{,}7576857) \Rightarrow k\ge 9{,}99 \rightarrow k\ge 10$ iterações

(12)

$$\begin{matrix}&u&v&w\\1\ u\\2\ v\\3\ w\end{matrix}\begin{bmatrix}8&6&2\\6&8&2\\2&2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$$

a) $\beta_1=\frac{|6|+|2|}{8}=1$ ∴

$\beta_2=\frac{|6|\cdot 1+|2|}{|8|}=1$ ∴

$\beta_3=\frac{|2|\cdot 1+|2|\cdot 1}{|8|}=\frac{1}{2}$

→ consigo resolver só trocando as linhas?

→ imagino como β_1 seria se colocasse cada equação na 1ª linha:

- se a 1ª equação estiver na 1ª linha: $\beta_1=1$ ✗
- se a 2ª equação estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|8|+|2|}{|6|}=\frac{5}{3}>1$ ✗
- se a 3ª equação estiver na 1ª linha: $\beta_1=\frac{|2|+|8|}{|2|}=5>1$ ✗

como não posso colocar nenhuma equação na 1ª linha, não consigo resolver apenas trocando as linhas da matriz

vou ver qual equação posso colocar na 1ª linha, agora com liberdade de colocar o maior elemento na diagonal principal:

- se a 1ª equação estiver na 1ª linha e eu considerar troca de colunas: $\beta_1 = \frac{|6|+|2|}{|8|} = 1$ X
- se a 2ª equação estiver na 1ª linha e eu considerar troca de colunas: $\beta_1 = \frac{|6|+|2|}{|8|} < 1$ X
- se a 3ª equação estiver na 1ª linha e eu considerar troca de colunas: $\beta_1 = \frac{|2|+|2|}{|8|} = \frac{1}{2}$ √ → preciso colocar em cima e colocar o 8 na diagonal principal → proposta: colocar a coluna y_3 na de y_1

$$\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\begin{bmatrix}\textcircled{8} & 2 & 2\\ 2 & \textcircled{8} & 6\\ 2 & 6 & \textcircled{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_2\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}$$

verificar: $\beta_1 = \frac{1}{2}$

$\beta_2 = \frac{|2|\cdot 1/2 + |6|}{|8|} = \frac{7}{8}$

$\beta_3 = \frac{|2|\cdot 1/2 + |6|\cdot 7/8}{|8|} = \frac{25}{32}$

} nessa configuração, o sistema satisfaz o critério de Sassenfeld e $M = \max_{1\le i\le 3} \beta_i = \frac{7}{8}$

OBS.: essa configuração é equivalente a (y_3, y_1, y_2) na ordem 312:

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 8 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\begin{bmatrix}\textcircled{8} & 2 & 2\\ 2 & \textcircled{8} & 6\\ 2 & 6 & \textcircled{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}$$

OBS.: se eu tivesse escolhido (y_3, y_2, y_1) na ordem 312:

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}2 & 6 & 8\\ 2 & 8 & 6\\ 8 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_2\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\begin{bmatrix}\textcircled{8} & 2 & 2\\ 2 & 6 & \textcircled{8}\\ 2 & \textcircled{8} & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_2\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}$$

$\beta_1 = \frac{|2|+|2|}{|8|} = \frac{1}{2} < 1$

$\beta_2 = \frac{|2|\cdot 1/2 + |8|}{|6|} = \frac{9}{6} > 1$ X

$\beta_3 = \frac{|2|\cdot 1/2 + |8|\cdot 9/6}{|6|} = \frac{13}{6} > 1$ X

} não serviria

ou se eu tivesse escolhido (y_3, y_1, y_2) na ordem 321:

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}2 & 8 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 8 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\begin{bmatrix}\textcircled{8} & 2 & 2\\ 2 & 6 & \textcircled{8}\\ 2 & \textcircled{8} & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_3\\y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}$$

mas consigo facilmente identificar que uma reorganização das linhas colocaria os maiores elementos na diagonal principal, fazendo eu chegar na posição de antes

b) Gauss-Seidel:

$$y_3^{(k+1)} = \frac{4 - 2y_2^{(k)} - 2y_1^{(k)}}{8}$$

$$y_2^{(k+1)} = \frac{3 - 2y_3^{(k+1)} - 6y_1^{(k)}}{8}$$

$$y_1^{(k+1)} = \frac{3 - 2y_3^{(k+1)} - 6y_2^{(k+1)}}{8}$$

partindo de $y_3^{(k)} = 0$, $y_2^{(k)} = 0$ e $y_1^{(k)} = 0$, chego em:

$y_3^{(1)} = \frac{4}{8} = 1/2$ $\quad y_2^{(1)} = \frac{3 - 2\cdot 1/2 - 6\cdot 0}{8} = 1/4$

$y_1^{(1)} = \frac{3 - 2\cdot 1/2 - 6\cdot 1/4}{8} = 1/16$

o erro é: $\|x^{(1)} - \bar{x}\|_\infty \le \frac{M}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \Rightarrow \|x^{(1)} - \bar{x}\|_\infty \le \frac{7/8}{1/8}\cdot \max\left(\left|\frac{1}{2}-0\right|, \left|\frac{1}{4}-0\right|, \left|\frac{1}{16}-0\right|\right) = 7\cdot\frac{1}{2} = 3{,}5$

sem saber a solução, só consigo afirmar que o erro é menor do que 3,5 ("degenerado" pois M está muito perto de 1)

c) erro $< \varepsilon = 10^{-2}$ e erro $= \|x^{(k)} - \bar{x}\|_\infty \le \frac{M^k}{1-M}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$

calculando o k mínimo necessário: $10^{-2} = \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot \frac{8}{1}\cdot \max\left(\left|\frac{1}{2}-0\right|, \left|\frac{1}{4}-0\right|, \left|\frac{1}{16}-0\right|\right) = 4\left(\frac{7}{8}\right)^k \Rightarrow \frac{10^{-2}}{4} = \left(\frac{7}{8}\right)^k \Rightarrow \log_{10}(10^{-2}) - \log_{10}(4) =$

$= \log_{10}(7^k) - \log_{10}(8^k) \Rightarrow -2 - 0{,}6 = k\cdot 0{,}85 - k\cdot 0{,}9 \Rightarrow k = \frac{-2{,}6}{-0{,}05} = 52$

Assim, consigo garantir que o erro será menor que 10^{-2} fazendo 53 iterações ou mais

exercícios zero de função

1) $f(x) = x^2 - 4x + \cos x$

$x^2 - 4x + \cos x = 0 \Longrightarrow \phi_1 = \frac{x^2 + \cos x}{4}$

$\phi_2 = \frac{\cos x}{4 - x}$

$\phi_1' = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}x}{4}$ $\qquad \phi_2' = \frac{(4-x)(-\text{sen}x) - \cos x(-1)}{(4-x)^2}$

- $\max_{[0,1.8]} |\phi_1'| = ?$ $\Rightarrow (\phi_1')' = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} > 0$

$\therefore$ crescente

$\max_{1.8} |\phi_1'| = 0,89214731 < 1$

$\phi_1(0,9) = 0,452 \therefore x_0 = 0$

$\therefore \phi_1\ [0, 1.8]$ pode aproximar α_1

- $\max_{[3,5]} |\phi_1'| = ?$ $\Rightarrow \phi_1'$ crescente

$\therefore \max_{[3,5]} |\phi_1'| = 2,478 > 1$

$\therefore \phi_1\ [3,5]$ não pode aproximar α_2

- $\max_{[0,1.8]} |\phi_2'| = ?$ $\Rightarrow (\phi_2')' \Rightarrow$ achar o máximo

se < 1 pode

- o mesmo para ϕ_2 em $[3,5]$

exercícios zero de função

1) $f(x) = x^2 - 4x + \cos x$

$x^2 - 4x + \cos x = 0 \Longrightarrow \phi_1 = \frac{x^2 + \cos x}{4}$

$\phi_2 = \frac{\cos x}{4 - x}$

$\phi_1' = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}x}{4}$ $\qquad \phi_2' = \frac{(4-x)(-\text{sen}x) - \cos x(-1)}{(4-x)^2}$

- $\max_{[0,1.8]} |\phi_1'| = ?$ $\Rightarrow (\phi_1')' = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} > 0$

$\therefore$ crescente

$\max_{1.8} |\phi_1'| = 0,89214731 < 1$

$\phi_1(0,9) = 0,452 \therefore x_0 = 0$

$\therefore \phi_1 [0, 1.8]$ pode aproximar α_1

- $\max_{[3,5]} |\phi_1'| = ?$ $\Rightarrow \phi_1'$ crescente

$\therefore \max_{[3,5]} |\phi_1'| = 2,478 > 1$

$\therefore \phi_1 [3,5]$ não pode aproximar α_2

- $\max_{[0,1.8]} |\phi_2'| = ?$ $\Rightarrow (\phi_2')' \Rightarrow$ achar o máximo se < 1 pode

- o mesmo para ϕ_2 em $[3,5]$

2) • $\phi(x) = x(2 - \ln x)$, $[2,3]$

$\phi'(x) = x(-1/x) + (2 - \ln x) = 1 - \ln x$

$\phi''(x) = -1/x < 0 \Rightarrow$ decrescente

$\max_{2} |\phi'| = 0,3$

• $\phi(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

$\phi'(x) = \frac{-1}{2}\left[-e^{-x}\operatorname{sen}x + e^{-x}\cos x\right] = \frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen}x - \cos x)$

$\phi''(x) = \frac{1}{2}\left[-e^{-x}(\operatorname{sen}x - \cos x) + e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen}x)\right]$

$\phi''(x) = e^{-x}\cos x$

$[-3\pi/4; \pi/4]$

$|\max \phi'(x)| \Rightarrow |\operatorname{sen}x - \cos x| = 1$

$x = 0$ ou $x = -\pi/2$

$\max_{-\pi/2} |\phi'(x)| = \frac{e^{\pi/2}}{2}$

• $\phi(x) = x - 1/2(\operatorname{sen}x - e^{-x})$, $[0, \pi/2]$

$\phi'(x) = 1 - \frac{1}{2}(\cos x + e^{-x})$, em $[0, \pi/2]$

3) a) calcular $\sqrt[p]{a} \Rightarrow f(x) = x^p - a$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^p - a)}{p\,x_n^{p-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{p}{p}x_n + \frac{a - x_n^p}{p\,x_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$ c.q.d.

b) $\sqrt[3]{7}$ e $\varepsilon = 0{,}001$

$\sqrt[3]{1} = 1 \leq \sqrt[3]{7} \leq \sqrt[3]{8} = 2$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
2,000	1,000	12,000
1,917		
1,913		
1,913		

$f'(x) > 0$
$f(x) > 0$
$\therefore x_0 = 2$

$\varepsilon \Rightarrow x_n \quad (x_n - 2\varepsilon) \quad f(x_n - 2\varepsilon) \quad f'(x_n - 2\varepsilon)$

4) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \Rightarrow \exists\,]1, +\infty[\Rightarrow > 0$
$f''(x) = 6x - 10 \Rightarrow \exists\,]1{,}667, +\infty[\Rightarrow > 0$

$x_0 = 4$ $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3)}{(3x_n^2 - 10x_n + 7)}$

$x_{n+1} = 3$

x	$f(x)$	
0	-3	
2	-1	troca sinal
4	25	

14. $v(t) = 5e^{-t}$ m/s

$\bar{t} \Rightarrow V_m(0, \bar{t}) = 2{,}5$ m/s

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{\int_0^{\bar{t}} v(t)\,dt}{\bar{t} - 0} = 2{,}5 \Rightarrow 2 - 2e^{-\bar{t}} = \bar{t}$$

ponto fixo

$\phi(x) = 2 - 2e^{-x}$

- onde está $\bar{t}$? $\Rightarrow f(x) = \phi(x) - x$

x	$f(x)$	
0	0	
1	0,26	troca o sinal $\Rightarrow \bar{t} \in [1, 2]$
2	-0,27	

- $\phi(x) = 2 - 2e^{-x}$ | contínuas
  $\phi'(x) = 2e^{-x}$ |

$\max \phi'(x) = 2e^{-1} < 1$

- $\phi(1{,}5) = 1{,}554 > 1{,}5 \Rightarrow x_0 = 2$

- $\phi(x_n) = x_{n+1} \Rightarrow x_0 = 2$

  $x_1 = 1{,}73$

  $x_2 = 1{,}65$

  $\bar{x} = \bar{t} = 1{,}5936$ s

15. $A_{sup} = 800\,cm^2$ | $r, h = ?$
$V = 1L = 1.000\,cm^3$

$A_T = 2(\pi r^2) + 2\pi r h = 800$
$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

$2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \cdot 800$

$\pi r^2 + \frac{1000}{r} = 400 \Rightarrow \pi r^3 + 1000 - 400r = 0$

$f(x) = \pi r^3 + 1000 - 400r$
$f'(x) = 3\pi r^2 - 400$
$f''(x) = 6\pi r$
| contínuas

r	f(x)	
0	1000	
1	603	
2	225	troca sinal $\Rightarrow f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow x_0 = 2$
3	-115	

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_3 = 2,645 \rightarrow r = 2,645cm$
$h = 45,485\,cm$

- erro $< 10^{-5}$

$|t_n - \bar{t}| \leq M^n |t_0 - \bar{t}| < M^n \frac{|b-a|}{2} < erro$

$(\phi')^n \Rightarrow \phi(x) = \frac{\pi r^3 + 1000}{400}$ e $\phi'(x) = \frac{3\pi r^2}{400}$

$\phi'_{máx} = \phi'(x=3) = 0{,}212 < 1$

$\therefore (0{,}212)^n \frac{|3-2|}{2} < \varepsilon = 10^{-5}$

$n \geq 7$

17. $g(x) = x^2 + e^{-x} \Rightarrow g'(x) = 2x - e^{-x} = f(x) = 0$

$f'(x) = 2 + e^{-x} > 0 \Rightarrow f(x)$ crescente

x	f(x)	
0	-1	troca sinal $\therefore g'(x) = 0$ intervalo $[0,1]$
1	1,6	

$\therefore$ há uma raiz positiva para $f(x)$

$\therefore$ essa raiz é o ponto de mínimo para $g(x)$

$(g''(x) = f'(x) > 0)$

- $f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = ?$

  $f'(x) > 0$ e $f''(x) = -e^{-x} < 0 \therefore x_0 = 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ele pede $x_0 = 1$

$x_3 = 0{,}351733704$

x	f(x)	
x_3	negativo	$\bar{x}$ dista menos de ε de x_3
$x_3 + \varepsilon$	positivo	

18. $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x^4 \Rightarrow$

máx = 1

x	f(x)	
0	0	
1/2	0,417	Bolzano
1	-0,158	Bolzano

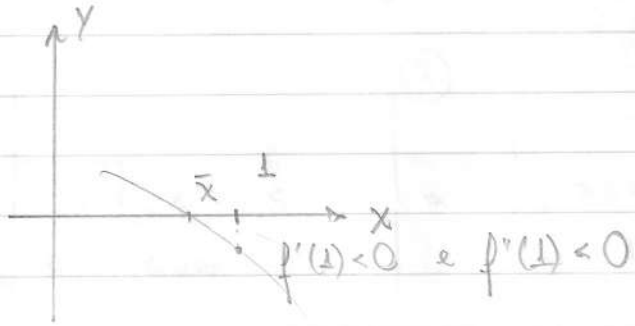
$x > 1$, $f(x) < 0$ ∴ 1 única raiz positiva

- $\varepsilon = 10^{-3}$ e $x_0 = 1$

$(f'(x) < 0 \ [1/2, 1])? \Rightarrow f'(x) = \cos x - 4x^3 < 0$ em $x = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x - 12x < 0$ em $x = 1$

∴ $x_0 = 1$ converge



x	x - 2ε	f(x)	f'(x)
1	0,998		
0,954	0,952		
0,9496	0,9476		
0,9496	parar		

$\bar{x} \cong \frac{0,9496 + 0,9476}{2} \cong 0,949$

exercícios sistemas lineares

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow N = 2$ a.s.

$$\begin{matrix} \circ\,I \\ II \\ III \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{matrix} II \\ I \\ III \end{matrix} \begin{matrix} (-1/2) \\ \text{—} + \\ \text{—} + \end{matrix} \begin{matrix} (-1/4) \\ | \\ | \end{matrix}$$

$p_1 = 2$

$$\begin{matrix} II \\ I \\ III \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 2 & 5,5 & 2 \\ 1/4 & -4,5 & -2,3 & -4,5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} II \\ III \\ I \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1/4 & -4,5 & -2,3 & -4,5 \\ 1/2 & 2 & 5,5 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (2/4,5) \\ \text{—} + \end{matrix}$$

$p_2 = 3$

$$\begin{matrix} II \\ III \\ I \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0,25 & -4,5 & -2,3 & -4,5 \\ 0,5 & -0,44 & -4,5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array} \longrightarrow x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- refinando $\Rightarrow N = 4$ a.s.

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

- $r^{(0)} = \vec{0} \Rightarrow C^{(0)} \cdot \vec{0} \Rightarrow x_1 = x^{(0)} + C^{(0)} \cdot 0$

$x^{(1)} = x^{(0)}$

- Sassenfeld?

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = 3,5 > 1$$

$M = \max |\beta_1, \beta_2, \beta_3| < 1 \Rightarrow \therefore$ não satisfaz Sassenfeld

trocar a ordem

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right] \quad M = \max |\beta_1, \beta_2, \beta_3|$$

$< 1 \Rightarrow$ satisfaz Sassenfeld

$\beta_1 = 2+1/4 = 3/4 = 0,75$

$\beta_2 = 1 \cdot 3/4 + 2/5 = 2,75/5 = 0,55$

$\beta_3 = 2 \cdot 3/4 + 1 \cdot 0,55/6 = 0,34$

ou A apresenta diagonal dominante $\Rightarrow$ satisfaz Sassenfeld

- $M = 0,75, \quad \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq 2$

$\varepsilon \leq 10^{-2}$

$$\frac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{0,75^k}{0,25} \cdot 2 \leq 10^{-2}$$

$$0,75^k \leq \frac{1}{8} \times 10^{-2}$$

$$k \geq \frac{\ln(1/8 \times 10^{-2})}{\ln(0,75)} = 23,2 \Rightarrow k = 24$$

18) • $C = \frac{1}{10}(100.000 - E - F) \Rightarrow C + \frac{E}{10} + \frac{F}{10} = 10.000$

• $E = \frac{1}{20}(100.000 - C) \Rightarrow \frac{C}{20} + E = 5.000$

• $F = 0,4\,(100.000 - C - E) \Rightarrow 0,4C + 0,4E + F = 40.000$

I	1	0,1	0,1	10.000	(-0,05) (-0,4)
II	0,05	1	0	5.000	—1+
III	0,4	0,4	1	40.000	+

I	1	0,1	0,1	10.000	
II	0,05	0,995	0,005	4.500	(- 0,362)
III	0,4	0,36	0,96	36.000	—1+

→ - 0,36/0,995

I	1	0,1	0,1	10.000	F = 35.900
II	0,05	0,995	0,005	4.500	⇒ E = 4.340
III	0,4	0,362	0,958	34.400	C = 5.980

27) $j = 2(p - m)$

$p + 1 = 6m$

$3(j - p) + m = 54$

	j	p	m	
I	1	-2	2	0
II	0	1	-6	-1
III	3	-3	1	54

~~$\beta_1 = 4 > 1$~~

	m	p	j	
III	-6	1	0	-1
I	2	-2	1	0
III	1	-3	3	54

converge

$\beta_1 = 1/6$

$\beta_2 = 2/3$

$\beta_3 = 13/18$

- $m^{(0)} = 2$, $p^{(0)} = 20$ e $j^{(0)} = 30$

$$m^{(1)} = \frac{-1 - p^{(0)}}{-6} = 3,5$$

$$p^{(1)} = \frac{0 - 2m^{(1)} - 1j^{(0)}}{-2} = 18,5$$

$$j^{(1)} = \frac{54 - 1 \cdot m^{(1)} + 3p^{(1)}}{3} = 35,33$$

- erro $\leq \frac{M}{1 - M} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| = 13,858$ (5,33)

$\left(\frac{13}{18}\right) / \left(\frac{5}{18}\right)$

$\bar{m} = 4,384$, $\bar{p} = 25,307$

$\bar{j} = 41,846$

- exercícios para aula

3. refinamento:

- cálculo $r^{(0)}$ (2Nas): $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,13 \\ 0,068 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02400 \\ -0,01800 \\ 0,002 \end{bmatrix}$$

- passar p/ Nas. $\Rightarrow r^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,024 \\ -0,018 \\ 0,002 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$

- $A \cdot \mathbb{C}^{(0)} = r^{(0)} \rightsquigarrow \tilde{A}\,\mathbb{C}^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

$\tilde{r}^{(0)}$ é $r^{(0)}$ permutado e multiplicado pelos valores de L $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -0,024 \\ 0,002 \\ -0,018 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{III} \\ \text{II} \end{matrix} \quad (-0,5) \quad (-1)$$

$$\begin{bmatrix} -0,024 \\ 0,014 \\ 0,006 \end{bmatrix} \quad (-0,25) \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -0,024 \\ 0,014 \\ 0,0025 \end{bmatrix} = \tilde{r}^{(0)}$$

$\therefore \mathbb{C}^{(0)} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 \\ \mathbb{C}_2 \\ \mathbb{C}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,024 \\ 0,014 \\ 0,0025 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}_3 = -0,0013$

$\Rightarrow \mathbb{C}_2 = 0,0033$

$\mathbb{C}_1 = -0,0067$

- $x^{(1)} = x^{(0)} + C^{(0)}$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,13 \\ 0,068 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0067 \\ 0,0033 \\ -0,0013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,13 \\ 0,067 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0,1333333 \\ 0,1333333 \\ 0,066667 \end{bmatrix}$$

32. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a. $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$PAx = Pb$

$LUx = Pb$

$Ly = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. $P \cdot A = L \cdot U$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

voltando $\Rightarrow$ $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & +4 \end{bmatrix}$ (-2) (1) $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow \det = -1^{*}$

OBS.: $\det A = (-1)^{\text{trocas}} \det \tilde{A}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)\ (2)\ (0) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (0)\ (-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -19 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -19 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = 1 \Rightarrow \text{troca de linhas}$$

* determinante 4×4:

$$\det(A) = 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{22} + 2 \cdot C_{32} + 0 \cdot C_{42}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad A^{-1} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-4)\ (-2) \\ -1+ \\ \hline \quad\quad\quad\quad +\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-2) \\ -1+ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \urcorner + \\ \urcorner + \\ (2)\ (-11)\ (19) \\ \quad\quad\quad\quad -1+ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\ 0\ 0\ 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4\ 1\ 0\ -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6\ -2\ 1\ 19 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ (-1) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\ 0\ 0\ 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\ -1\ 1\ 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6\ -2\ 1\ 19 \end{array}\right] (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\ 0\ 0\ 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\ -1\ 1\ 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6\ 2\ -1\ -19 \end{array}\right]$$

matriz de Hilbert

7.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1,0 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 & 1,0 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 & 1,0 \end{array}\right] \quad (-0,5) \quad (-0,33)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1,0 \\ 0,5 & 0,08 & 0,08 & 0,5 \\ 0,33 & 0,08 & 0,09 & 0,67 \end{array}\right] \quad (-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 0,33 & 1 \\ 0,5 & 0,08 & 0,08 & 0,5 \\ 0,33 & 1 & 0,01 & 0,17 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -11 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0,17/0,01 = 17$

$x_2 = \dfrac{0,5 - 0,08 \cdot 17}{0,08} = -11$

$x_1 = \dfrac{1 - 0,33 \cdot 17 - 0,5 \cdot 11}{1} = -10$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 33,3333 \\ -180,95238 \\ 176,19047 \end{bmatrix}$$