Calcule:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

a. Pelo método dos trapézios com $h = 2$, $h = 1$ e $h = 0,5$.

Esconder resposta

O método dos trapézios é dado por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

A integral do enunciado é:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

Começando com $h = 2$, temos apenas **um trapézio** de tamanho 2. Substituindo na fórmula do método:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{2}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = 1 \cdot (f(0) + f(2)) = \mathbf{1,01831564} \\ f(0) = e^{-0^2} = 1 \\ f(2) = e^{-2^2} = 0,01831564 \end{cases}$$

Vamos agora realizar o método para $h = 1$; dessa vez, teremos 2 trapézios de tamanho 1, então, substituindo novamente na fórmula do método:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + 2f(1) + f(2)) = \mathbf{0,87703726} \\ f(0) = e^{-0^2} = 1 \\ f(1) = e^{-1^2} = 0,36787944 \\ f(2) = e^{-2^2} = 0,01831564 \end{cases}$$

Por fim, precisamos realizar o processo mais uma vez, considerando $h = 0,5$. Teremos, portanto, 4 trapézios de tamanho $0,5$. Colocando no método:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{0,5}{2}(f(0) + 2f(0,5) + 2f(1) + 2f(1,5) + f(2)) = \mathbf{0,88061863} \\ f(0) = e^{-0^2} = 1 \\ f(0,5) = e^{-0,5^2} = 0,77880078 \\ f(1) = e^{-1^2} = 0,36787944 \\ f(1,5) = e^{-1,5^2} = 0,10539922 \\ f(2) = e^{-2^2} = 0,01831564 \end{cases}$$

Resposta esperada: Para $h = 2$: $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx 1,01831564$; para $h = 1$: $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx 0,87703726$ e para $h = 0,5$: $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \approx 0,88061863$.

Calcule:

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

b. Pelo método de Romberg usando as 3 estimativas do item **a**.

Esconder resposta

No item **a**, encontramos as seguintes estimativas pelo método do trapézio:

$$h = 2 \Rightarrow T_2 = 1,01831564$$

$$h = 1 \Rightarrow T_1 = 0,87703756$$

$$h = 0,5 \Rightarrow T_{0,5} = 0,88061863$$

Com esses dados, podemos utilizar a fórmula do **método de Romberg** para refinar o valor da integral calculada pelo método dos trapézios. A fórmula é dada por:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}), \text{para } k = j, j+1, \ldots$$

Onde j representa a ordem de convergência do erro (quanto maior o j, mais rápido o erro tende a zero); e k representa o índice da sequência, para um mesmo valor de j.

As integrais realizadas pelo método dos trapézios representam o nível $j = 1$, tal que o passo vale:

$$h = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Vamos identificar quais integrais $R_{k,1}$ se referem às integrais pelo método do trapézio, T_h:

I. Para $k = 1, h = \frac{2-0}{2^{1-1}} = 2$. Ou seja:

$$R_{1,1} = T_2 = 1,01831564$$

II. Para $k = 2, h = \frac{2-0}{2^{2-1}} = 1$. Ou seja:

$$R_{2,1} = T_1 = 0,87703756$$

III. Para $k = 3, h = \frac{2-0}{2^{3-1}} = 0,5$. Ou seja:

$$R_{3,1} = T_{0,5} = 0,88061863$$

Com as respostas acima, podemos montar duas integrais para $k = 2$, e ficamos com:

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{4^1 - 1}(R_{2,1} - R_{1,1})$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) = 0,87703756 + \frac{1}{3}(0,87703756 - 1,01831564)$$

$$\Rightarrow R_{2,2} = 0,82994487$$

A próxima integral é dada por:

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{4^1 - 1}(R_{3,1} - R_{2,1})$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1}) = 0,88061863 + \frac{1}{3}(0,88061863 - 0,87703756)$$

$$\Rightarrow R_{3,2} = 0,88180038$$

A integral mais precisa que conseguimos com o método de Romberg e as integrais acima é $R_{3,3}$, então aplicamos a mesma equação:

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{4^2 - 1}(R_{3,2} - R_{2,2})$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2}) = 0,88180038 + \frac{1}{15}(0,88180038 - 0,82994487)$$

$$R_{3,3} = 0,88525741$$

E essa é a resposta que encontramos com o método de Romberg.

Resposta esperada: $R_{3,3} = 0,88525741$

Calcule:

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

c. Pelo método de Simpson com $h = 0,5$.

Esconder resposta

A fórmula de Simpson é dada por:

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(b)\right]$$

O enunciado nos pede para utilizar $h = 0,5$. Então, precisamos calcular a função nos pontos:

$$f(0)\,;\, f(0,5)\,;\, f(1)\,;\, f(1,5) \text{ e } f(2)$$

E aplicar na fórmula. Encontrando os valores de $f(x)$, temos:

$$f(0) = e^{-0} = 1$$

$$f(0,5) = e^{-0,5^2} = 0,77880078$$

$$f(1) = e^{-1^2} = 0,36797944$$

$$f(1,5) = e^{-1,5^2} = 0,10539922$$

$$f(2) = e^{-2^2} = 0,01831564$$

Colocando esses valores na fórmula, temos:

$$S = \frac{0,5}{3}\left[1 + 4 \cdot 0,77880078 + 2 \cdot 0,36797944 + 4 \cdot 0,10539922 + 0,01831564\right]$$

$$S = 0,88184575$$

Resposta esperada: $S = 0,8818$

a. Determine A_1, A_2, A_3 e A_4 tal que:

$$p(1,5) = A_1 p(0) + A_2 p(1) + A_3 p(2) + A_4 p(3)$$

Qualquer que seja o polinômio p de grau menor ou igual a 3.

Esconder resposta

O enunciado nos dá o polinômio:

$$p(1,5) = A_1 p(0) + A_2 p(1) + A_3 p(2) + A_4 p(3)$$

E nos pede para determinar os parâmetros A_i que satisfaçam a equação, sendo p um polinômio de grau menor ou igual a 3.

Assim, considere a seguinte tabela com os valores de x e $f(x)$:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$

Podemos utilizar o Polinômio Interpolador de Lagrange que utilize a tabela acima. Para um polinômio de grau 3, temos:

$$P_3(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x) + f(x_3) \cdot L_3(x)$$

Do enunciado, temos que os valores de x são $\{0, 1, 2, 3\}$. Vamos encontrar os termos L_i:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{(x)(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{(x)(x-1)(x-3)}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{6}$$

Substituindo o polinômio do enunciado no lugar de $f(x)$:

$$p(x) = p(0) \cdot L_0(x) + p(1) \cdot L_1(x) + p(2) \cdot L_2(x) + p(3) \cdot L_3(x)$$

Compare de novo com a relação do enunciado:

$$p(1,5) = p(0) \cdot A_1 + p(1) \cdot A_2 + p(2) \cdot A_3 + p(3) \cdot A_4$$

Portanto, para valer essa igualdade, sendo que $f(x) = p(x)$ (um polinômio), então $A_n = L_n(x)$.

Para $p(1,5)$, basta substituir $x = 1,5$:

$$A_1 = L_0(1,5) = \frac{(1,5-1)(1,5-2)(1,5-3)}{-6} = -0,0625$$

$$A_2 = L_1(1,5) = \frac{(1,5)(1,5-2)(1,5-3)}{2} = 0,5625$$

$$A_3 = L_2(1,5) = \frac{(1,5)(1,5-1)(1,5-3)}{-2} = 0,5625$$

$$A_4 = L_3(1,5) = \frac{(1,5)(1,5-1)(1,5-2)}{6} = -0,0625$$

Resposta esperada: $A_1 = -0,0625$, $A_2 = 0,5625$, $A_3 = 0,5625$ e $A_4 = -0,0625$.

b. Seja $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ e use a expressão:

$$f(1,5) = A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f(2) + A_4 f(3)$$

Para estimar $f(1,5)$ e delimite o erro cometido, de acordo com a estimativa do erro. Use o valor exato de $f(1,5)$ apenas para confirmar sua delimitação de erro.

Dado: Fórmula de erro na interpolação polinomial:

$$|E(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{z \in I} \left|f^{(n+1)}(z)\right|,$$

Para algum z no intervalo em questão.

Esconder resposta

Precisamos estimar o valor de $f(1,5)$, onde $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$, através da expressão:

$$f(1,5) = A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f(2) + A_4 f(3)$$

No item anterior, nós já obtivemos os valores dos A_i, que são:

$$A_1 = -0,0625\,;\, A_2 = 0,5625\,;\, A_3 = 0,5625 \text{ e } A_4 = -0,0625$$

Então só nos resta encontrar os valores de $f(x)$ da equação, assim:

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f(1) = \cos\left(\frac{1}{4}\right) = 0,9689$$

$$f(2) = \cos\left(\frac{2}{4}\right) = 0,8776$$

$$f(3) = \cos\left(\frac{3}{4}\right) = 0,7317$$

Substituindo na fórmula:

$$f(1,5) = -0,0625 \cdot 1 + 0,5625 \cdot 0,9689 + 0,5625 \cdot 0,8776 - 0,0625 \cdot 0,7317 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1,5) = 0,930425$$

Assim, chegamos em $\cos\left(\frac{1,5}{4}\right) = 0,930425$ numericamente.

O valor exato é: $\cos\left(\frac{1,5}{4}\right) = 0,930508$.

Tendo tanto o valor encontrado pelo polinômio de Lagrange quando o valor exato, podemos calcular o erro. A fórmula do erro é dada por:

$$|E(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{z \in I} \left|f^{(n+1)}(z)\right|$$

No nosso caso, $n = 3$, então precisamos encontrar a derivada de ordem 4 da função $f(x)$:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{16}$$

$$f'''(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{64}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{256}$$

Agora precisamos encontrar o valor máximo que $f^{(iv)}(x)$ pode obter no nosso intervalo. Sendo $x = 0$, temos $\cos\left(\frac{0}{4}\right) = 1$.

Substituindo na fórmula:

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{256}$$

Os demais termos são simples, uma vez que já conhecemos todos. Substituindo:

$$|E(x)| \leq \frac{(1,5 - 0)(1,5 - 1)(1,5 - 2)(1,5 - 3)}{(3+1)!} \cdot \frac{1}{256}$$

$$|E(x)| \leq 0,0000915527$$

Resposta esperada: $\cos\left(\frac{1,5}{4}\right) = 0,930425$ e $|E(x)| \leq 0,0000915527$

Considere a equação diferencial:

$$\begin{gathered} x''(t) + tx'(t) + x(t) = 0\,; \\ x(0) = 1\,; \\ x'(0) = 0 \end{gathered}$$

Cuja solução analítica é $x(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$.

a. Use o método de Euler com passo $h = 0,5$ para calcular uma aproximação para $x(1)$ (escreva a equação como um sistema de primeira ordem).

Esconder resposta

Para esse exercício, precisamos encontrar uma aproximação de $x(1)$ para a seguinte equação:

$$x''(t) + tx'(t) + x(t) = 0$$

Usaremos o **método de Euler**, com $h = 0,5$.

Nesse caso, temos uma **equação de segunda ordem**, que junto das condições iniciais podemos escrever em um sistema:

$$\begin{cases} x''(t) + tx'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \;\; e \;\; x'(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos começar **transformando essa equação** em um **sistema de duas equações de primeira ordem**, fazendo:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' \end{cases}$$

Substituindo essas condições na equação original, temos:

$$y' + ty + x = 0 \Rightarrow y' = -ty - x$$

Então nossas equações são:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ty - x \end{cases}$$

Dessa forma, nossas condições iniciais se tornam:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos agora aplicar o **método de Euler**, que é dado por:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \cdot F_1(x_i, y_i, t_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot F_2(x_i, y_i, t_i) \end{cases}$$

Onde, no nosso caso: $F(x, y, t) = \begin{pmatrix} F_1(x_i, y_i, z_i) \\ F_2(x_i, y_i, t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -ty - x \end{pmatrix}$ pela mudança de variável que realizamos.

Vamos começar o processo do método, lembrando que $h = 0,5$. Além disso, como $x(t = 0) = 1$, então $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$. Sabemos também que $y(0) = 0$, então $y_0 = 0$. Substituindo:

$$\begin{cases} x(0,5) = x_1 = x_0 + 0,5 \cdot F_1(1, 0, 0) \\ y(0,5) = y_1 = y_0 + 0,5 \cdot F_2(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0,5) = x_1 = 1 + 0,5 \cdot 0 \\ y(0,5) = y_1 = 0 + 0,5 \cdot (-0 \cdot 0 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -0,5 \end{cases}$$

Para a próxima iteração, temos:

$$\begin{cases} x(1) = x_2 = x_1 + 0,5 \cdot F_1(1, -0,5, 0,5) \\ y(1) = y_2 = y_1 + 0,5 \cdot F_2(1, -0,5, 0,5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1) = x_2 = 1 + 0,5 \cdot (-0,5) \\ y(1) = y_2 = -0,5 + 0,5 \cdot (-0,5 \cdot (-0,5) - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0,75 \\ y_2 = -0,875 \end{cases}$$

Dessa forma, chegamos que $x(1) = x_2 = 0,75$.

Resposta esperada: $x(1) = 0,75$

Considere a equação diferencial:

$$x''(t) + tx'(t) + x(t) = 0;$$
$$x(0) = 1;$$
$$x'(0) = 0$$

Cuja solução analítica é $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

b. Escolha um método de ordem 2 com $h = 1$ e compare com o resultado obtido no item anterior.

Esconder resposta

Para esse item, vamos utilizar o método de **Euler Modificado com Ponto Médio** com $h = 0,5$.

No item **a**, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \cdot F_1(x_i, y_i, t_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot F_2(x_i, y_i, t_i) \end{cases}; F(x, y, t) = \begin{pmatrix} y \\ -ty - x \end{pmatrix}$$

Sendo as condições iniciais: $y_0 = 0; x_0 = 1$ e $t_0 = 0$.

Para o nosso método, precisamos encontrar K_1 que é dado por:

$$K_1 = F(x_0, y_0, t_0)$$

Que é, portanto:

$$K_1 = \begin{pmatrix} y_0 \\ -t_0 y_0 - x_0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos prosseguir até o ponto médio, utilizando os valores de K_1:

$$\begin{cases} x_{1/2} = x_0 + \dfrac{h}{2}(K_1)_1 \\ \\ y_{1/2} = y_0 + \dfrac{h}{2}(K_1)_2 \end{cases}$$

Substituindo, temos:

$$\begin{cases} x_{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}(0) \\ \\ y_{1/2} = 0 + \dfrac{1}{2}(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1/2} = 1 \\ y_{1/2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Uma vez que temos os valores no ponto médio, podemos calcular o valor de K_2 utilizando esse ponto, lembrando que $t_{1/2} = 1/2$:

$$K_2 = F(x_{1/2}, y_{1/2}, t_{1/2})$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} y_{1/2} \\ -t_{1/2} y_{1/2} - x_{1/2} \end{pmatrix} \Rightarrow K_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

Agora basta voltarmos ao ponto inicial e calcularmos os termos seguintes com K_2 (utilizando o **passo inteiro**, pois estamos indo de 0 até 1):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h(K_2)_1 \\ \\ y_1 = y_0 + h(K_2)_2 \end{cases}$$

Mais uma vez substituindo, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ y_1 = 0 + 1\left(-\frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5 \\ y_1 = -0,75 \end{cases}$$

Utilizando um método de ordem 2, chegamos em: $x(1) = 0,5$.

Utilizando a solução analítica $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, temos:

$$x(1) = e^{-\frac{1}{2}} = 0,60652$$

O resultado obtido pelo método de Euler foi: $x(1) = 0,75$.

Assim, note que o método de ordem 2 é mais preciso, pois se aproxima mais da solução real mesmo com um intervalo maior $(h = 1)$.

Resposta esperada: $x(1) = 0,5$; o método é mais preciso que o anterior de ordem 1.

Um tanque de petróleo esférico possui raio de $1\ m$. Determine o nível de petróleo h (com erro menor que $1\ mm$) tal que o tanque fique com $1/3$ do seu volume máximo. Utilize o método de Newton e justifique a convergência do método.

Esconder resposta

Este é um exercício que utiliza o **Método de Newton**. Para usá-lo, precisamos **modelar** o problema, **verificar a convergência** do método, observar se a função ϕ tem **convergência oscilante ou monótona** (em caso de erro pré-fixado) e realizar as **iterações**.

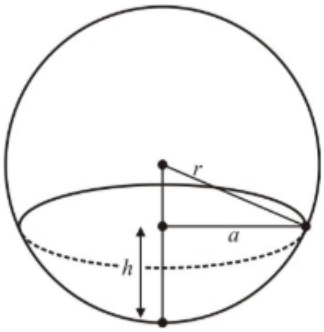
Vamos começar modelando o problema. Temos um tanque de petróleo esférico de raio $1\ m$. Calculando o volume da esfera, temos:

$$V_{max} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{max} = 4,188789\ m^3$$

Queremos definir a altura do nível de petróleo para quando o volume é $1/3$ do seu máximo, ou seja:

$$V = \frac{V_{max}}{3} \Rightarrow V = \frac{4,188789}{3} \Rightarrow V = 1,396263\ m^3$$

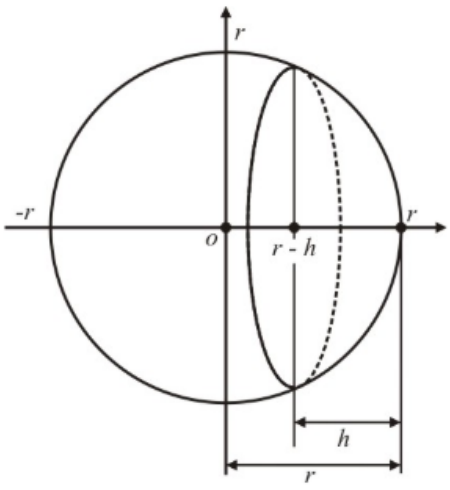
Como a esfera toda não será preenchida, precisaremos encontrar o **volume de uma calota esférica** dentro da esfera inteira. Colocando em uma imagem, temos:



Para encontrar o volume da calota esférica, vamos utilizar **integrais** para descrever somente a calota e não toda a esfera.

Para isso, podemos estabelecer limites de integração indo de $r - h$ até r.

Podemos rotacionar a imagem, a fim de facilitar a visualização:



Considere um ponto $P = (x, y)$ em uma circunferência de raio r, expressa por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Isolando a variável y:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Agora vamos supor que cada circunferência é um **cilindro com espessura infinitesimal** dx e de raio y, sendo que y varia de acordo com a posição h:

O volume desse cilindo é dado por $V_{cilindro} = A_b \cdot h$; que, nas nossas variáveis, fica:

$$V_{cilindro} = \pi y^2 \cdot dx$$

O volume da calota esférica nada mais é do que a **soma desses cilindros infinitesimais**, de $r - h$ até r. Ou seja:

$$V = \int_{r-h}^{r} \pi y^2 dx$$

Trocando a variável y de acordo com a função da circunferência e tirando as constantes da integral:

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

Agora basta resolver essa integral:

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} r^2 - x^2 dx$$

Realizando a integral de polinômio:

$$V = \pi \left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r}$$

Substituindo os limites de integração:

$$V = \pi \left[\left(rr^2 - \frac{r^3}{3}\right) - \left((r-h)r^2 - \frac{(r-h)^3}{3}\right)\right]$$

Chegamos ao volume! Basta agora simplificar para deixar a expressão mais amigável. Fazendo isso:

$$V = \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^3 - r^2h - \frac{r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi \left[\left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) - \left(\frac{3r^3 - 3r^2h - r^3 + 3r^2h - 3rh^2 + h^3}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[2r^3 - 3r^3 + r^3 + 3rh^2 - h^3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[3rh^2 - h^3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

Assim, obtemos o volume dado por: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

Podemos substituir $V = 1,396263\ m^3$ e $r = 1\ m$ e teremos:

$$1,396263 = \pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

Rearranjando os termos:

$$f(h) = -\frac{\pi}{3} \cdot h^3 + \pi h^2 - 1,396263 = 0$$

Essa é a função cuja raiz0 queremos encontrar através do **método de Newton**.

Primeiramente, precisamos encontrar um **intervalo onde haja uma raiz**. Isso é feito através do TVI, ou seja, precisamos encontrar valores a e b de forma que:
ss

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Sendo $a = 0,2$ e $b = 0,9$, temos:

$$f(0,2) = -\frac{\pi}{3} \cdot 0,2^3 + \pi \cdot 0,2^2 - 1,396263 \Rightarrow f(0,2) = -1,278977$$

$$f(0,9) = -\frac{\pi}{3} \cdot 0,9^3 + \pi \cdot 0,9^2 - 1,396263 \Rightarrow f(0,9) = 0,385020$$

Assim, temos que no intervalo $[0,2; 0,9]$ há uma raiz, pois $f(0,2) \cdot f(0,9) < 0$.

Precisamos analisar a **convergência**. Para isso, precisamos seguir alguns passos:

I. Precisamos garantir que $f'(t)$ e $f''(t)$ são **contínuas** no intervalo escolhido;
II. Depois, devemos verificar que as derivadas $f'(t)$ e $f''(t)$ sejam **diferentes de zero** no intervalo;

III. Se as condições **I** e **II** forem verificadas, a convergência ocorre para valores de t_0 tais que:

$$t_0 = \begin{cases} a,\ caso\ \phi(a) \in [a,b] \\ b,\ caso\ contrário \end{cases}$$

As derivadas de primeira e segunda ordem da função são:

$$f'(h) = -\pi h^2 + 2\pi h$$

$$f''(h) = -2\pi h + 2\pi$$

As duas funções são polinônios, e portanto contínuas em todo o seu domínio. A condição **I.** está satisfeita.

Agora precisamos verificar as derivadas para garantir que elas não são nulas dentro do intervalo que definimos. Começando pela primeira derivada:

$$f'(h) = -\pi h^2 + 2\pi h = 0$$

Colocando h em evidência:

$$h(-\pi h + 2\pi) = 0$$

Assim, chegamos que as raízes são:

$$h = 0 \text{ e } h = 2$$

Os dois valores estão fora do intervalo.

Agora, para a segunda derivada:

$$f''(h) = -2\pi h + 2\pi = 0$$

Isolando h, chegamos na raiz:

$$h = 1$$

O valor que zera a segunda derivada também está fora do intervalo e então a condição **II** está satisfeita. A condição **I** também é satisfeita, pois as derivadas são contínuas para qualquer valor real de h.

Agora, para definir o chute inicial, basta fazer:

$$\phi(h) = h - \frac{f(h)}{f'(h)} \Rightarrow \phi(h) = h - \frac{-\frac{\pi}{3} \cdot h^3 + \pi h^2 - 1,396263}{-\pi h^2 + 2\pi h}$$

Para $h = 0,2$:

$$\phi(0,2) = 0,2 - \frac{-\frac{\pi}{3} \cdot 0,2^3 + \pi(0,2)^2 - 1,396263}{-\pi(0,2)^2 + 2\pi(0,2)} = 1,330864$$

Como $1,330864 \notin [0,2; 0,9]$, o valor do chute inicial será $h_0 = 0,9$.

Precisamos montar a **tabela** do método para realizar algumas iterações e verificar se a sequência é monótona ou oscilante. Para isso, realizaremos algumas iterações:

n	h_n	$f(h_n)$	$f'(h_n)$	$\phi(h_n)$
0	0,9	0,38502	3,110177	0,77620638
1	0,776206	0,006801	2,98425	0,773927381
2	0,773927	3,66E-06	2,98103	0,773926151
3	0,773926	1,07E-12	2,981028	0,773926151

Como os valores de $\phi(h_n)$ são sempre decrescentes, concluímos que essa é uma **sequência monótona decrescente**. Dessa forma, temos que iterar até que $\phi(h_n - 2\delta) > h_n - 2\delta$. Nossa solução aproximada vai ser dada por $\bar{h} \approx h_n - \delta$, sendo δ o erro.

O exercício estipulou um **erro** de $1\ mm$, que nos dá $10^{-3}\ m$.

Como a sequência é monótona decrescente, nossa nova **iteração** é:

$$\phi(h_n - 2\delta) = h_{n+1} = (h_n - 2\delta) - \frac{f(h_n - 2\delta)}{f'(h_n - 2\delta)}$$

Assim, montamos uma nova tabela, agora com esse formato:

n	h_n	$h_n - 2\delta$	$f(h_n - 2\delta)$	$f'(h_n - 2\delta)$	$\phi(h_n - 2\delta)$
0	0,9	0,898	0,378801	3,108908	0,7761563
1	0,776156				
2					
3					
4					

Lembrando que $\phi\left(h_n - 2\delta\right) = h_{n+1}$. Preenchendo a tabela até a terceira iteração, temos:

n	h_n	$h_n - 2\delta$	$f(h_n - 2\delta)$	$f'(h_n - 2\delta)$	$\phi(h_n - 2\delta)$
0	0,9	0,898	0,378801	3,108908	0,7761563
1	0,776156	0,774156	0,000686	2,981354	0,7739262
2	0,773926	0,771926	-0,00596	2,978174	0,7739271
3	0,773927				

O **critério de parada** ocorre na linha 2, pois $\phi\left(h_n - 2\delta\right) > h_n - 2\delta$.

Poderíamos ter analisado também o sinal de $f\left(h_n - 2\delta\right)$. Perceba que ele foi positivo até a linha 2, a partir de onde se torna negativo; logo, essa é a linha que nos garante a precisão desejada.

Assi, temos que $h_n = 0,773926$. A solução final será:

$$\bar{h} \approx h_n - \delta \Rightarrow \bar{h} \approx 0,773926 - 0,001$$

$$\Rightarrow \bar{h} = 0,772926\ m$$

Resposta esperada: $\bar{h} = 0,772926\ m$