MAP 3121 - MÉTODOS NUMÉRICOS

Prova 2 Substitutiva- 10/07/17 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos):

Considere a equação $x'(t) = x^2(t)$, $x(0) = 1$, cuja solução exata é dada por $x(t) = 1/(1-t)$. Calcule a aproximação para $x(1)$ pelos métodos de Euler e Euler modificado com $h = 0.5$ e compare os erros obtidos com os dois métodos.

0.25

Questão 2 (2.5 pontos): a) Mostre que a função $g(x) = x^2 + e^{-x}$ tem um único ponto de mínimo positivo.

b) Calcule uma aproximação para este ponto utilizando o método de Newton (calcule 3 iterações a partir de $x_0 = 1$. Mostre que o método de Newton é convergente para esta escolha de x_0.)

c) Sem determinar o valor da solução verifique se o valor determinado no item b dista menos que 10^{-3} do ponto de mínimo. Justifique.

Questão 3 (2.5 pontos):

Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_0^4 f(x)dx$ dividimos $[0,4]$ em quatro subintervalos de mesmo tamanho e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola f nos pontos interiores 1, 2 e 3.

a) Determine pelo método de diferenças divididas o polinômio p que interpola f nestes 3 pontos.

b) Integre p no intervalo $[0,4]$ (pela fórmula de Simpson) de maneira a obter a fórmula de integração. Há diferença caso você integre p exatamente?

c) Use a fórmula obtida para calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (sim, uma mudança de variáveis se faz necessária!).

Questão 4 (2.5 pontos):

São dados 4 pontos uniformemente espaçados $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (onde $x_{i+1} = x_i + h, i = 1, 2, 3$) e $x_2 < x < x_3$. Definindo $d = (x - x_2)/h$, $a = 1 + d$, $b = 1 - d$ e $c = 2 - d$, mostre que para todo polinômio p de grau menor ou igual a três:

$$p(x) = \frac{ac}{2}(bp(x_2) + dp(x_3)) - \frac{db}{6}(cp(x_1) + ap(x_4))$$

P2 sub 2017, Q4 (1)

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \quad , x_{i+1} = x_i + h \quad , i = 1,2,3 \quad , d = \frac{x - x_2}{h} \quad , a = 1+d \\ x_2 < x < x_3 \end{cases}$$

$b = 1 - d \quad , c = 2 - d$

Calculamos

$$\begin{cases} d = \frac{x - x_2}{h} \\ a = 1 + d = 1 + \frac{x - x_2}{h} = \frac{h + x - x_2}{h} = \frac{x - x_1}{h} \\ b = -\left(\frac{x - x_3}{h}\right) \\ c = 2 - d = -\left(\frac{x - x_4}{h}\right) \end{cases}$$

Chamamos de $q(x) := \frac{ac}{2}\left(bp(x_2) + dp(x_3)\right) - \frac{db}{6}\left(cp(x_1) + ap(x_4)\right)$

$$= -\frac{dbc}{6}p(x_1) + \frac{acb}{2}p(x_2) + \frac{acd}{2}p(x_3) - \frac{adb}{6}p(x_4)$$

Então:

$$q(x) = -\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{6h^3}p(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{2h^3}p(x_2)$$

$$- \frac{(x-x_1)(x-x_4)(x-x_2)}{2h^3}p(x_3) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{6h^3}p(x_4)$$

$$= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}p(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}p(x_2)$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_4)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)(x_3-x_2)}p(x_3) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}p(x_4)$$

P2 aula 2017, Q4 (2)

Assim $q(x) = \sum_{i=1}^{4} L_i(x)\, p(x_i)$

onde $L_i(x)$ são os pol. de Lagrange

- Temos $q(x_i) = p(x_i)$ para $i = 1,2,3,4$. Como o polinômio de grau 3 que passa por x_1, x_2, x_3, x_4 é único, temos $q(x) = p(x)$

se $p(x)$ é de grau 3.

Então, mostramos que $p(x) = \frac{ac}{2}\left(bp(x_2) + dp(x_3)\right) - \frac{db}{6}\left(cp(x_3) + ap(x_4)\right)$