Em seu projeto você teve que avaliar integrais do tipo $\langle \phi_i, f \rangle$ com splines lineares do tipo funções chapéu ϕ_i. Seja $\phi_i(x) = 4x - 1$ em $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e $\phi_i(x) = 3 - 4x$ em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Dada a função $f(x) = x^3$, avalie $\int_{1/4}^{3/4} \phi_i(x) f(x)\, dx$ pelo método de $n-$Trapézios, com $n = 2$ e $n = 4$. Utilize estes valores para aproximar a integral pelo método de $2-$Simpson $(h = 1/8)$. Estime os erros cometidos com $4-$Trapézios e $2-$Simpson.

Dadas as fórmulas do Erro no método de $n-$trapézios:

$$E_{nT} = -f''(z)\frac{(b-a)h^2}{12} \text{ para algum } z \text{ em } [a, b]$$

E o erro no método de $n-$Simpson:

$$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}(z)(b-a)}{180} \text{ para algum } z \text{ em } [a, b]$$

Esconder resposta

Para esse exercício, precisamos calcular a integral:

$$\int_{1/4}^{3/4} \phi_i(x) f(x)\, dx$$

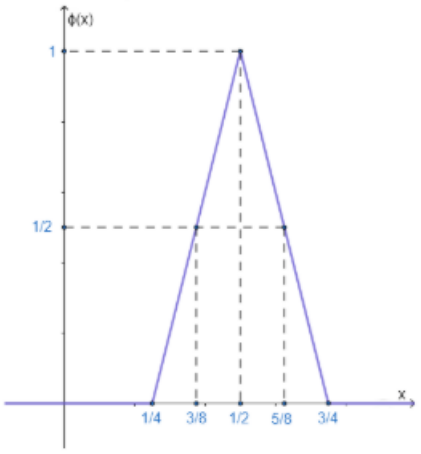
através do método dos trapézios quando $n = 2$ e $n = 4$; e depois utilizar os resultados para refinar a solução através do método de Simpson.

Para isso, precisamos **definir alguns pontos** da função a fim de aplicar os métodos.
Vamos começar descrevendo a função a ser integrada. Primeiro por $\phi_i(x)$, temos:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 4x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Como teremos que calcular a integral pelo método dos trapézios com $n = 4$, vamos dividir nosso intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ em 4 partes.

Podemos plotar um gráfico dessa função com o intervalo dividido e os respectivos valores de $\phi(x)$, e teremos:



Essa ainda não é a função que iremos integrar, pois falta **multiplicar** por $f(x) = x^3$. Assim, vamos chamar:

$$g(x) = \phi_i(x) \cdot x^3$$

Vamos encontrar os valores de $g(x)$ para os pontos do gráfico:

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0$$

$$g\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{1024} = 0,02637$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{1024} = 0,12207$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0$$

Pra facilitar a visualização, podemos colocar todos os dados em uma tabela:

x	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4
$g(x)$	0	0,02637	0,125	0,12207	0

Agora o problema está bem mais simples, já que só basta aplicar os métodos numéricos.

Primeiro para $2-$Trapézios:

$$T_2(g) = \frac{b-a}{2n}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Substituindo os valores:

$$T_2(g) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2 \cdot 2}(0 + 2 \cdot 0,125 + 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2(g) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{32} = \mathbf{0,03125}$$

Agora vamos realizar o processo de novo para $4-$Trapézios:

$$T_4(g) = \frac{b-a}{2n}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Substituindo os valores:

$$T_4(g) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2 \cdot 4}\left(0 + 2 \cdot \frac{27}{1024} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{125}{1024} + 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_4(g) = \frac{2}{16}\left(\frac{27 + 128 + 125}{1024}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_4(g) = \frac{1}{8} \cdot \frac{280}{1024} = \frac{35}{1024} = \mathbf{0,034179688}$$

O próximo passo é encontrar a integral a partir do método de $2-$Simpson, mas o enunciado nos pede para **utilizar os valores obtidos** pelos metódos do trapézio para encontrar a integral.

Temos que:

$$T_2(g) = \frac{b-a}{4}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$T_4(g) = \frac{b-a}{8}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 2g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 2g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Além disso, a fórmula do método de $2-$Simpson é:

$$S_2(g) = \frac{b-a}{3\cdot 4}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + 4g\left(\frac{3}{8}\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) + 4g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Precisamos de alguma combinação das duas primeiras equações que resulte na terceira:

$$S_2(g) = x \cdot T_4(g) + y \cdot T_2(g)$$

Primeiramente, para igualar os denominadores (4 em T_2, 8 em T_4 e 12 em S_2), podemos assumir que:

$$x = \frac{2}{3} \text{ e } y = \frac{1}{3}$$

Porém, as somas não seriam iguais, pois teríamos:

$$\frac{2}{3}\cdot T_4(g) + \frac{1}{3}\cdot T_2(g) = \frac{b-a}{12}\left(3g\left(\frac{1}{4}\right) + 4g\left(\frac{3}{8}\right) + 6g\left(\frac{1}{2}\right) + 4g\left(\frac{5}{8}\right) + 3g\left(\frac{3}{4}\right)\right) \neq S_2(g)$$

Assim, um dos dois termos precisa ser negativo. Esse deve ser y, pois $T_4(g)$ possui termos que não serão cancelados por $T_2(g)$ e que precisam ser positivos. Outro chute, portanto é:

$$x = \frac{2}{3} \text{ e } y = -\frac{1}{3}$$

Novamente, essa não é a combinação correta, pois dessa vez cancelaremos $g\left(\frac{1}{4}\right)$. Para impedir isso, dobramos x, para termos:

$$x = \frac{4}{3} \text{ e } y = -\frac{1}{3}$$

Dessa vez a combinação resulta exatamente em $S_2(g)$. Logo:

$$S_2(g) = \frac{4}{3}T_4(g) - \frac{1}{3}T_2(g)$$

Observação: A expressão acima representa o começo do método de Romberg.

Calculando o valor de $S_2(g)$:

$$S_2(g) = \frac{4}{3}\cdot 0,034179688 - \frac{1}{3}\cdot 0,03125 = \mathbf{0,03515625}$$

Conseguimos encontrar todas as integrais pedidas no enunciado. Vamos agora estimar o erro para as integrais por $4-$Trapézios e $2-$Simpson.

O enunciado nos dá as fórmulas do erro, que são:

$$E_{nT} = -f''(z)\frac{(b-a)h^2}{12} \text{ para algum } z \text{ em } [a,b]$$

$$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}(z)(b-a)}{180} \text{ para algum } z \text{ em } [a,b]$$

Precisamos da **quarta derivada** da nossa função, lembrando que ela é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} (4x-1)x^3 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (3-4x)x^3 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Realizando a multiplicação (para facilitar o cálculo das derivadas):

$$g(x) = \begin{cases} 4x^4 - 1x^3 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3x^3 - 4x^4 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Realizando a primeira derivada:

$$g'(x) = \begin{cases} 16x^3 - 3x^2 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 9x^2 - 16x^3 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Derivando novamente:

$$g''(x) = \begin{cases} 48x^2 - 6x & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 18x - 48x^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Derivando pela terceira vez:

$$g'''(x) = \begin{cases} 96x - 6 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 18 - 96x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Por fim, para a quarta derivada temos:

$$g^{(iv)}(x) = \begin{cases} 96 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -96 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vamos começar calculando o erro do método $4-$Trapézios:

$$E_{nT} = -f''(z)\frac{(b-a)h^2}{12}$$

Definindo h:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

Mas nossa função é definida por partes, então precisamos analisar cada uma destas:

I. Lado esquerdo: $b - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

II. Lado direito: $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Assim, o módulo do erro do método de $4-$Trapézios é o módulo da **soma** dos erros ao se considerar os dois trapézios na **esquerda**, e dois na **direita**:

$$|E_{4T}| = |E_{2T,esq} + E_{2T,dir}|$$

Utilizando a fórmula e substituindo os valores conhecidos:

$$|E_{4T}| = \left| -g''(z_{esq}) - g''(z_{dir}) \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{12} \right|$$

$$\Rightarrow |E_{4T}| = \left| -(g''(z_{esq}) + g''(z_{dir})) \cdot \frac{1}{3072} \right|$$

$$\Rightarrow |E_{4T}| = \frac{|-(g''(z_{esq}) + g''(z_{dir}))|}{3072}$$

$$\Rightarrow |E_{4T}| = \frac{|(g''(z_{esq}) + g''(z_{dir}))|}{3072}$$

Para escolher o valor de z, precisamos verificar como se comporta a função $g''(x)$. Vamos derivá-la para analisar os intervalos de crescimento e decrescimento:

$$(g'')'(x) = \begin{cases} 96x - 6 & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -96x + 18 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Igualando cada termo a 0:

$$96x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{16} \notin \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \text{sempre crescente}$$

$$-96x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{16} \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow \text{sempre decrescente}$$

Sabendo disso, vamos escolher os valores que resultem no maior valor possível. O primeiro intervalo tem segunda derivada **crescente e positiva**, então tomamos o extremo direito $(1/2)$:

$$48\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 9$$

Precisamos escolher o valor do segundo intervalo (decrescente). A segunda derivada, nesse trecho, é **sempre negativa e decrescente**. Por isso, precisamos do menor valor que o segundo intervalo pode assumir. Escolhendo o extremo esquerdo $(1/2)$:

$$18\left(\frac{1}{2}\right) - 48\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -3$$

Substituindo na fórmula do erro:

$$|E_{4T}| = \frac{|(9 + (-3))|}{3072} = \mathbf{0,001953}$$

Agora vamos encontrar o erro para o método de $2-$Simpson, cuja fórmula é:

$$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}(z)(b-a)}{180}$$

Dessa vez h é o valor de meia célula, então:

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

Vamos separar novamente as partes esquerda e direita:

I. Lado esquerdo: $b - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

II. Lado direito: $b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

E teremos:

$$E_{nS} = \frac{-h^4 f^{(iv)}(z_{esq})(b-a)}{180} + \frac{-h^4 f^{(iv)}(z_{dir})(b-a)}{180}$$

$$E_{nS} = -(f^{(iv)}(z_{esq}) + f^{(iv)}(z_{dir})) \cdot \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)}{180}$$

Dessa vez está mais simples, já que a quarta derivada é uma constante, então:

$$E_{nS} = -(96 + (-96)) \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)}{180} = 0$$

Resposta esperada: 2 **— Trapézios:** $0,03125$**; 4 — Trapézios:** $0,034179688$**; 2 — Simpson:** $0,03515625$**; Erro 4 — Trapézios:** $0,001953$**; Erro 2 — Simpson:** 0**.**

Aproxime a função $f(t) = e^{2t} + e^{-2t}$ por um polinômio de grau menor ou igual a três em $[-0,5; 0,5]$ segundo o método de mínimos quadrados em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)g(x)\,dx$, fazendo uso dos seguintes polinômios que são ortogonais em $[-1, 1]$.

Dados:

Polinômios ortogonais: $p_0 = 1; p_1 = x; p_2 = x^2 - \frac{1}{3}; p_3 = x^3 - \frac{3x}{5}$.

Produtos internos: $\langle p_0, p_0 \rangle = 2; \langle p_1, p_1 \rangle = 2/3; \langle p_2, p_2 \rangle = 8/45; \langle p_3, p_3 \rangle = 8/175$.

Esconder resposta

Queremos aproximar a função $f(t) = e^{2t} + e^{-2t}$, no intervalo $[-0,5; 0,5]$ por um polinômio de grau 3, usando polinômios ortogonais.

No entanto, os polinômios ortogonais fornecidos são definidos no intervalo $[-1, 1]$.

A primeira coisa que precisamos fazer é realizar uma **mudança de variável** para transformar o intervalo $[-0,5; 0,5]$ em $[-1, 1]$.

O intervalo já está **simétrico**, e perceba que t é exatamente **metade** de x, logo:

$$t = \frac{x}{2}$$

Assim:

$$f(t(x)) = e^{2\cdot\frac{x}{2}} + e^{-2\cdot\frac{x}{2}}$$

$$f(t(x)) = e^{x} + e^{-x}$$

Note que essa função é **par** (pois $f(-x) = e^{-x} + e^{x} = f(x)$).

Como estamos aproximando a **função por um polinômio de grau 3**, iremos utilizar os quatro primeiros polinômios ortogonais. Assim:

$$p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$$

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + a_3 \cdot \left(x^3 - \frac{3x}{5}\right)$$

Para encontrar os coeficientes, basta resolver o **sistema normal**, dado por:

$$\begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \langle p_0, p_1 \rangle & \langle p_0, p_2 \rangle & \langle p_0, p_3 \rangle \\ \langle p_1, p_0 \rangle & \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle & \langle p_1, p_3 \rangle \\ \langle p_2, p_0 \rangle & \langle p_2, p_1 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle & \langle p_2, p_3 \rangle \\ \langle p_3, p_0 \rangle & \langle p_3, p_1 \rangle & \langle p_3, p_2 \rangle & \langle p_3, p_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, p_0 \rangle \\ \langle f, p_1 \rangle \\ \langle f, p_2 \rangle \\ \langle f, p_3 \rangle \end{bmatrix}$$

Mas como os polinômios dados são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, todos os produtos fora da diagonal principal são nulos, deixando nosso sistema como:

$$\begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & & 0 & 0 \\ 0 & \langle p_1, p_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle p_2, p_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle p_3, p_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, p_0 \rangle \\ \langle f, p_1 \rangle \\ \langle f, p_2 \rangle \\ \langle f, p_3 \rangle \end{bmatrix}$$

O enunciado já nos forneceu os valores dos produtos internos dos polinômios ortogonais, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/175 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, p_0 \rangle \\ \langle f, p_1 \rangle \\ \langle f, p_2 \rangle \\ \langle f, p_3 \rangle \end{bmatrix}$$

Pela multiplicação matricial, temos que:

$$a_0 = \frac{\langle f, p_0 \rangle}{2} ; a_1 = \frac{\langle f, p_1 \rangle}{2/3} ; a_2 = \frac{\langle f, p_2 \rangle}{8/45} ; a_3 = \frac{\langle f, p_3 \rangle}{8/175}$$

Precisamos encontrar os produtos internos restantes. O primeiro é dado por:

$$\langle f, p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \cdot 1 \, dx$$

Resolvendo a integral:

$$\langle f, p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} e^x + e^{-x} \, dx \Rightarrow \langle f, p_0 \rangle = (e^x - e^{-x}) \Big|_{-1}^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle f, p_0 \rangle = \left(e - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} - e\right)$$

$$\boldsymbol{\langle f, p_0 \rangle = 2e - \frac{2}{e} = \frac{2(e^2 - 1)}{e}}$$

Vamos para a próxima integral:

$$\langle f, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \cdot x \, dx$$

Aqui, temos a **integral** da multiplicação de uma função par $(e^x - e^{-x})$ por uma função ímpar (x), o que resulta em uma **função ímpar**. Como estamos em um **intervalo simétrico** $[-1, 1]$, a integral tem resultado **nulo**. Logo:

$$\boldsymbol{\langle f, p_1 \rangle = 0}$$

Seguindo com as integrais, temos:

$$\langle f, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \, dx \Rightarrow$$

Tirando a constante:

$$\Rightarrow \langle f, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 (e^x + e^{-x}) - \frac{e^x + e^{-x}}{3} \, dx$$

Dividindo em três integrais:

$$\langle f, p_2 \rangle = \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx}_{I} + \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx}_{II} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{3} dx}_{III}$$

Começando pela integral III:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{3} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2e}{3} - \frac{2}{3e}$$

Agora vamos para a integral I:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx$$

Para resolver essa integral, utilizamos **integral por partes**, dada por:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Então, pela integração por partes, podemos escrever:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} x e^x dx$$

Precisamos integrar por partes novamente:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = \left(e - \frac{1}{e}\right) - 2\left[x e^x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx\right]$$

Resolvendo, temos:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = \left(e - \frac{1}{e}\right) - 2\left[e + \frac{1}{e} - \left(e - \frac{1}{e}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = e - \frac{5}{e}$$

Ainda precisamos calcular a integral II. Fazendo os mesmos passos que a integral anterior, chegamos em:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx = e - \frac{5}{e}$$

Com isso, temos que:

$$\langle f, p_2 \rangle = \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2 e^x dx}_{I} + \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx}_{II} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{3} dx}_{III}$$

$$\langle f, p_2 \rangle = e - \frac{5}{e} + e - \frac{5}{e} - \frac{2e}{3} + \frac{2}{3e}$$

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{p_2} \rangle = \frac{3e^2 - 15 + 3e^2 - 15 - 2e^2 + 2}{3e} = \boldsymbol{\frac{4e^2 - 28}{3e}}$$

Por fim, vamos para o último produto interno:

$$\langle f, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \cdot \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right) \, dx$$

Mais uma vez, temos a multiplicação de uma função par $(e^x + e^{-x})$ por funções ímpares (x^3 e x). Assim, o resultado da integral é:

$$\boldsymbol{\langle f, p_3 \rangle = 0}$$

Assim, substituindo nas expressões dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{\langle f, p_0 \rangle}{2} = \frac{\frac{2(e^2 - 1)}{e}}{2} = \frac{e^2 - 1}{e} = 2,350$$

$$a_1 = \frac{\langle f, p_1 \rangle}{2/3} = \frac{0}{2/3} = 0$$

$$a_2 = \frac{\langle f, p_2 \rangle}{8/45} = \frac{\frac{4e^2 - 28}{3e}}{8/45} = \frac{45}{8} \cdot \left(\frac{4e}{3} - \frac{28}{3e} \right) = \frac{45}{2} \cdot \left(\frac{e}{3} - \frac{7}{3e} \right) = 1,073$$

$$a_3 = \frac{\langle f, p_3 \rangle}{8/175} = \frac{0}{8/175} = 0$$

Substituindo todos os dados no polinômio:

$$p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$$

Ficamos com:

$$p(x) = 2,350 \cdot 1 + 1,073 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

Mas o polinômio ainda está em função de x, precisamos voltar para a variável t:

$$t(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t$$

Substituindo:

$$p(t) = 2,350 \cdot 1 + 1,073 \cdot \left((2t)^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$p(t) = 1,992 + 4,292t^2$$

Observação: A função $e^x + e^{-x}$ é igual ao dobro da função $\cosh(x)$ (cosseno hiperbólico de x). Essa igualdade não é facilmente percebida, mas algumas integrais são resolvidas com maior facilidade nesta forma, pois $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ e $(\sinh(x))' = \cosh(x)$.

Resposta esperada: $\boldsymbol{p(t) = 1,992 + 4,292t^2}$

Considere a equação diferencial $x''(t) - 4x(t) = 0$, com condições iniciais $x(0) = 2$ e $x'(0) = 0$, cuja solução exata é $x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$.

Escreva a equação como um sistema de EDO's de primeira ordem nas variáveis $x(t)$ e $y(t) = x'(t)$ e utilize o método de Euler com passo $h = 0,25$ para aproximar a solução em $t = 0,5$.

Faça o mesmo com o método de Euler Modificado com passo $h = 0,5$. Compare os resultados obtidos com o valor da solução exata.

Esconder resposta

O enunciado nos dá uma equação diferencial e suas condições iniciais:

$$\begin{cases} x'' - 4x = 0 \\ x(0) = 2 \; e \; x'(0) = 0 \end{cases}$$

Utilizando a mudança de variável proposta no enunciado:

$$\begin{cases} y = x' \\ y' = x'' \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} x' = y(t) \\ y' = 4x(t) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $x(0) = 2$ e $y(0) = 0$.

Vamos agora aplicar o **método de Euler**, que é dado por:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \cdot F_1(x_i, y_i, t_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot F_2(x_i, y_i, t_i) \end{cases}$$

Onde, no nosso caso: $F(x, y, t) = \begin{pmatrix} y \\ 4x \end{pmatrix}$ pela mudança de variável que realizamos.

Vamos começar o processo do método. Queremos chegar em $x(0,5)$ com um passo de $h = 0,25$. Então, teremos duas iterações, onde a primeira é:

$$\begin{cases} x(0,25) = x_1 = x_0 + 0,25 \cdot F_1(2,0,0) \\ y(0,25) = y_1 = y_0 + 0,25 \cdot F_2(2,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0,25) = x_1 = 2 + 0,25 \cdot 0 \\ y(0,25) = y_1 = 0 + 0,25 \cdot 4 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0,25) = x_1 = 2 \\ y(0,25) = y_1 = 2 \end{cases}$$

Para a próxima iteração, temos:

$$\begin{cases} x(0,5) = x_2 = x_1 + 0,25 \cdot F_1(2,2,\ 0,25) \\ y(0,5) = y_2 = y_2 + 0,25 \cdot F_2(2,2,\ 0,25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0,5) = x_2 = 2 + 0,25 \cdot 2 \\ y(0,5) = y_2 = 2 + 0,25 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0,5) = x_2 = 2,5 \\ y(0,5) = y_2 = 4 \end{cases}$$

Dessa forma, chegamos que, pelo método de Euler:

$$\boldsymbol{x(0,5) = 2,5}$$

Vamos agora utilizar o método de Euler Modificado com passo $h = 0,5$ para encontrarmos novamente a solução. O método é dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h; y_i + hf(x_i, y_i))\right]$$

No nosso caso, como estamos trabalhando com um sistema de ordem 2, realizamos a seguinte substituição:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) = y \\ y' = g(x,y) = 4x \end{cases}$$

E o método de Runge-Kutta para sistemas de EDOs é:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_k + hf(x_k, y_k); y_k + hg(x_k, y_k))\right] \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[g(x_k, y_k) + g(x_k + hf(x_k, y_k); y_k + hg(x_k, y_k))\right] \end{cases}$$

Como queremos $x(0,5)$, e temos que $h = 0,5$ (ou seja, basta uma iteração), vamos trabalhar somente com a primeira equação.

Sabendo que $f(x_k, y_k) = y$, obtemos:

$$f(x_k + hf(x_k, y_k); y_k + hg(x_k, y_k)) = y_k + hg(x_k, y_k)$$

Substituindo as funções na expressão de x_{k+1}:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left[y_k + y_k + hg(x_k, y_k)\right]$$

Agora substituindo $g(x,y) = 4x$:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left[2y_k + h \cdot 4x_k\right]$$

Juntando os termos semelhantes:

$$x_{k+1} = (1 + 2h^2)x_k + hy_k$$

Substituindo $h = 0,5$:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k + \frac{1}{2}y_k$$

Realizando a iteração:

$$x(0,5) = x_1 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0$$

$$\Rightarrow x(0,5) = x_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x(0,5) = 3}$$

Por fim, precisamos encontrar o valor a partir da solução exata, que é dada por:

$$x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$$

Substituindo $t = 0,5$:

$$x(0,5) = e^1 + e^{-1} = 3,08$$

Comparando todas as soluções (o erro é calculado pelo módulo da diferença entre a solução numérica encontrada e a exata):

Método	Valor	Erro
Euler	2,5	0,58
Euler Modificado	3	0,08
Exata	3,08	0

Interpole a função $x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$ por um polinômio de grau menor ou igual a 3 nos pontos $t_i = i \cdot h, i = 0, \ldots, 3$, $h = 0,2$. Use este polinômio para estimar o valor de $x(0,5)$ e estime o erro cometido. Compare sua estimativa com o erro efetivamente cometido.

Dado: Fórmula do erro do polinômio interpolador:

$$|E| = |f(x) - P_n(x)| = \frac{\max |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|, y \in [a, b]$$

Esconder resposta

Para esse exercício, precisamos interpolar a função:

$$x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$$

Por um polinômio de grau 3 nos pontos $t_i = i \cdot h$, com i indo de 0 a 3 e $h = 0,2$.

Para começar, vamos montar uma tabela com os valores de t_i e da função no respectivo ponto:

t_i	0	0,2	0,4	0,6
$x(t_i)$	2	2,1621	2,6749	3,6213

Agora precisamos aplicar algum método para interpolar a função nesses pontos. Vamos utilizar o método de Lagrange. Que é dado por:

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} x(t_j) \cdot L_j$$

No nosso caso, temos 4 pontos, então teremos uma soma de 4 termos. O termo L_j é:

$$L_j = \frac{\prod_{i=0; i \neq j}^{n} (t - t_i)}{\prod_{i=0; i \neq j}^{n} (t_j - t_i)}$$

O símbolo $\prod$ representa o produtório.

Vamos calcular os termos L_j. Começando com $j = 0$, teremos:

$$L_0 = \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)(t_0 - t_3)} = \frac{(t - 0,2)(t - 0,4)(t - 0,6)}{(0 - 0,2)(0 - 0,4)(0 - 0,6)}$$

$$L_0 = \frac{t^3 - 1,2t^2 + 0,44t - 0,048}{-0,048}$$

Para $j = 1$:

$$L_1 = \frac{(t - t_0)(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} = \frac{(t - 0)(t - 0,4)(t - 0,6)}{(0,2 - 0)(0,2 - 0,4)(0,2 - 0,6)}$$

$$L_1 = \frac{t^3 - t^2 + 0,24t}{0,016}$$

Seguindo, agora para $j = 2$

$$L_2 = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} = \frac{(t-0)(t-0,2)(t-0,6)}{(0,4-0)(0,4-0,2)(0,4-0,6)}$$

$$L_2 = \frac{t^3 - 0,8t^2 + 0,12t}{-0,016}$$

Por fim, para $j = 3$:

$$L_3 = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} = \frac{(t-0)(t-0,2)(t-0,4)}{(0,6-0)(0,6-0,2)(0,6-0,4)}$$

$$L_3 = \frac{t^3 - 0,6t^2 + 0,08t}{0,048}$$

Tendo todos os valores de L_j, podemos montar o polinômio:

$$P_3(t) = x(t_0) \cdot L_0 + x(t_1) \cdot L_1 + x(t_2) \cdot L_2 + x(t_3) \cdot L_3$$

Assim:

$$P_3(t) = 2\left(\frac{t^3 - 1,2t^2 + 0,44t - 0,048}{-0,048}\right) + 2,1621\left(\frac{t^3 - t^2 + 0,24t}{0,016}\right) + 2,6749\left(\frac{t^3 - 0,8t^2 + 0,12t}{-0,016}\right) + 3,6213\left(\frac{t^3 - 0,6t^2 + 0,08t}{0,048}\right)$$

Colocando cada potência de x em evidência:

$$P_3(t) = t^3\left(\frac{2}{-0,048} + \frac{2,1621}{0,016} + \frac{2,6749}{-0,016} + \frac{3,6213}{0,048}\right) + t^2\left(\frac{-2,4}{-0,048} + \frac{-2,1621}{0,016} + \frac{-2,13992}{-0,016} + \frac{-2,17278}{0,048}\right) +$$

$$+t\left(\frac{0,88}{-0,048} + \frac{0,5189}{0,016} + \frac{0,3209}{-0,016} + \frac{0,2897}{0,048}\right) + 2$$

Realizando as somas das frações:

$$P_3(t) = 1,72708t^3 + 3,3475t^2 + 0.0771t + 2$$

E chegamos ao **polinômio interpolador.** Vamos calcular o valor de $x(0,5)$:

$$P_3(0,5) = P_3(t) = 1,72708(0,5)^3 + 3,3475(0,5)^2 + 0.0771(0,5) + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3(0,5) = 3,09131$$

O valor real é:

$$x(0,5) = 3,08616$$

Assim, estimamos que o erro é:

$$|E| = |x(0,5) - P_3(0,5)| = 0,00514873$$

Mas, para obter um valor mais preciso do erro, podemos utilizar a fórmula do erro, que foi dada no enunciado e é:

$$|E| = |f(x) - P_n(x)| = \frac{\max |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$, onde y pertence ao intervalo trabalhado.

Como, no nosso caso, $n = 3$, precisamos começar encontrando a derivada de ordem 4 da função:

$$x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$$

$$x'(t) = 2e^{2t} - 2e^{-2t}$$

$$x''(t) = 4e^{2t} + 4e^{-2t}$$

$$x'''(t) = 8e^{2t} - 8e^{-2t}$$

$$x^{(iv)}(t) = 16e^{2t} + 16e^{-2t} = 16\left(e^{2t} + e^{-2t}\right)$$

A função $e^{2t} + e^{-2t}$ é **crescente** para todo $x > 0$, então o valor máximo vai ocorrer no extremo direito do intervalo. Logo:

$$\max \left| f^{(n+1)}(y) \right| = f^{(iv)}(0,6) = 16\left(e^{2(0,6)} + e^{-2(0,6)}\right) = 57,94098$$

Colocando esse valor no restante da fórmula:

$$|E| = \frac{57,94098}{(3+1)!} |(0,5-0)(0,5-0,2)(0,5-0,4)(0,5-0,6)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |E| = |-0,00362| \Rightarrow$$

$$E = 0,00362$$

Resposta esperada: Polinômio interpolador: $P_3(t) = 1,72708t^3 + 3,3475t^2 + 0.0771t + 2; P_3(0,5) = 3,09131; E = 0,00362.$