Tabela 1: Respostas das alternativas corretas das questões **Q1-Q8** para as diferentes provas.

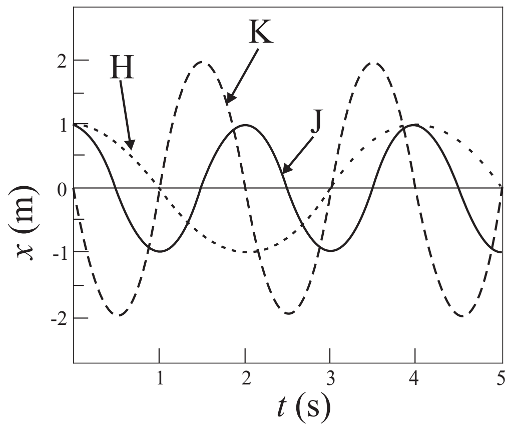
Prova	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**
17XY1 - 1297167890123	d	b	a	b	c	c	a	d
17YX1 - 1297267890123	c	d	c	e	e	b	c	c
54DE1 - 1297367890123	a	a	b	c	c	d	e	a
54DE2 - 1297467890123	b	c	e	a	b	e	d	e

Para todas as questões:

- A aceleração da gravidade na superfície da Terra é representada por g.
- Quando necessário, adote para g o valor de $10\,\mathrm{m/s^2}$.
- Os vetores unitários associados às coordenadas cartesianas x, y e z são, respectivamente, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$.
- Despreze a massa da mola.
- Despreze o atrito com o ar.
- $I = I_{CM} + MD^2$.
- $\vec{v}_p = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \otimes \vec{r}$.
- $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Enunciado da questão Q1.

[1,0 ponto] Os três gráficos da figura ao lado representam a posição em função do tempo, $x(t)$, de partículas realizando diferentes movimentos harmônicos simples, identificados pelas letras H, K e J. Se as velocidades máximas das partículas são dadas por $v_{max,H}$, $v_{max,K}$ e $v_{max,J}$ para os movimentos H, K e J, respectivamente, e ω_H, ω_K e ω_J são as respectivas frequências angulares dos movimentos, podemos afirmar que:



(a) $v_{max,H} > v_{max,J} > v_{max,K}$ e $\omega_H < \omega_J = \omega_K$

(b) $v_{max,H} < v_{max,J} = v_{max,K}$ e $\omega_H > \omega_J = \omega_K$

(c) $v_{max,K} > v_{max,J} > v_{max,H}$ e $\omega_H > \omega_J > \omega_K$

(d) $v_{max,H} < v_{max,J} < v_{max,K}$ e $\omega_H < \omega_J = \omega_K$

(e) $v_{max,H} < v_{max,J} < v_{max,K}$ e $\omega_H < \omega_J < \omega_K$

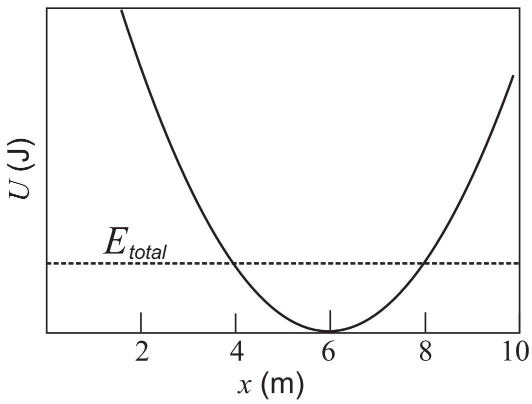
Resolução da questão Q1 - Resposta correta (d).

Do gráfico tiramos os períodos (T) das oscilações e as respectivas amplitudes (A) dos movimentos H, K e J. Com estes dados podemos determinar as frequências angulares $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e a velocidade máxima v_{max} de cada movimento, que pode ser obtida pela relação $v_{max} = \omega A$.
A análise dos dados da tabela mostra que a resposta correta é (d).

MHS	T (s)	A (m)	ω rad/s	v_{max} m/s^2
H	4	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
K	2	2	π	2π
J	2	1	π	π

Enunciado da questão Q2 .

[2,0 pontos] A figura ao lado é o diagrama de energia potencial para uma partícula de massa $m = 100\,$g, que está sujeita à força conservativa $F(x) = -k(x - x_0)$, onde $k = 10$ N/m. A partícula é liberada do repouso na posição $x(t = 0) = 8$ m, com energia mecânica total E_{total}, representada na figura por uma linha horizontal tracejada. Com base nestas informações podemos afirmar que a equação horária que descreve a velocidade da partícula, em m/s, é:



(a) $v(t) = -80\sin(10\,t - \pi/2)$

(b) $v(t) = -20\sin(10\,t)$

(c) $v(t) = -80\sin(10\,t)$

(d) $v(t) = -20\sin(10\,t + \pi/2)$

(e) $v(t) = -20\sin(10\,t + \pi)$

Resolução da questão Q2.

A análise do gráfico mostra que para a energia total dada, a partícula oscila simetricamente entre os pontos $x = 4$m e $x = 8$m. Portanto, a amplitude do movimento é $A = 2$m. Conhecendo a amplitude, podemos determinar a energia mecânica total que é dada por $E_{total} = \frac{1}{2}kA^2$ já que tanto A quanto k são conhecidos. Além disso, quando toda a energia mecânica está na forma de energia cinética, podemos calcular a velocidade máxima da partícula usando que $E_{total} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = \sqrt{\frac{10(2)^2}{0,1}} = 20\,\text{m/s}$$

Como $v_{max} = \omega A$ podemos escrever a expressão de $v(t)$ como:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega\,t + \phi) = -v_{max}\sin(10\,t + \phi) = -20\sin(10\,t + \phi)$$

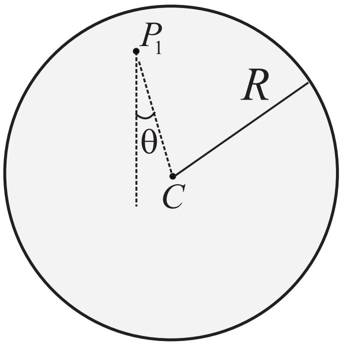
onde $\omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{20}{2} = 10\,\text{rad/s}$. Resta ainda determinarmos a constante de fase do movimento. Como a partícula está em repouso em $t = 0$, a constante de fase deve ser tal que $\sin\phi = 0$, ou seja, $\phi = 0, \pi, 2\pi......$ A expressão da posição da partícula em função do tempo é dada por $x(t) = x_0 + A\cos(\omega\text{t} + \phi)$ onde $x_0 = 6$ m e em $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 8$ m. Usando estas informações na expressão de $x(t)$ teremos:

$$8 = 6 + 2\cos(\phi) \Rightarrow \cos\phi = 1 \Rightarrow \boxed{\phi = 0}.$$

Portanto, a expressão correta é $v(t) = -20\sin(10\,\text{t})$ [m/s].

Enunciado das questões Q3.

[1,0 pontos] Um pêndulo, constituido por um disco fino de massa $2M$ e raio R, e centro de massa em C, é pendurado por um ponto P_1 a um eixo fixo, conforme mostra a figura. O disco pode balançar livremente, de um lado para outro, quando é deslocado, de um ângulo θ, a partir de sua posição que equilíbrio. Se o movimento do pêndulo é restringido a ângulos pequenos, e a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa é $D = \frac{3}{4}R$, o período T das oscilações quando ele oscila em torno do ponto P_1 é:



⋆ O momento de inércia de um disco de raio r e massa m em relação ao seu eixo de simetria por rotação é $I = \frac{1}{2}mr^2$.

(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{17R}{3g}}$

(b) $T = \pi\sqrt{\frac{17R}{3g}}$

(c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{17R}{2g}}$

(d) $T = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{17R}{g}}$

(e) $T = \pi\sqrt{\frac{17R}{2g}}$

Solução da questões Q3.

Para encontrar a equação diferencial para um pêndulo físico usamos a equação que descreve o movimento de um corpo rígido $\tau = I\alpha$ onde τ é o torque aplicado ao pêndulo devido à força peso e I é o momento de inércia do pêndulo, ambos calculados em relação ao ponto de suspensão P_1. A equação diferenial do pêndulo será:

$$\tau = -PD\sin(\theta) = I\ddot{\theta}$$

onde D é a distância entre o centro de massa e o ponto de suspensão, e P é o peso do pêndulo. Restringindo o movimento a pequenas oscilações a equação reduz-se à:

$$\ddot{\theta} + \frac{P\,D}{I}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{P\,D}{I}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{P\,D}}}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos calcularemos o momento de inércia do disco em relação ao ponto P_1:

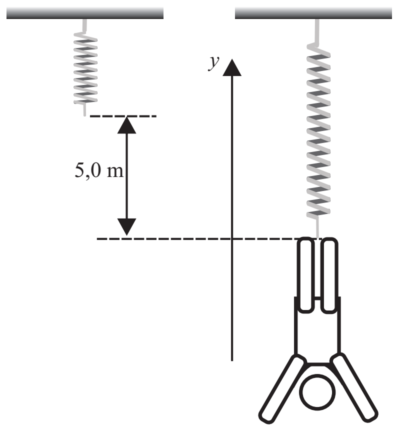
$$I_{P_1} = I_{CM} + mD^2 = \frac{1}{2}(2M)R^2 + (2M)(\frac{3R}{4})^2 = MR^2 + \frac{9}{8}MR^2 = \frac{17}{8}MR^2$$

Substituindo os valores teremos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{17}{8}MR^2}{(2Mg)(\frac{3}{4}R)}} = \pi\sqrt{\frac{17R}{3g}}$$

Enunciado das questões Q4 e Q5.

Q4 - [1,0 ponto] Um malabarista de 81 kg está pendurado por uma corda com constante elástica de 270 N/m, que pode ser modelada como uma mola. Ele é puxado para baixo, até um ponto em que a corda está 5,0 m mais comprida do que seu comprimento não esticado, e depois é liberado a partir desta posição. Adotando o eixo mostrado na figura e considerando que as oscilações verticais do malabarista constituem um MHS unidimensinal, a posição do malabarista como função tempo, medida a partir da posição de equilíbrio do malabarista, é:



(a) $y(t) = +1,5\cos(\sqrt{10/3}\,t - \pi)$

(b) $y(t) = +2,0\cos(\sqrt{10/3}\,t + \pi)$

(c) $y(t) = -2,5\cos(\sqrt{10/3}\,t + \pi)$

(d) $y(t) = +3,0\cos(\sqrt{10/3}\,t + \pi)$

(e) $y(t) = -5,0\cos(\sqrt{10/3}\,t)$

Resolução da (Q4).
Embora a corda esteja esticada em 5,0 m quando o malabarista é liberado, esta não é a amplitude do movimento das oscilações. As oscilações ocorrem em torno da posição de equilíbrio, de modo que devemos determinar o ponto de equilíbrio. No equilíbrio, a força peso do malabarista e a força elástica tem módulos iguais:

$$mg = k\Delta L$$

onde m é a massa do malabarista, k a constante elástica e ΔL é a deformação da mola. Substituindo os valores obtemos

$$\Delta L = \frac{mg}{k} = \frac{81 \times 10}{270} = 3,0 \text{ m}$$

Esticar a corda em 5,0 m puxa o malabarista para 2,0 m abaixo do ponto de equilíbrio; logo a amplitude do movimento será $A = 2,0$ m, ou seja o malabarista oscila com amplitude de $A = 2,0$ m em torno de um ponto 3,0 m abaixo de onde originalmente se encontrava a extremidade da corda livre. A posição do malabarista como função do tempo, medida a partir da posição de equilíbrio, é

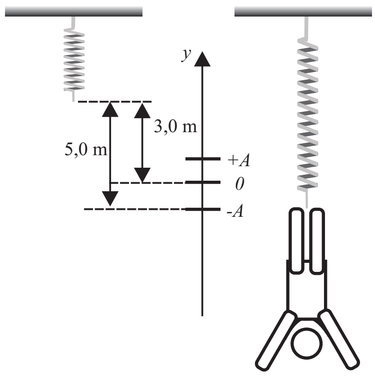
$$y(t) = 2,0\cos(\omega t + \phi)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{10/3}$ rad/s. A condição inicial

$$y(0) = A\cos\phi = -A$$

exige que a constante de fase seja $\phi = \pi$rad. Assim, a posição em função do tempo é:

$$y(t) = 2,0\cos(\sqrt{10/3}\ t + \pi)$$



Q5 - [0,5 ponto] O malabarista, liberado quando a corda não está esticada, desce uma distância H até parar. A amplitude da oscilação será:

(a) 1,5 m
(b) 2,0 m
(c) 3,0 m
(d) 5,0 m
(e) 6,0 m

Resolução da (Q5).
O malabarista cairá até que toda a energia potencial gravitacional seja transformada em energia potencial elástica e sua energia cinética seja nula, ou seja, quando

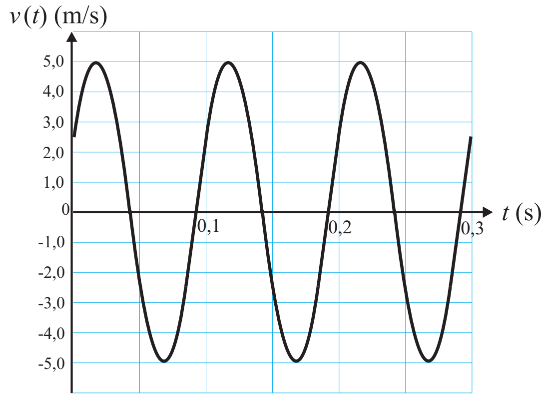
$$mgH = \frac{1}{2}kH^2$$

ou

$$H = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \times 81 \times 10}{270} = 6,0\,\text{m}$$

Depois de cair a distância H, o malabarista pára momentaneamente, sua energia cinética será nula neste instante, e então passa a subir. O malabarista irá parar de subir quando a energia do sistema for recuperada na forma gravitacional. Portanto, ele vai subir 6 m acima de sua posição mais baixa. A amplitude de oscilação será $A = \frac{H}{2} = 3$ m.

Enunciado das questões Q6.



[2,0 pontos] O gráfico mostra a velocidade em função do tempo de uma partícula de massa $m = 2$ kg, ligada a uma mola, que move-se em movimento retilíneo sobre uma mesa horizontal sem atrito, realizando um MHS. A velocidade inicial da partícula é $v(0) = 2,5$ m/s. A expressão do deslocamento da partícula em função do tempo é:

(a) $x(t) = \frac{1}{4\pi}\cos(5\pi\, t + \pi/6)$

(b) $x(t) = \frac{1}{8\pi}\cos(20\pi\, t + 5\pi/6)$

(c) $x(t) = \frac{1}{4\pi}\cos(20\pi\, t + 7\pi/6)$

(d) $x(t) = \frac{1}{8\pi}\cos(10\pi\, t - 7\pi/6)$

(e) $x(t) = \frac{1}{4\pi}\cos(20\pi\, t - \pi/6)$

Resolução da (Q6).

Se assumirmos que a posição da partícula em função do tempo é dada pela expressão $x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi)$, a expressão da velocidade de um objeto que realiza MHS tem a forma

$$v(t) = -v_{max}\sin(\omega t + \phi)$$

onde a velocidade máxima é dada por $v_{max} = \omega A$ sendo A a amplitude do movimento e $\omega = 2\pi/T$. Examinando o gráfico, vemos que o período do movimento é $T = 0,1$ s. Logo,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Do gráfico ainda obtemos que $v_{max} = 5$ m/s. Assim, a amplitude do movimento da partícula é:

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{5}{20\pi} = \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{m}.$$

Usaremos a expressão da velocidade, $v(t) = -v_{max}\sin(\omega\, t + \phi)$, em $t = 0$ para encontrar e constante de fase do movimento. Já determinamos que $\omega = 20\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ e do gráfico em $t = 0$ temos $v(0) = 2,5$ m/s. Substituindo estas informações na expressão de $v(t)$ temos:

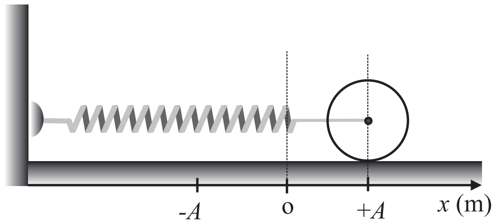
$$2,50 = -5\sin\phi \quad \rightarrow \boxed{\sin\phi = -0,5}$$

Existem dois ângulos que satisfazem a condição acima, $\phi = -\frac{\pi}{6}$ rad e $\phi = -\frac{5\pi}{6}$ rad. A análise do gráfico mostra que em $t = 0$, a posição da partícula é negativa. Assim, o ângulo $\phi = -\frac{5\pi}{6}$ rad, que está no terceiro quadrante, é o que descreve corretamente o sentido do movimento. Tomando este ângulo como positivo teremos:

$$x(t) = \frac{1}{4\pi}\cos(20\pi\, t + 7\pi/6)$$

Enunciado da questão Q7.

[1,0 ponto] Uma mola de constante elástica K tem uma extremidade fixada numa parede e a outra, no centro de um disco de massa M, que pode movimentar-se numa superfície horizontal. No instante inicial, o disco está em repouso na posição de equilíbrio. A partir da posição de equilíbrio, o disco é puxado para a direita até que a elongação da mola seja A. Depois de solto a partir da posição $x = +A$, o disco rola sem deslizar, realizando um movimento harmônico simples. A frequência angular do movimento é:



⋆ O momento de inércia de um disco de raio R e massa M em relação ao seu eixo de simetria por rotação é $I = \frac{1}{2}MR^2$.

(a) $\omega = \sqrt{\frac{2K}{3M}}$

(b) $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

(c) $\omega = \sqrt{\frac{3K}{2M}}$

(d) $\omega = \sqrt{\frac{4K}{3M}}$

(e) $\omega = \sqrt{\frac{3K}{4M}}$

Resolução da (Q7).

Como o movimento é de rolamento sem deslizamento, podemos usar a conservação de energia. A velocidade do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio é máxima e a energia potencial na mola é nula. Então, neste instante, toda a energia do sistema está na forma de energia cínetica: parte como energia cinética de translação do centro de massa e parte como energia de rotação ao redor do centro de massa, isto é:

$$\frac{1}{2}Mv_{max}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

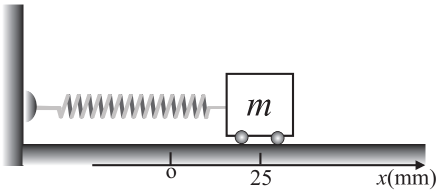
onde A é a amplitude do movimento. Para o disco de momento de inercia $I = \frac{1}{2}MR^2$ e considerando que no movimento sem escorregamento $\omega = v/R$ a equação anterior reduz-se a:

$$\frac{1}{2}Mv_{max}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{max}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}KA^2 \rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2K}{3M}}A}.$$

Sabemos que no MHS a velocidade máxima e a frequência angular obedecem a relação $v_{max} = \omega A$. Assim teremos

$$\omega = \frac{v_{max}}{A} \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2K}{3M}}}$$

Enunciado da questão Q8.
[1,0 ponto] Uma mola tem uma extremidade fixada numa parede e a outra num carrinho, que pode movimentar-se numa superfície horizontal sem atrito. O carrinho em movimento comporta-se como um oscilador harmônico, realizando um movimento harmônico simples. Se o carrinho realiza 2 ciclos/s e no instante inicial de movimento encontra-se na posição $x(0) = 25$ mm com velocidade $\dot{x}(0) = 120$ mm/s, a amplitude da oscilação é:



⋆ **Adote** $\pi = 3$.

(a) $5\sqrt{26}$ mm

(b) $5\sqrt{13}$ mm

(c) $12\sqrt{5}$ mm

(d) $6\sqrt{3}$ mm

(e) $7\sqrt{5}$ mm

Solução da questão Q8.
A posição do bloco $x(t)$ e a velocidade $\dot{x}(t)$ da massa m em função do tempo são dadas por:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

e

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi).$$

Em $t = 0$, temos:

$$x(0) = A\cos(\phi) \tag{1}$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin(\phi) \tag{2}$$

Elevando ao quadrado a Eq. (1) e somando-a com o quadrado da Eq. (2) (dividida por ω^2) teremos:

$$A^2\cos^2\phi + \frac{A^2\omega^2\sin^2\phi}{\omega^2} = A^2 = x(0)^2 + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}}$$

onde $\omega = 2\pi f$ sendo $f = 2$ ciclos/seg (de acordo com o enunciado). Assim $\omega = 4\pi$ rad/s e

$$\Rightarrow A = \sqrt{(25\,\text{mm})^2 + \frac{(120\,\text{mm/s})^2}{(4\pi\,\text{rad/s})^2}} = 5\sqrt{29}\,\text{mm}.$$