

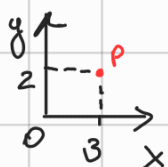
Física I - Aula 01

cinemática: estudo do movimento!

↳ Física clássica: domínio de velocidade; objetos são muito pequenos.

• HIPÓTESE: Tempo e espaço absolutos.

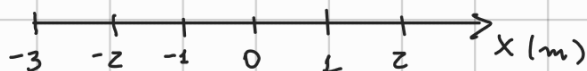
• SISTEMAS de coordenadas (Referencial).



- ponto P se refere a
- Eixos que posicionam objetos.

P(3,2): está na posição 3 no eixo x e 2 no eixo y.

Caso 1b:



Se o objeto estiver em movimento, sua posição vai mudar e/ou tempo.

t(s)	0	1	2	3	→ A partir dessa
x(m)	-3	1	2	-2	tabela posso fazer uma função!

$x(t)$ posso saber onde o objeto vai estar a cada instante de tempo.

por isso: $x(t)$ é a posição

↳ Velocidade

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

movimento uniforme

$$v = v_0$$

$$x = x_0 + v \cdot t$$

movimento uniformemente variado

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

→ salvar todas as fórmulas na cabeça, amém!

1)

Resumo de Cálculo

↳ cálculo ao resgate:

• first: limites

"Que valor a função terá em um determinado ponto se ela fosse contínua ali".

Exemplos

1. $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2^2 = 4$$

↳ função é contínua? só calcular ela naquele ponto.

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ → clássico exemplo. usa fatoração.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{não tem solução}$$

ela não é contínua!

Explicando a fatoração:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

↳ Decore Amém!

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x^2 - 2^2)}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

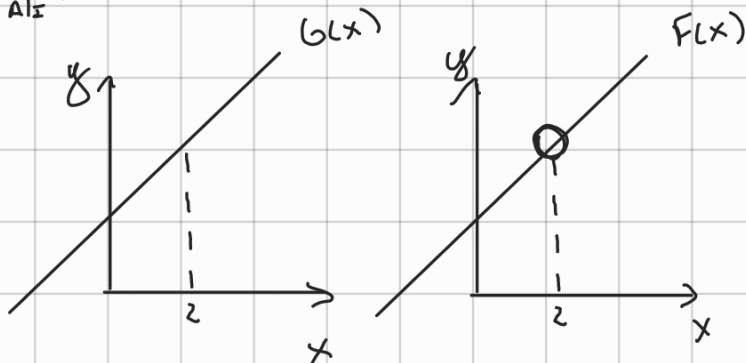
$$(x+2) = 2+2 = 4 //$$

$$\rightarrow G(x) = x+2 \quad \rightarrow F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x+2$$

$G(x) \neq F(x)$: ão s iguais, MAS s somente diferente no ponto $x=2$, para todos os outros s iguais!

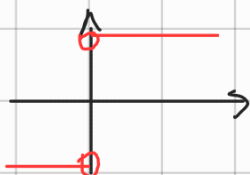
Se $F(x)$ fosse contnua, seria a $G(x)$. Por isso existe essa definio de limite.

"Que valor a funo iria ter em um determinado ponto se ela fosse contnua ali"



$$3. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0 \\ -2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

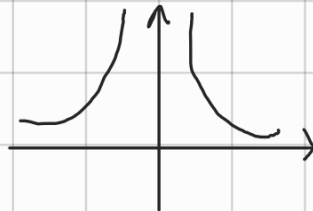
ã existe! Porque? porque ã existe uma funo contnua que seja igual $f(x)$.



ã existe funo contnua que abraque isso

$$4. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

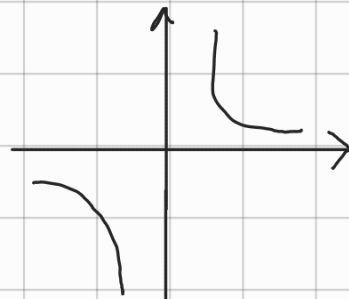


$$\rightarrow \text{so pensar } \frac{1}{20^2} = 0,0025$$

$$\frac{1}{10^2} = 0,01 \quad \frac{1}{0,5^2} = 400 \quad \frac{1}{0,0025^2} = 160\,000$$

O nmero vai aumentando absurdamente.

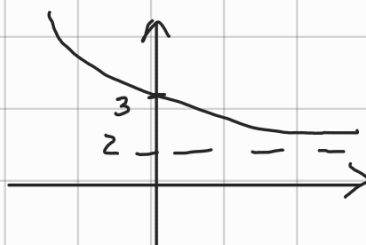
$$5. f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ??$$

ã definida!

$$6. f(x) = 10^{-x} + 2$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

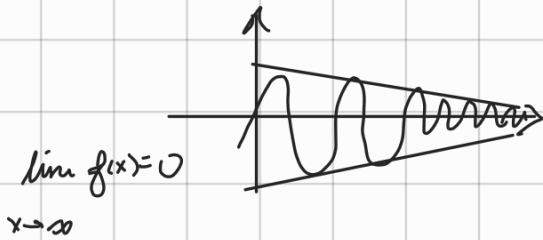
PA? Quanto + cresce o nmero de x , mais 10^{-x} tende a 0.

7. $f(x) = \sin(x)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ??$ ela n̄ tende a nada

Quando o x vai p/ o infinito. Por isso, n̄ definida.

6. $f(x) = 10^{-x} \cdot \sin(x)$



7. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \leftrightarrow$ Limite Fundamental Trigonométrico.

Aula - 02

↳ Se não entender essa página relaxem é só uma motivação para derivar. Pode pular p/ a próxima folha

↳ derivadas

Sabemos que $v_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$

Se fizermos t_1 e t_2 consecutivos, então vemos velocidade instantânea.

Como usar o limite em física?

$$t_1 = t_2 \rightarrow t_1 = t_1$$

↓

$$v_m(t_1, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_1)}{t_1 - t_1} = \frac{0}{0}$$

↳ indeterminação

limite: $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Exemplo:

Queda Livre a partir do repouso

$$x(t) = 5t^2, \text{ temos a posição}$$

e queremos a velocidade. $v(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(t) = ??$$

1º Jeito de fazer a mão

• $\Delta t = 1s$

$$v_m(0, 1) = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5 \text{ m/s}$$

• $\Delta t = 1s$

$$v_m(1, 2) = \frac{20 - 5}{2 - 1} = 15 \text{ m/s}$$

→ A gente quer ir diminuindo o

Δt

• $\Delta t = 0,1s$

$$v_m(0, 0,1) = 3,5 \text{ m/s}$$

$$v_m(1, 1,1) = \frac{6,05 - 5}{1,1 - 1} = 10,5 \text{ m/s}$$

• $\Delta t = 0,01s$

$$v_m(0, 0,01) = 9,95$$

$$v_m(1, 1,01) = 10,05 \text{ m/s}$$

no limite $\Delta t \rightarrow 0$, $v(t) = 10 \text{ m/s}$

→ Vemos uma tendência!

Diminuindo Δt a vel. Se aproxima de 10 m/s .

2º Jeito de fazer com a definição de limites

$$\Delta x = x(1 + \Delta t) - x(1) = 5(1 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 1^2 = 10\Delta t + 5\Delta t^2$$

$$v_m(1, 1 + \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t} = 10 + 5\Delta t \quad \text{p/ } \Delta t \neq 0$$

$$10 + 5\Delta t \rightarrow 10 \text{ m/s} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

↳ Se procurarmos não usaremos

o 1º e nem o 2º Jeito.

↳ usaremos a derivada!

→ Cálculo ao resgate de novo!

DERIVADAS E SUAS REGRAS!

1. $\frac{d}{dx} x^m = m \cdot x^{m-1}$

2. $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ → p! esse lembra de deriva de

SENO é

Sem o sinal
p! o cosseno

3. $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

↳ derivada de Cosseno

4. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a$ é com sinal no seno

5. $\ln a = \log_e a$ e = ne de euler

6. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

7. $\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x \cdot \ln b}$

8. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

↳ 8 derivadas básicas e as + usadas são:

1, 2, 3, 6 e 8

Regras p! derivadas que contém duas funções (funções compostas)
→ Sejam f e g duas funções deriváveis

1. $\frac{d}{dx} (f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

2. $c = \text{cte}$

$\frac{d}{dx} (c \cdot f) = c \frac{df}{dx}$

→ regra do produto

3. $\frac{d}{dx} (f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$

↳ CUIDADO: ASSIM QUE SE FAZ O Produto de 2 funções!

Regra do quociente

4. $\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g^2} \left[\left(\frac{df}{dx} \right) \cdot g - f \cdot \left(\frac{dg}{dx} \right) \right]$

↳ CUIDADO: ASSIM QUE SE FAZ A derivada de 2 funções!

5. REGRAS DA CADEIA

$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \left(\frac{df}{dg} \right) \left(\frac{dg}{dx} \right)$

↳ TODAS ESSAS regras S ão importantes de saber!

Exemplos

1)

$$\text{função: } f(x) = (x^3 + x^2 + 2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 2x + 0$$

2)

$$f(x) = 3 \cos(x) \quad \rightarrow 3 \text{ é etc}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3 \cdot (-\sin(x)) = -3 \sin(x)$$

3) $f(x) = x \cdot e^x \rightarrow$ duas funções

$\rightarrow$ regra do produto.

$$g(x) = x; \quad h(x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(g \cdot h) = \frac{dg}{dx} \cdot h + g \cdot \frac{dh}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x$$

4) regra do quociente

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ então } g(x) = \ln x, \quad h(x) = x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{dg}{dx} \right) \cdot h - g \cdot \left(\frac{dh}{dx} \right) \right]$$

$$\frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1 \right] = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$5) f(x) = e^{x^2} \quad g(x) = e^{h(x)}$$

$$\hookrightarrow \text{REGRAS DA CADEIA} \quad h(x) = x^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = e^h \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x$$

6) $f(x) = 2^{x^2} \rightarrow$ Regra da Cadeia

$$g(x) = 2^h; \quad h(x) = x^2$$

$$\frac{dg}{dh} = 2^h \cdot \ln 2 \quad \text{e} \quad \frac{dh}{dx} = 2x$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
apareceu um $\ln$
do número. **REGRAS**
4 LÁ EM CIMA!

$$2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2 = \frac{df(x)}{dx}$$

6) $f(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

$$g(x) = h^2 \quad h = \sin(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2h \cdot \cos x = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$\hookrightarrow$ Podemos usar as derivadas?

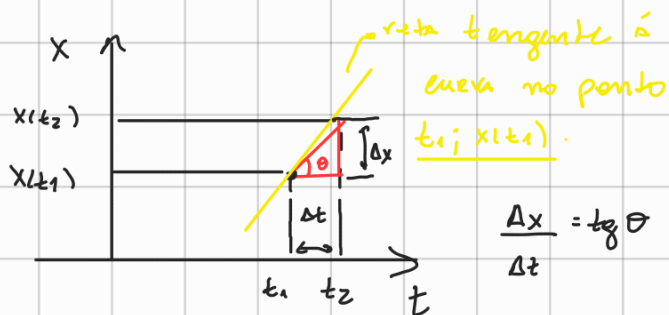
IMPORTANTE!

$$v = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

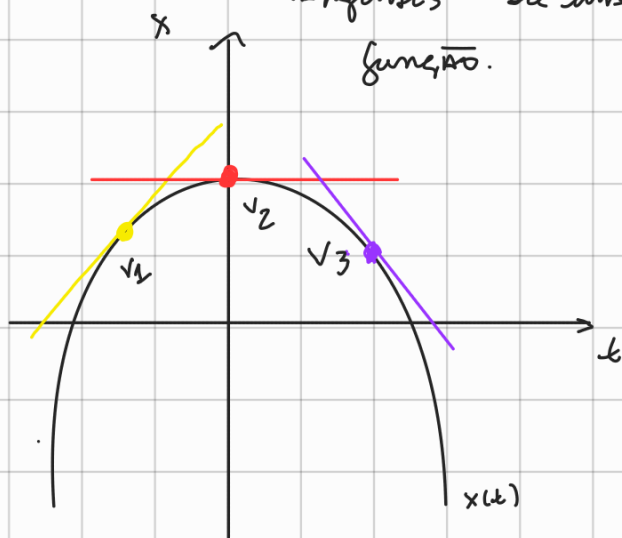
$$a = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{derivada segun-} \\ \text{da} \end{array} \right.$$

Interpretação gráfica



então quanto + diminuirmos o triângulo vermelho pegando o mesmo ângulo θ se aproximamos de uma reta tangente ao ponto $t_1; x(t_1)$.

outro exemplo: várias curvas tangentes de uma função.



$v_1 > 0$
 $v_2 = 0$
 $v_3 < 0$

como seria a velocidade de dessa função posição $x(t)$.

outra coisa

• Todo ponto de extremo local (máximo ou mínimo) tem derivada zero.

Obs: mas nem toda derivada zero é ponto de extremo local.

então a regra para saber se um ponto é máximo ou mínimo.

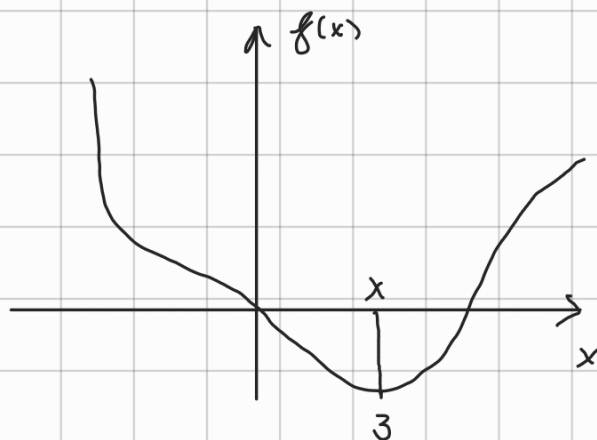
1. Faz a 1ª derivada e iguala a 0 e pega os pontos candidatos.

2. Faz a 2ª derivada e calcula nos pontos candidatos, se a função for $\neq 0$, ela é um ponto de máximo ou mínimo.

Ex: $f(x) = x^4 - 4x^3$ $\frac{df}{dx} = 4x^3 - 12x^2$

derivadas valem 0 nos pontos:

$x=0$; $x=3$, esses são os nossos candidatos de máximos ou mínimos, averiguando.



Podemos olhar fazendo o gráfico ou olhar para a segunda derivada.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 12 \cdot 2x = 12x(x-2)$$

$f''(x=3) = 12 \cdot 3(3-1) = 36 \neq 0$

então ele é um ponto de extremo!

CUIDADO! Se a segunda derivada
calculado no ponto for $= 0$, então
NÃO AFIRMAMOS nada, precisamos
calcular a 3ª derivada. 😊

Lorine
Guzzi

Aula 03

↳ Integral

Dizemos que $G(x)$ é primitiva de $f(x)$ se $\frac{dG}{dx} = f(x)$.

Se $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $G(x) + K$ tbm é.

$$\frac{d[G(x) + K]}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dK}{dx} = f(x) + 0$$

$G(x)$ faz parte de uma família de primitivas que diferem de uma constante.

$$G(x) = \int f(x) dx$$

REGRAS

$$1. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + K$$

$$2. \int \cos(x) dx = \sin(x) + K$$

$$3. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$$

↳ então pra isso derivando $-\cos(x)$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = -(-\sin(x)) = \sin(x)$$

$$4. \int e^x dx = e^x + K$$

$$5. \int \frac{1}{x} dx = \ln x + K$$

$$6. \int (f+g) dx = \int f dx + \int g dx$$

$$7. \int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad \text{pois } c = \text{cte}$$

EXEMPLOS

$$1. f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

$$G(x) = \int f(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{0+1}}{0+1}$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{1} + K$$

$$2. f(x) = 3 \cos(x)$$

$$G(x) = \int f(x) = 3 \int \cos(x) = 3 \cdot \sin(x) + K$$

$$3. f(x) = x e^x$$

$$G(x) = \int f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{n} \text{ aprendemos} \\ \text{a fazer essa ci} \\ \text{o que o prof deu} \end{array} \right.$$

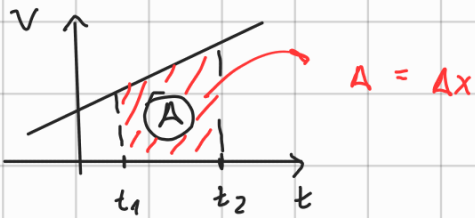
↳ em teoria não cobra 😊

Tem funções que n existe como calcular primitivas. ex:

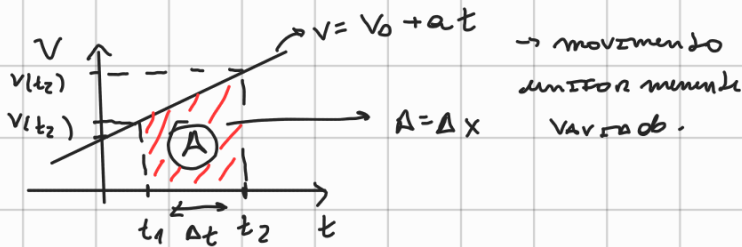
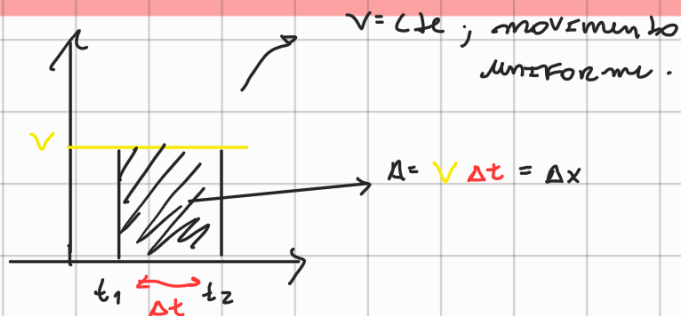
$$\int e^{-x^2} dx = \text{n sabemos!}$$

com integral conseguimos

calcular: **ÁREA!**



↳ em um cálculo de velocidade por tempo, a área entre o Δt e o Δ variação da posição. Δx .



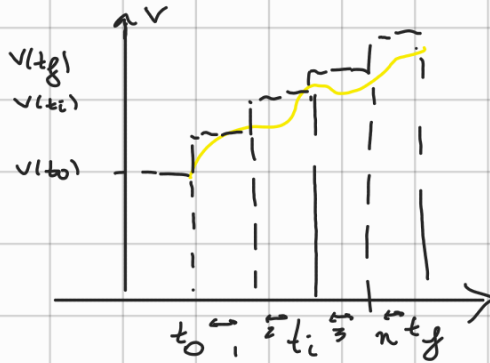
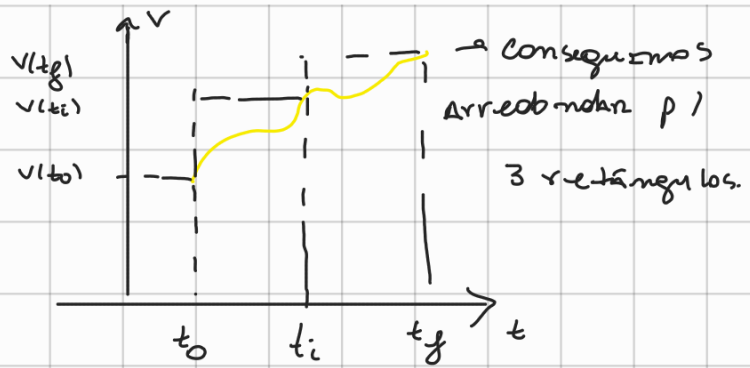
$$A = \Delta x = \frac{(b+B) \cdot h}{2} \rightarrow \text{área de um trapézio}$$

$$A = \Delta x = \frac{[v(t_1) + v(t_2)] \cdot \Delta t}{2} =$$

$$\frac{(v_0 + at_1 + v_0 + at_2) \cdot \Delta t}{2} =$$

$$= v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2)$$

Valeu p/ esses 2 casos, mas vale para tudo!

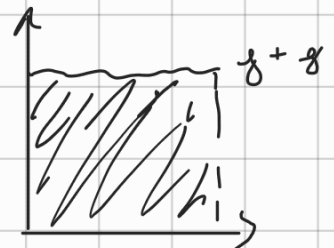


diminuimos os intervalos de tempo para ser + exato dno p/ calcular a área. Então: temos uma soma

$$A = \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_g} v(t) dt$$

Regras para Calcular Área

$$1. \int_{x_1}^{x_2} (f+g) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$



$$2. \int_{x_1}^{x_2} (c \cdot f(x)) dx = c \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$3. \int_{x_1}^{x_2} f(c \cdot x) dx = \frac{1}{c} \int_{cx_1}^{cx_2} f(x) dx$$

Um exemplo da Regra 3.

$f(x) = 2x^2$ X em km, mas
Queremos colocar
p1 metros. então

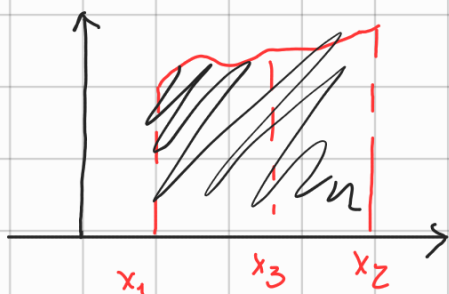
→ Precisamos converter p1 isso:

$$\int_{1\text{km}}^{2\text{km}} f(x \text{ em km}) dx =$$

$$C = 1000$$

$$\frac{1}{1000} \int_{1000}^{2000} f(x \text{ em metros})$$

4. Temos:



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x) dx$$

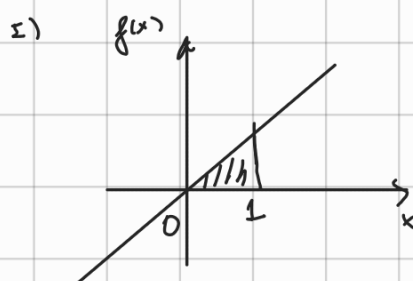
$$5. \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$6. \int_{x_1}^{x_1} f(x) dx = 0$$

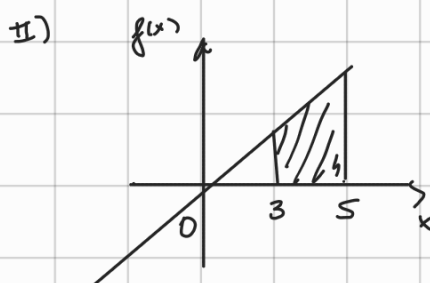
teorema fundamental do cálculo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = G(x_2) - G(x_1)$$

Exemplos: $f(x) = x$



$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 0,5$$



$$\int_3^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx =$$

$$= \int_0^5 f(x) dx - \int_0^3 f(x) dx \quad \textcircled{2}$$

Porque todas essas integrais são
iguais?

① $\int_0^5 \rightarrow$ Você calcula toda a Área
de 0 até 5

e $\int_3^0$ Vai dar um número
negativo do que seria a
Área de 0 até 3.

Portanto, na conta ficaria:
Área de 0 até 5 - Área de 0 até 3 =
= Área de 3 até 5

② Você vai calculando a área de 0 até 5 $\int_0^5$ e depois faz subtrair a área de 0 até 3 $-\int_0^3$.

Portanto:

$$\int_3^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx =$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^5 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_3^0 =$$

$$\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \frac{0^2}{2} - \frac{3^2}{2} = 8 //$$

III) $\int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx =$

$$\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-4}^0 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 =$$

$$\frac{0^2}{2} - \frac{(-4)^2}{2} + \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 0$$

Então temos:

Permite-se:

$$G(x) = \int f(x) dx + K \rightarrow \text{Integral}$$

Limite inferior e superior de integração.

Área:

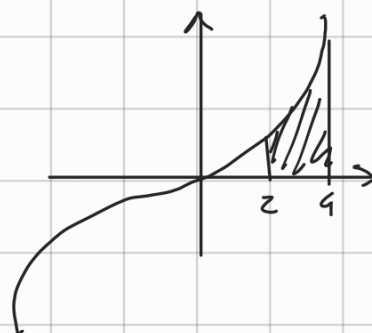
$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \rightarrow \text{Integral}$$

definida

teorema fundamental do cálculo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = G(x_2) - G(x_1)$$

mais exemplos:



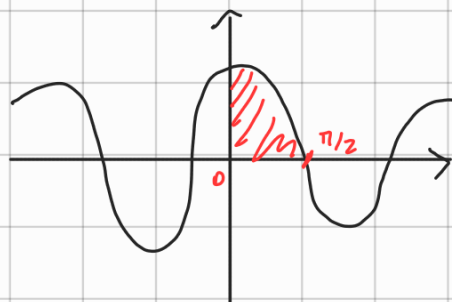
1. $f(x) = x^3$

$$G(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + K$$

$$G(4) - G(2) = \frac{4^4}{4} + K - \left[\frac{2^4}{4} + K \right] =$$

$$\underline{60}$$

2. $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$



$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

limite
quiza

Aula 04

Aplicando Cálculo em Cinemática.

• 1b

$x(t)$ $\xrightarrow{\text{derivada}}$ $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\xrightarrow{\text{derivada}}$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
 ↓ ↓ ↓
 Posição Velocidade Aceleração

$x(t) = \int v(t) dt + K$ $\xleftarrow{\text{integral}}$ $v(t) = \int a(t) dt + K$ $\xleftarrow{\text{integral}}$ $a(t)$
 ↓ ↓ ↓
 Posição Velocidade Aceleração

Para calcular as constantes precisamos de + informações.

EXEMPLO:

1) $a(t) = 2t$; $v(0) = 0$; $x(0) = 10$;
 Qual é a função $x(t)$?

$$v(t) = \int a(t) dt \rightarrow v(t) = \int 2t dt = \frac{2t^2}{2} + K$$

$$v(t) = t^2 + K \rightarrow v(0) = 0 \rightarrow v(0) = \underline{0^2} + K = 0$$

$K=0 \rightarrow v(t) = t^2$ $\rightarrow$ Condição Inicial, dado no enunciado

$$x(t) = \int v(t) dt \rightarrow x(t) = \int t^2 dt$$

$$= \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{3} + H = x(t)$$

Condição Inicial dado no enunciado

$$x(0) = 10$$

$$x(0) = \frac{0^3}{3} + H = 10 \rightarrow H = 10$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 10$$

2) $a(t) = 2t \rightarrow v(2) = 2$; $x(3) = 10$

mudou a condição inicial

$$v(t) = \int 2t dt + K_1 = t^2 + K_1$$

$$v(2) = 2^2 + K_1 = 4 + K_1 = 5 \rightarrow K_1 = 1$$

$$v(t) = t^2 + 1$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{t^3}{3} + t + K_2$$

$$x(3) = \frac{3^3}{3} + 3 + K_2 = 10 \rightarrow K_2 = 10 - 12 = -2$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + t - 2$$

3) $a(t) = 2 \cos t$; $v(0) = 0$; $x(0) = 0$

$$v(t) = \int a(t) dt + K_1 = 2 \int \cos t dt + K_1$$

$$= 2 \sin t + K_1 \quad v(0) = 2 \sin 0 + K_1$$

$$K_1 = 0$$

$$x(t) = \int v(t) dt = 2 \int \sin t dt =$$

$$= -2 \cos t + K_2$$

$$x(0) = -2 \cos 0 + K_2 = 0 \rightarrow K_2 = 2$$

$$x(t) = -2 \cos t + 2$$

Qualquer problema 1b podemos resolver!

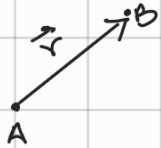
↳ da cinemática!

2D e 3D

↳ um deslocamento $\vec{r}$ de P para Q é descrito apenas com números, precisamos informar direção e sentido.

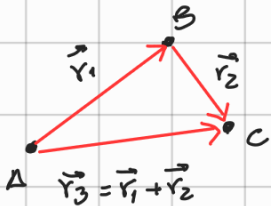
Algebrá Chegou!

objeto que foi de A para B .



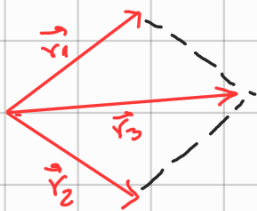
SOMA DE VETORES: objeto foi de A para B

e depois de B para C



outro jeito:

regra do Paralelogramo:



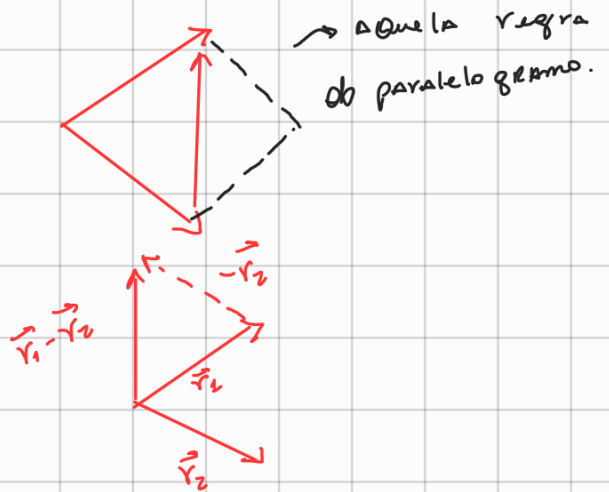
$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

Vetor nulo: vetor sem tamanho = $\vec{0}$.

Vetor oposto: vetor que somado ao vetor original dá um vetor nulo $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{0}$

$$\vec{r}_2 = [-\vec{r}_1]$$

Subtração de vetores: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (-\vec{r}_2)$



→ aquela regra do paralelogramo.

Produto por escalar: $\lambda \vec{r}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

O vetor resultante será:

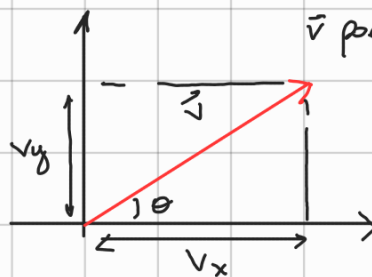
→ mesma direção de $\vec{r}$.

→ sentido $\left\{ \begin{array}{l} \text{igual se } \lambda > 0 \\ \text{oposto se } \lambda < 0 \end{array} \right.$

→ módulo $|\lambda|$ vezes maior.

Descrição de vetores em um sistema de coordenadas:

ma de coordenadas:



$\vec{v}$ pode ser descrito como:
 $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

componentes de $\vec{v}$: projeção de $\vec{v}$ no eixo $x = v_x$

Projeção de $\vec{v}$ no eixo $y = v_y$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow \text{módulo de } \vec{v}.$$

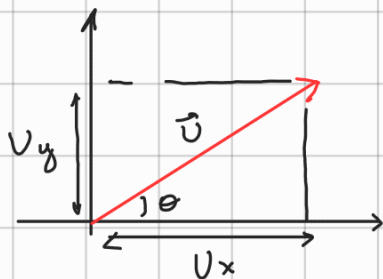
$$v_x = |\vec{v}| \cos \theta$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin \theta$$

} valores de v_x e v_y

VERSORES

↳ VETOR UNITÁRIO (TAMANHO 01) na direção de cada eixo.



$$\vec{U}_x = U_x \hat{i} \quad \vec{U}_y = U_y \hat{j}$$

$$\vec{U} = \vec{U}_x + \vec{U}_y = U_x \hat{i} + U_y \hat{j}$$

OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM VERSORES!

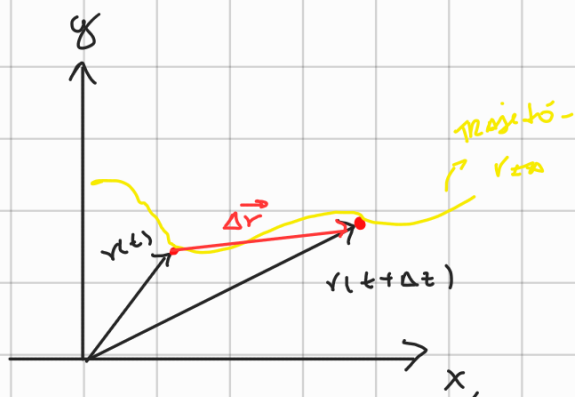
- 1) $-\vec{U} = (-U_x)\hat{i} + (-U_y)\hat{j}$
- 2) $\lambda \vec{U} = \lambda U_x \hat{i} + \lambda U_y \hat{j}$
- 3) $\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\hat{i} + (U_y + V_y)\hat{j}$

MOVIMENTOS 2D e 3D:

VETOR POSIÇÃO $\vec{r}(t)$ - A CADA INSTANTE

O VETOR VAI APONTAR ONDE O OBJETO ESTÁ:

UNIAO DOS PONTOS $\vec{r}(t)$ É A TRAJETÓRIA.



$\Delta \vec{r}$: VETOR DESLOCAMENTO

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$v_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

→ Velocidade média!

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

→ Velocidade em um instante

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$$

→ Como derivar um vetor?

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

Deriva as derivadas em cada componente.

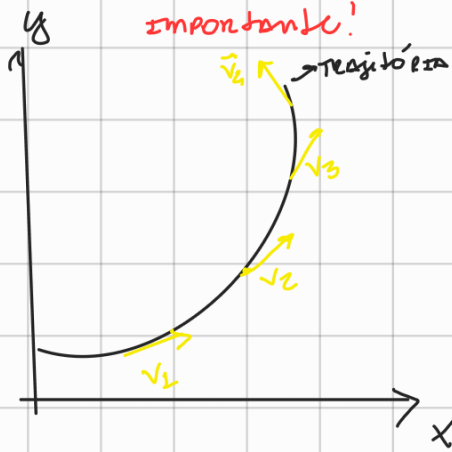
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$

Do mesmo jeito $a(t)$.

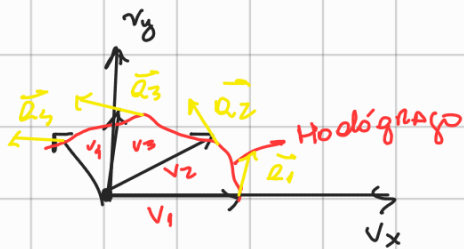
$$a(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

interpretação GRÁFICA
importante!



Veremos velocidade
tangente à
trajetória

Hodógrafa



aceleração é tangente à linha do Hodógrafa

→ Se a velocidade tem módulo constante, mas muda de direção temos aceleração.

Levine
Guzzi

Aula 05

↳ movimento uniformemente variado!

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{cte} \quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

↳ Dados do enunciado, condições

INICIAIS.

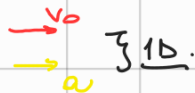
• Sejam dois instantes, t_0 e $t_0 + \Delta t$, com Δt pequeno, $\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t \rightarrow \Delta \vec{v} \parallel \vec{a}$
↳ paralelo.

→ Se $\vec{v}_0 \parallel \vec{a}$; $\Delta \vec{v} \parallel \vec{a}$

Logo: $\vec{v}(t) \parallel \vec{a} \quad \forall t$.

↳ como $\vec{v}$ indica trajetória → trajetória

é uma reta → movimento 1D.



→ Se $\vec{v}_0$ não é paralelo a $\vec{a}$; $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$ formam um plano



O movimento fica limitado nesse plano.
movimento 2D.

Podemos olhar p/ cada coordenada: VETORIALMENTE

$$\Delta v_x = a_x \Delta t \rightarrow v_x = v_{0x} + a_x \Delta t$$

$$\Delta v_y = a_y \Delta t \rightarrow v_y = v_{0y} + a_y \Delta t$$

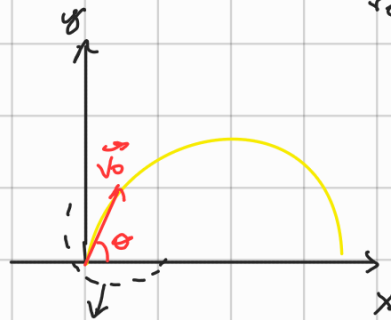
$$x = v_{0x} \Delta t + \frac{a_x \Delta t^2}{2} \quad \text{e} \quad y = v_{0y} \Delta t + \frac{a_y \Delta t^2}{2}$$

→ Juntando

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \Delta t + \frac{\vec{a} \Delta t^2}{2}$$

→ MOVIMENTO DE Projéteis

• Vamos adotar: $t_0 = 0$;
 $a = -g \hat{y}$
 $\vec{r}_0 = \vec{0}$



$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \rightarrow \text{Aceleração} \\ y = v_{0y} \cdot t - \frac{g t^2}{2} \rightarrow \text{em y temos gravidade.} \end{cases}$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \rightarrow \text{Para achar o } t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$

→ como achar $y(x) = ?$

→ só substituir o t com o x no

y

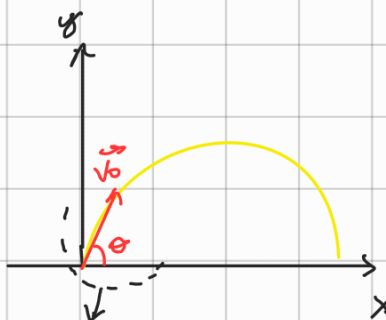
$$y = \frac{v_0 \sin \theta \cdot x}{v_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Portanto, a equação da trajetória é:

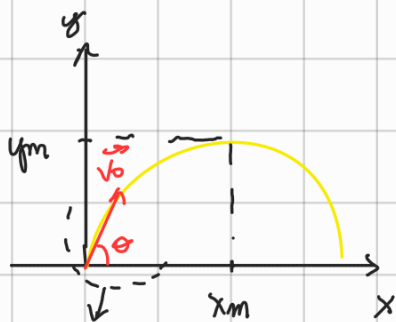
$$y(x) = \tan \theta \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Por isso fica que é uma parábola

Altura máxima:



Altura máxima:



$$V_y(t_m) = 0 \rightarrow V_y(t) = V_0 \sin \theta - g t_m = 0$$

$$t_m = \frac{V_0 \sin \theta}{g}$$

$$y(t_m) = V_0 \sin \theta \cdot \frac{V_0 \sin \theta}{g} - \frac{g}{2} \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} =$$

$$\boxed{\frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = y(t_m)}$$

Alcance $y(t^*) = 0 = V_{0y} \cdot \sin \theta \cdot t_A - \frac{g}{2} t_A^2$

$$t_A = 0 \text{ ou } t_A = \frac{2V_0 \sin \theta}{g} = 2t_m$$

$$A = x(t_A) = V_0 \cos \theta \cdot t_A = V_0 \cos \theta \cdot \frac{2V_0 \sin \theta}{g} = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

$$\boxed{A = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta)}$$

→ O Alcance máximo é:

$$\boxed{A_m = \frac{V_0^2}{g} \Rightarrow \theta = 45^\circ}$$

Canhão que dispara sempre com a mesma velocidade. Quer acertar um ponto (x, y) . Qual deve ser o ângulo?

$$y = \tan \theta x - \frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta x - \frac{g x^2}{2V_0^2} \sec^2 \theta =$$

$$= \tan \theta x - \frac{g x^2}{2V_0^2} (1 + \tan^2 \theta)$$

$$\tan \theta = z: \frac{g x^2}{2V_0^2} z^2 - xz + \left(\frac{g x^2}{2V_0^2} + y \right) = 0$$

vamos descobrir o ângulo!

$$z^2 - \frac{2V_0^2 x z}{g x^2} + \left(1 + \frac{2V_0^2 y}{g x^2} \right) =$$

$$= z^2 - \frac{2A_m}{x} \cdot z + \left(1 + \frac{2A_m y}{x^2} \right) = 0$$

Faz Bhaskara!

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4A_m^2}{x^2} - 4 \left(1 + \frac{2A_m y}{x^2} \right)$$

Se $\Delta > 0$: duas respostas

$\Delta = 0$: uma resposta

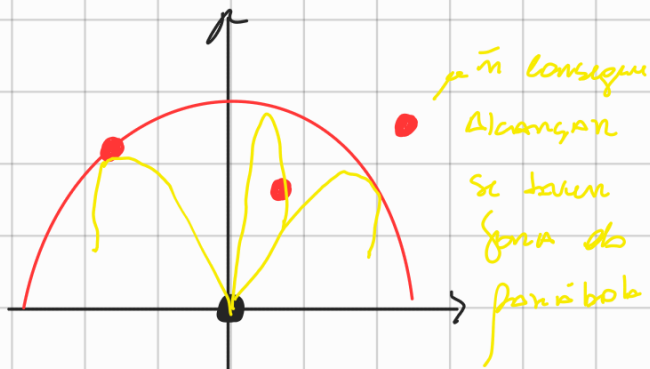
$\Delta < 0$: nenhuma resposta

Para bola de segurança: digamos que a região do espaço pode ser atingida pelo canhão.

$$\Delta = 0: \frac{A_m^2}{x^2} - 1 - \frac{2A_m y}{x^2} = 0$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2A_m} \left(\frac{A_m^2}{x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_m - x^2}{A_m} \right)}$$

PA Parábola de Sequência fto gráfica



já não consegue
Alcançar
se tiver
fora do
parábola

→ um ponto dentro da parábola pode
ser atingido por 2 ângulos. Já na
linha da parábola, somente 1 ângulo.

Movimento Circular

→ ESTUDO ESCALAR

Círculo com raio R

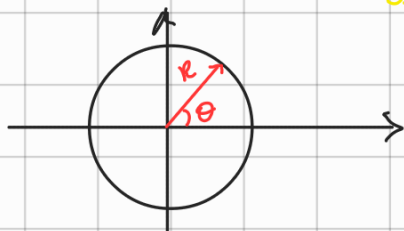


Tabela p/ saber as fórmulas

Linear	Circular
Posição	Ângulo θ
Velocidade	Velocidade Angular: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$
Aceleração	Aceleração Angular: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

→ Usando isso podemos resolver igual
ao movimento LD.

Ex: MCU: $\alpha = 0$; $\omega = \text{cte} \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$

MCUV: $\alpha = \text{cte}$; $\omega = \omega_0 + \alpha t$;

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

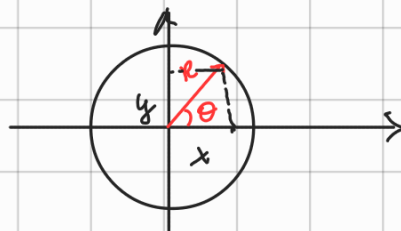
→ movimento periódico:

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

frequência: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Sinal de ω : $\begin{cases} + \text{ Sentido anti-horário} \\ - \text{ Sentido horário} \end{cases}$

→ ESTUDO VETORIAL



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + R\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\vec{v} = -R\omega\sin\theta\hat{i} + R\omega\cos\theta\hat{j} \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

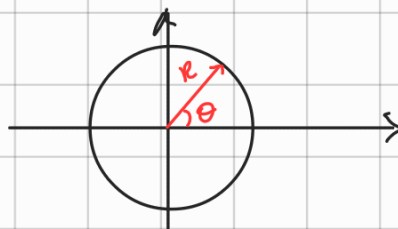
$\vec{v}$ e $\vec{r}$ perpendiculares.

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\frac{d(\omega\sin\theta)}{dt}\hat{i} + R\frac{d(\omega\cos\theta)}{dt}\hat{j}$$

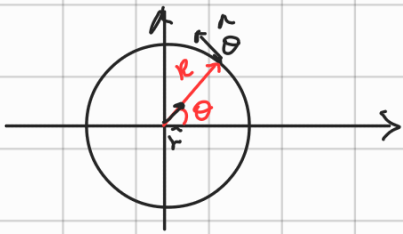
↳ tem um jeito um pouco + simples.

Coordenadas Polares (cálculo III)?

Coordenadas Polares!



Coordenadas Polares!



$\hat{r}$: Versor módulo 1, direção radial, sentido p/ fora

$\hat{\theta}$: Versor módulo 1, direção tangencial, sentido anti-horário

$$\vec{r} = R \hat{r}$$

OBS: Versores dependem de θ (dependem do tempo).

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{módulo} \\ \text{de} \\ \text{ambos} \end{array} \right\} \hat{s}$$

$$|\hat{\theta}| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{módulo} \\ \text{de} \\ \text{ambos} \end{array} \right\} \hat{s}$$

→ Pl derivam os versores:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt} \hat{i} + \frac{d\sin\theta}{dt} \hat{j} =$$

$$-\sin\theta \cdot \omega \hat{i} + \cos\theta \omega \hat{j} = \omega \hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\omega \hat{r}$$

Portanto: Calcular o $\vec{a}$:

$$\vec{r} = R \cdot \hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \frac{d\hat{r}}{dt} = R\omega \hat{\theta} \quad v = \omega R$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega \hat{\theta} - R\omega^2 \hat{r}$$

→ duas componentes da aceleração

I) $R\omega^2 \hat{r}$: Aceleração tangencial

→ só existe se a velocidade muda de módulo.

II) $-R\omega^2 \hat{r}$: Aceleração centrípeta

→ direção radial, aponta p/ o centro.

$$a_{cp} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Juntando

$$\vec{a} = a_t \hat{\theta} - a_{cp} \hat{r}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$$

→ amigos tem mt coisa a dizer!

mas vai o resumo do que importa!

RESUMO

Movimento Uniformemente Variado!

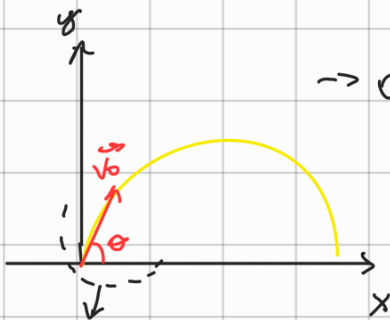
1º no caso do projetil, voce atira p/ cima e forma a parabola:

→ Temos a aceleração sómente da gravidade!

→ condições iniciais $V_0 = 0$, porque imagine voce jogando uma pedra p/ o alto. Velocidade inicial = 0.

→ $V_0 = 0$, Partindo do inicio.

Temos:



→ O GRÁFICO!

A eq. da trajetória:

$$y(x) = \tan \theta \cdot x - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \theta}$$

Altura máxima

$$\frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = y_{\text{tm}}$$

Alcance:

$$A = \frac{V_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

O alcance máximo é:

$$A_m = \frac{V_0^2}{g} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

2º caso quando que lança objeto com a mesma velocidade

→ Vamos ter a eq. da trajetória:

Parábola de Segurança

$$y = \frac{x^2}{2A_m} \left(\frac{A_m^2}{x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_m - x^2}{A_m} \right)$$

→ movimento circular

• ESTUDO ESCALAR

Posição - Ângulo θ

vel. - Velocidade Angular: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

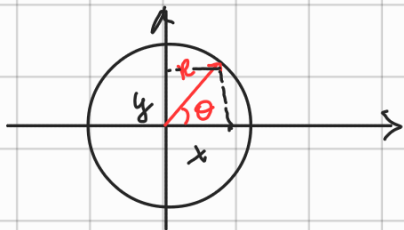
acc. - Aceleração Angular: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

MCU: $\alpha = 0$; $\omega = \omega_0$ → $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$

MCUV: $\alpha = \alpha_0$; $\omega = \omega_0 + \alpha_0 t$;

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha_0 t^2}{2}$$

• ESTUDO VETORIAL:



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{v} = -r\omega\sin\theta\hat{i} + r\omega\cos\theta\hat{j}$$

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega\dot{\theta}\hat{\theta} - r\omega^2\hat{r}$$

aceleração tangencial

$$a_T = r\omega\dot{\theta}$$

$$a_{cp} = -r\omega^2\hat{r}$$

aceleração centrípeta

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$|\hat{\theta}| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

módulo de ambos $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ é 1.

Sumando

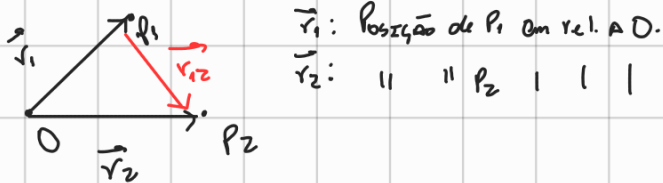
$$\vec{a} = a_T\hat{\theta} - a_{cp}\hat{r}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2}$$

corim
guizi

Aula 06

→ **movimento relativo**: você olha o movimento com outro referencial.



Posição de P_2 em relação a P_1 :

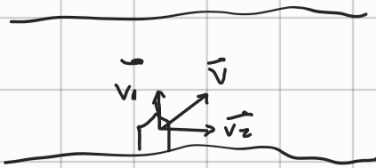
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Velocidade relativa:

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Velocidade que P_2 tem em relação a P_1 .

Ex:



O barco anda com vel. v_2 , o rio move com a vel. v_1 . E ele move com a vel. $\vec{v}$.

→ **DINÂMICA**: leis de Newton!

Força: Empurrão, puxão ou outra forma de interação com o movimento um objeto

Força tem intensidade, direção e sentido, então

ela é um vetor:

1ª Lei de Newton - Lei da inércia

"Tudo corpo livre de forças tende a permanecer em repouso ou movimento retilíneo uniforme"

2ª Lei de Newton - Força

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

↳ na Verdade newton de frente de outro jeito.

MENTIEM O ENSINO MÉDIO inteiro!

$$\vec{p} = m\vec{v} ; \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

↳ momento linear.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

3ª Lei de Newton - Lei da ação e reação!

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

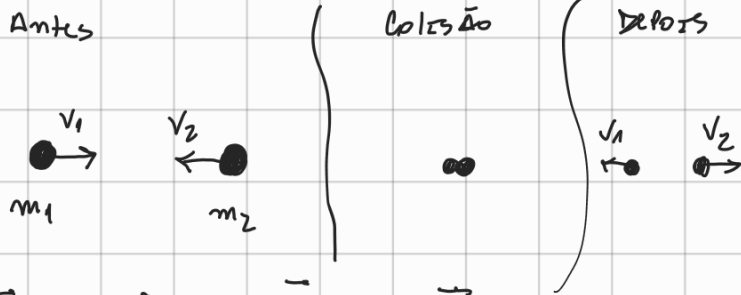
Se 1 bate na 2, haverá a força que 1 faz na 2 $F_{1,2}$; e força que 2 faz na 1 $F_{2,1}$. Elas terão mesmo módulo e sentidos opostos

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

corine
guzzi

Aula 07

→ Colisões



$$\vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 ; \vec{p}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \text{ momento total}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Antes: $\vec{n}$ não tem força agindo

$$F_1 = F_2 = 0 \quad \frac{dp}{dt} = 0$$

Depois: nada de força também

$$F_1 = F_2 = 0$$

durante

$$F_1 = \vec{F}_{1,2} \quad F_2 = F_{2,1} = -F_{1,2} = -F_1$$

derivada de $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ todo tempo
do momento total

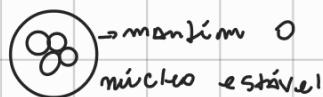
→ Por isso vamos usar o momento

conservamos o momento linear!

por conta da ausência de forças externas.

Forças básicas
da Natureza!

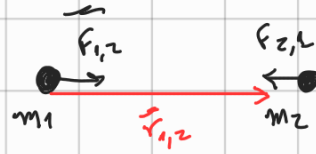
1) Interação forte: Age no núcleo do átomo.



2) Interação fraca: Age no núcleo do átomo

decaimento radioativo.

3) Força gravitacional: força entre q_1 ob-
jeto que tem massa e sempre é
atrativa



$$\vec{F}_{2,1} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} = -\vec{F}_{1,2}$$

$$G = \text{constante universal gravitacional} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

4) Força eletromagnética



$$\vec{F}_{2,1} = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2}$$

$q_1 \cdot q_2 > 0 \rightarrow$ repulsão

$q_1 \cdot q_2 < 0 \rightarrow$ atração

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$$

Forças derivada

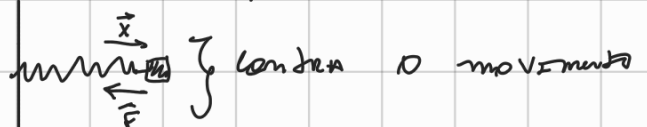
1) Forças intermoleculares: $\vec{n}$ vamos usar!

2) Força elástica

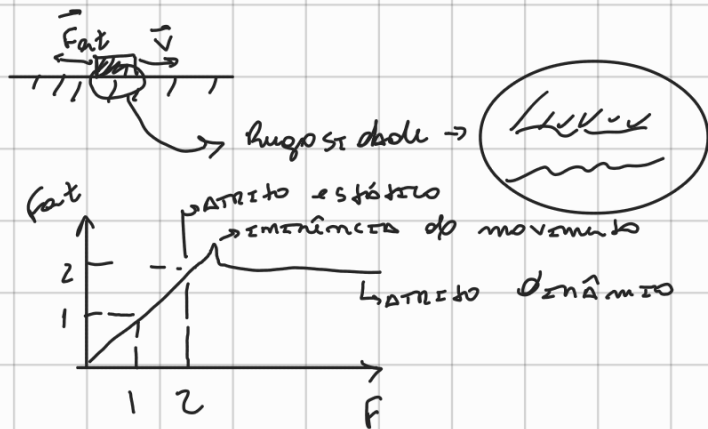
$$\vec{F} = -K\vec{x}$$

x = distensão da mola $\vec{n}$

parte da posição de equi-
líbrio.



3) FORÇA DE ATRITO



ATRITO DINÂMICO = $F_{at} = \mu_d N$

ATRITO ESTÁTICO = $F_{at\ máximo} = \mu_e \cdot N$

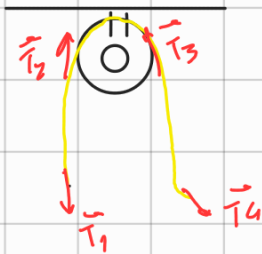
4) RESISTÊNCIA DA FLUIZ DOS (N USAREMOS)

$|\vec{R}| = aV + bV^2$; BAIXA VISCOSIDADE
 bV^2 é grande -

alta viscosidade
 aV é grande.



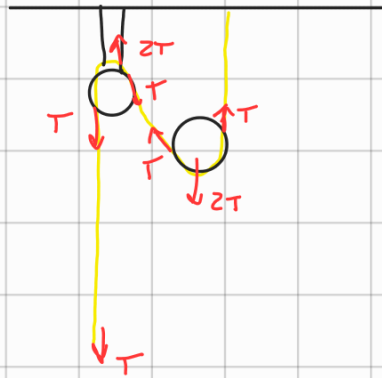
Polia



$T_4 - T_3 = m \cdot a$; massa da corda desprezível

$T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$; polia ideal

$T_2 = T_3$



forime
 guzzi

Aula 08

↳ TRABALHO

1. b. Força constante $\rightarrow Q = ct$ - MUV

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} \rightarrow v = v_0 + a t$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \Delta x = t \left(v_0 + \frac{a}{2} t \right) =$$

$$\left(\frac{v - v_0}{a} \right) \left[v_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \right] = \left(\frac{v - v_0}{a} \right) \left(\frac{v + v_0}{2} \right)$$

$$2 Q \Delta x = v^2 - v_0^2$$

$\rightarrow$ Teorema de
depende do
tempo!

$$\hookrightarrow \frac{m}{2}$$

$$m \cdot a \Delta x = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

$$F \Delta x = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

$\rightarrow$ Energia Cinética:

$$T = \frac{m v^2}{2} \quad [kg \cdot m^2 / s^2] = [N \cdot m]$$

$$= [J]$$

$\rightarrow$ Trabalho:

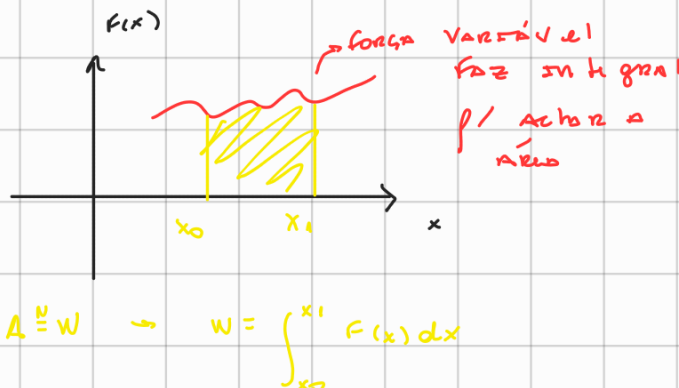
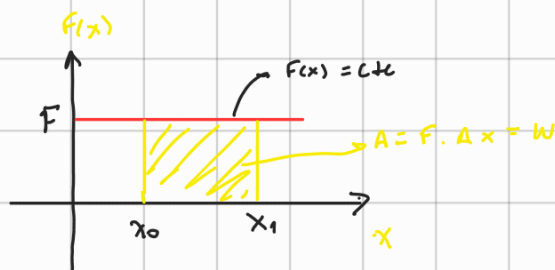
$$W = F \cdot \Delta x \quad [kg \cdot m^2 / s^2] = [N \cdot m]$$

$$= [J]$$

$\rightarrow$ Teorema da Energia Cinética:

$$W = \Delta T \quad [N \cdot m] = [J]$$

1. d - Força Varíavel

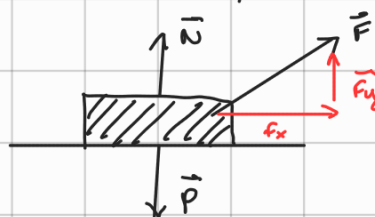


Ex: Força Elástica $F(x) = -kx$

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = -k \int_{x_0}^{x_1} x dx = -\frac{k x^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} =$$

$$= -\frac{k x_1^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2} = \Delta T$$

2. b ou 3. b - Força constante



$$y: N + F_y - P = 0$$

$$x: F_x = m \cdot a$$

$$a = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cos \theta}{m}$$

Teorema:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x = \frac{2 F \cos \theta \Delta x}{m} \rightarrow \Delta T = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = F \cos \theta \Delta x$$

En. Cinética Trabalho

Obs: Produto Escalar $\rightarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Atenção ao
ângulo!

Propriedades

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

Propriedades:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \text{ou } a=0 \text{ ou } b=0$$

a e b são ortogonais

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \parallel \vec{b} = b \parallel \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

→ com um sistema de coordenadas

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

~~~~~ || ~~~~~

$$\Delta T = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F \cos \theta \Delta x$$

Se definirmos:

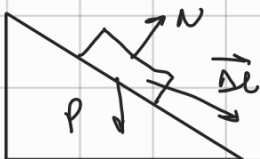
$$\vec{\Delta \ell} = \Delta x \hat{i}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta \ell} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = F_x \Delta x = F \cos \theta \Delta x$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta \ell}$$

$\vec{\Delta \ell}$  = vetor deslocamento

Ex:



$$W_N = \vec{N} \cdot \vec{\Delta \ell} = N \Delta \ell \cos 90^\circ = 0$$

$$W_P = \vec{P} \cdot \vec{\Delta \ell} = P_x \Delta x + P_y \Delta y =$$

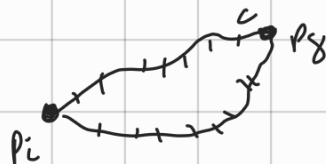
$$mg(y_0 - y_1) = W_P$$

$$mg \Delta \ell \cos \theta = W_P$$

⇒ - Força variável

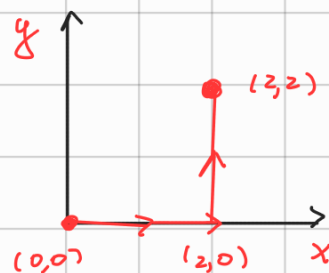
$$W = \int_{P_i; C}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

→ integral de linha, depende do caminho.



Exemplo:

$$\vec{F} = x \hat{i} + x \hat{j}$$



→ integrar ao longo do caminho

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(2,0)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

de  $(0,0) \rightarrow (2,0)$

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} \quad ; \quad \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x dx + F_y dy = F_x dx = x dx$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^2 x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2 \text{ J}$$

de  $(2,0) \rightarrow (2,2)$  → deslocamento só na vertical

$$\vec{dl} = dy \rightarrow F_x dx + F_y dy = x dy$$

$$\int_{(2,0)}^{(2,2)} x dy = \int_0^2 x dy = 2 \int_0^2 dy =$$

$$2y \Big|_0^2 = 4 - 0 = 4 \text{ J}$$

porque  
fuzzi

→ tentando explicar isso!

como o caminho é composto de retas p/ fazer

$\vec{F} \cdot \vec{dl}$ ; no  $\vec{dl}$  você observa qual eixo tá variando (x ou y). Por exemplo



então  $\vec{dl}$  se torna ou  $dx$  ou  $dy$

e a força você pega a componente que é a mesma de  $\vec{dl}$ . Se for:

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$dl = dx \rightarrow \text{temos}$$

$$F_x dx + F_y dy \rightarrow \text{só varia no } x$$

$$x\hat{i} dx \rightarrow F_x dx = \underline{x dx}$$

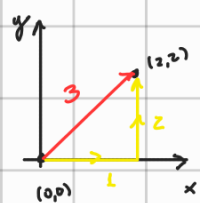
# Aula 09

## Recapitulando Trabalho

Temos 2 tipos de forças: Força constante;  
Força variável ao longo do caminho e temos  
os casos 1b / 2b / 3b.

|                 | 1b                             | 2b/3b                                               |
|-----------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Força constante | $W = F \Delta x$               | $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l}$            |
| Força variável  | $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$ | $\vec{W} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot \vec{dl}$ |

## Continuação de Trabalho:



→ mostrando que o caminho influencia no trabalho.

A gente tinha calculado o Trabalho ao longo  
do caminho (1,2) da aula passada. Agora vamos  
calcular o caminho 3 p/ chegar nos mes-  
mos pontos (2,2), iniciando no ponto (0,0).  
→ lembrando que a força é:

$$\vec{F} = x\hat{i} + x\hat{j}$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
 $F_x$     $F_y$

e o caminho é:

$$\vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

A fórmula p/ 2b/3b com força variável  
é:

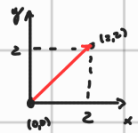
$$W = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x dx + F_y dy = x dx + x dy$$

Produto escalar

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^2 x dx + \int_0^2 x dy$$

x varia de 0 até 2      y varia de 0 até 2



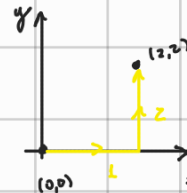
$$= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \int_0^2 x dy$$

→ nessa diagonal  $y=x$ .  
Por  $x$   $\vec{n}$  é constante e ele  
varia. Então fazemos  
 $x=y$

$$= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \int_0^2 y dy$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^2 = 2 + 2 = \boxed{W = 4 \text{ J}}$$

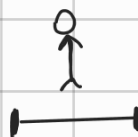
→ no exemplo da aula anterior:



O caminho (1,2) deu  $W = 6 \text{ J}$ , portanto p/ essa  
siga o Trabalho depende do caminho e  $\vec{n}$   
só dos pontos iniciais e finais.

Trabalho: é uma aplicação de uma força

por uma distância.

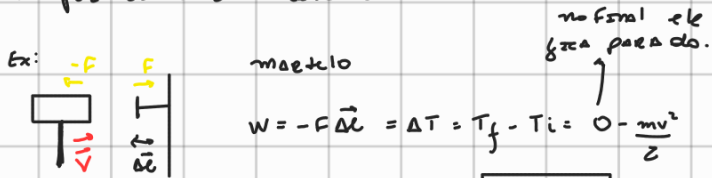


Levantar peso → Trabalho tem um  
 $\Delta x$   
permanecer o peso no alto →  $\vec{n}$   
faz trabalho.

Energia: capacidade de realizar trabalho

**Energia Cinética:** energia que o objeto

tem por estar em movimento.



$$W = -F\Delta x = \Delta T = T_f - T_i = 0 - \frac{mv^2}{2}$$

$$F = \frac{mv^2}{2\Delta x}$$

$$T = \frac{mv^2}{2}$$



**Energia Potencial:** devido à força peso do objeto.

$$U_g = mgz$$

$$E = T + U = \text{Energia mecânica}$$

$$E_i = E_f \rightarrow T_i + U_i = T_f + U_f$$

$$W_{\text{peso}} = \Delta T = T_f - T_i = U_i - U_f = -\Delta U$$

**Quando existe U?** W não depende do caminho,

apenas dos pontos iniciais e finais.

→ Se existe U: Força conservativa.

$$\text{Ib: } W = \int_{x_i}^{x_f} F dx, \text{ se existe essa premissa}$$

$$G(x) = \int F(x) dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = G(x_f) - G(x_i) = \Delta G = -\Delta U$$

$$\text{Definir } U(x) = -G(x) + K$$

$$U(x) = -\int F(x) dx + K \rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Só existe premissa de F se F depende apenas da posição.

Atrito estático: não tem trabalho.

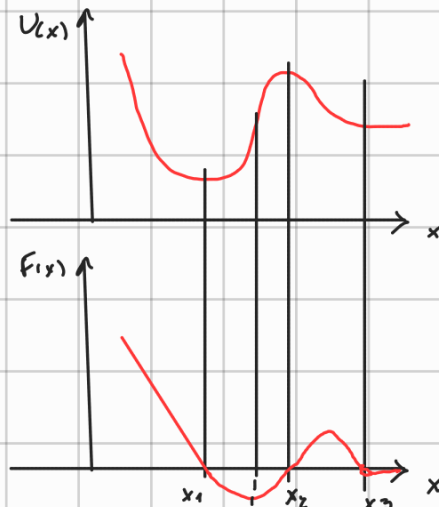
Atrito dinâmico: não é conservativo.

**Propriedades de U:**

Se existe U, trabalho W depende do caminho.

W depende dos pontos finais e iniciais.

Se  $x_i = x_f \rightarrow W = U(x_i) - U(x_f) = 0$ , mesmo que o objeto tenha se movido.



$x_1, x_2$  e  $x_3$  são pontos de equilíbrio

$x_1$ : estável

$x_2$ : instável

$x_3$ : indiferente

## + Dimensões

1) P/ existe  $U$ ,  $W$  ã depende do caminho

2) Vou escolher um ponto  $P_0$  qualquer.

$$U(P) = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{e} \rightarrow U(P_0) = 0$$

C/ essa definição:  $W$  entre  $P_1$  e  $P_2$ .

$$W = -\Delta U = -U(P_2) + U(P_1) = \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{e} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

$$= \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{e} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{e} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{e}$$



Cálculo do resgate!

Derivada parcial:  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$

$F(x, y)$ : derivada parcial  $F$  em relação a uma

variável quando eu deixo uma variável mantem-

do a outra constante

ex:  $F(x, y) = x^2 y^3$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 \cdot 2x$$

mantém o outro componente constante.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cdot 3y^2$$

mantém o outro componente constante.

Gradiente de  $F(x, y)$

→ Símbolo:  $\text{grad } F(x, y) = \vec{\nabla} F(x, y)$

$$\vec{\nabla} F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

Se for 3b.

1b:  $F = -\frac{dU}{dx}$

2b, 3b:  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x, y)$

Força e Energia Potencial

## + Potência

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

unidade = WATT =  $\frac{\text{Joule}}{\text{segundo}}$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{P} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Forças ã conservativas junto C/ forças

conservativas

$$W = \Delta T$$

$$W_C + W_{N.C} = \Delta T$$

$$W_C = -\Delta U$$

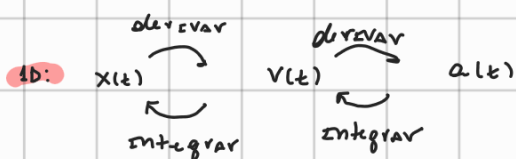
$$-\Delta U + W_{N.C} = \Delta T$$

$$W_{N.C} = \Delta T + \Delta U = \Delta E$$

horim  
fuzzi

## Teaching

RESUMÃO!



Integral definida:  $\Delta V$

Integral Indefinida:  $V(t)$ , depende de  $K$ .

2b, 3b

$$\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + (z\hat{k}) \rightarrow \text{vector posição}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \left(\frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}\right)$$

movimento circular



$$\vec{r} = R \vec{r}$$

$$\vec{v} = v \hat{\theta}$$

$$\vec{Q} = Q_T \hat{\theta} - \partial_{c\rho} \hat{r}$$

$$a_T = \frac{d|v|}{dt} \quad ; \quad a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$v = \omega \cdot R$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\alpha = \frac{dw}{dt} \quad ; \quad a_T = \alpha R$$

11

### 3 LBS of Newton

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  - Se a massa for constante

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \text{Formal signal } p = m\vec{v}$$

## Teaching

|                 | 1D                             | 2D / 3D                                                   |
|-----------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Força constante | $W = F \Delta x$               | $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$                        |
| Força Variável  | $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$ | $W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ |

Se o Trabalho  $\bar{n}$  depende do Caminho  $\rightarrow$  Term

uma Energia Potencial por íon.

1b:  $F = - \frac{dU}{dx}$

Sempre:  $W = -\Delta U$

20/30:  $\vec{F} = -\nabla U$

1b: Se  $F$  depende só da posição: então

|      |                       |
|------|-----------------------|
| Vale | $F = - \frac{dV}{dx}$ |
|------|-----------------------|

Ex: mola  $F(x) = -kx$

$$U(x) = - \int f(x) dx = k \int x dx = \frac{1}{2} k x^2 + C$$

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow \text{En. potencial elástica atenuada de força.}$$

¿Dónde? ¿Cómo? ¿Sabemos que existe o potencial?

1) Calcular o trabalho em vários caminhos diferentes para verificar.

lori me  
guzzi

# Aula 11

→ META do curso.

momento Linear

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

1º CASO: 2 partículas, apenas forças internas

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1,2}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2,1}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = 0$$

↳ ISSO FAZ

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 ; \vec{P} = \text{constante}$$

→ Então temos conservação do momento.

OBS: Se uma componente tiver forças externas, nas outras componentes continua valendo conservação de momento.

2º CASO: 2 partículas, F<sub>internas</sub> e F<sub>externas</sub>

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,ext}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,ext}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,ext}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} ; \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,ext}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

CASO PARTICULARES DO 2º CASO:

CASO 2A: partículas iguais  $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = m \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

$$\vec{p}_2 = m\vec{v}_2 = m \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

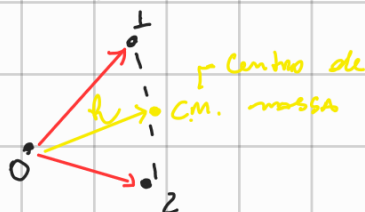
$$\vec{P} = m \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) = m \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

→ Se a massa total  $M = 2m$ , e definirmos um vetor posição média

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} ; \vec{P} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

EXEMPLIFICAÇÃO:



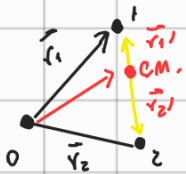
Se eu quiser estudar o sistema como 1 só. Eu quero que a massa está toda em  $\vec{R}$ . e uso as forças mulars acima

Caso 2B: partículas discretas

Definimos  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$

$M = m_1 + m_2$ , então temos:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$$



$\vec{r}_1', \vec{r}_2'$ : vetores relativos ao

Centro de massa.

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{-m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

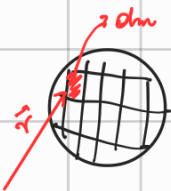
Caso 3: Teve + partículas: N partículas.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{N,i} + \vec{F}_{N,ext}$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = \vec{F}_{ext}$$

$$M = \sum_i m_i \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Caso 4: Sistema extenso

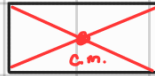


$$M = \int_V dm \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

↳ Só p/ saber, mas n usaremos isso!

→ p/ calcular esses casos, vamos precisar do C.M.



C.M. de um retângulo



→ se a densidade é uniforme.

O Centro geométrico é o

C.M.

Obs: Centro de massa vs Centro de gravidade

C.M.: Considerar o sistema como um

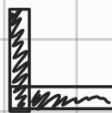
ponto

C.G.: Onde em um objeto a força de gravidade vai ser aplicada.

Com gravidade uniforme e na superfície da terra

$$C.M. = C.G.$$

continuando:

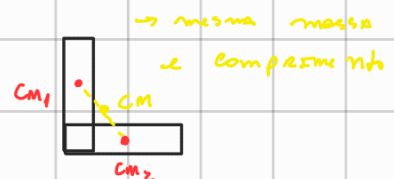


→ Qual o Centro de massa disso?

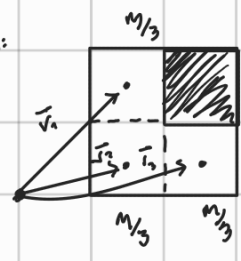
Posso separar meu sistema em pedaços de massa  $m_i$  e posição de CM  $\vec{r}_i$  e calcular CM total!

sendo:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$



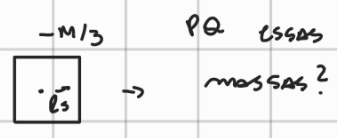
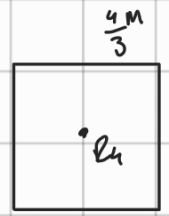
Ex:



$$\vec{r} = \frac{1}{M} \left( \frac{m}{3} \vec{r}_1 + \frac{m}{3} \vec{r}_2 + \frac{m}{3} \vec{r}_3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

ou



$$M = \frac{4}{3} m + \frac{m}{3} = \frac{5}{3} m$$

M = M

$$\vec{r} = \frac{1}{M} \left( \frac{4m}{3} \vec{r}_4 - \frac{m}{3} \vec{r}_3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} (4\vec{r}_4 - \vec{r}_3)$$

Impulso

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt \quad \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p}$$

lorine  
guzzi

# Aula 12

## Colisões



A interação é sempre uma força interna

→ conservação do momento total!

Tipos de Colisões

- 1D, 2D
- elásticas, inelásticas

• Se  $T_f = T_i$  (Energia Cinética) é elástica.

• Se  $T_f \neq T_i$  inelástica.

→ Temos o fator  $Q \rightarrow Q = T_f - T_i$

• Se  $Q = 0 \rightarrow$  elástico.

$Q < 0 \rightarrow$  inelástico; endoérgico.

$Q > 0 \rightarrow$  inelástico; exoérgico.

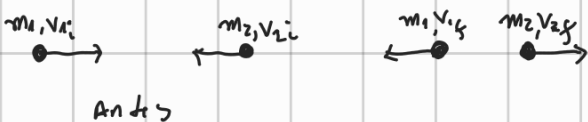
→ endoérgico: perdeu energia.

→ exoérgico: ganhou energia. (Pensar em bomba).

• Totalmente inelástica;  $T_f$  é a menor possível.

## Exemplos

1) Caso 1D, elástico.



Variáveis do problema:  $m_1, m_2, v_{1i}, v_{2i}, v_{1f}, v_{2f}$ .

Non malmenke

- dados do problema:  $m_1, m_2, v_{1i}, v_{2i}$
- Incógnitas:  $v_{1f}, v_{2f}$

Temos:

⌈ I

1) Conservação do momento:  $P_i = P_f \rightarrow P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f}$

2) Elástico  $T_i = T_f \rightarrow \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} (mv)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$\downarrow$   
 $\frac{m}{1} \times \frac{1}{m} \times mv \rightarrow p^2 \rightarrow$

Substituindo na eq. 2

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \rightarrow \text{II}$$

→ então: reorganizando I e II

$$1) p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f}$$

$$2) p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \lambda (p_{1i}^2 - p_{1f}^2)$$

$$\lambda = m_2/m_1$$

→ Basicamente Lembre-se de conservar o momento e no caso elástico

$T_i = T_f \rightarrow$  Energia cinética se conserva também.

→ no geral temos um sistema

divide 2 por 1:

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda (p_{2i} + p_{1f}) \rightarrow \text{III}$$

I e III formam um sistema de equações: O resultado é:

$$p_{1f} = \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) p_{1i} + \frac{2}{1+\lambda} p_{2i} \quad \text{IV}$$

$$p_{2f} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} p_{1i} + \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) p_{2i} \quad \text{V}$$

→ Resposta feita da

$$V_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{2i} \quad \textcircled{\text{VI}}$$

$$V_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) V_{1i} - \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) V_{2i} \quad \textcircled{\text{VII}}$$

→ essas fórmulas (IV, V, VI, VII): são caso os problemas derem aquelas condições e variáveis de entrada no começo, por isso vale lembrar, sobre:

$$P_i = P_f \text{ e } T_i = T_f$$

### Casos particulares

a) mesma massa:  $m_1 = m_2 = m$

$$\lambda = 1 \rightarrow \lambda = m_2/m_1$$

$$\begin{cases} P_{1f} = P_{2i} \\ P_{2f} = P_{1i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{1f} = V_{2i} \\ V_{2f} = V_{1i} \end{cases} \rightarrow \text{Trocam de velocidades.}$$

b) Alvo em repouso:  $V_{2i} = 0 \rightarrow P_{2i} = 0$

$$\text{I) } m_1 \ll m_2 \quad \begin{aligned} V_{1f} &\approx V_{1i} \\ V_{2f} &\approx \frac{2m_1}{m_2} V_{1i} \ll V_{1i} \end{aligned}$$

$$\text{II) } m_1 \gg m_2 \quad \begin{aligned} V_{1f} &\approx V_{1i} \\ V_{2f} &\approx 2V_{1i} \end{aligned}$$

### 2) Caso 1b, Totalmente elástico

- 2 condições ( $V_{2f}, V_{1f}$ ), 1 equação (cons. do momento)

- Você precisa de + alguma informação, então

pode dar  $V_{1f}$  ou  $V_{2f}$  ou  $V_{2f} - V_{1f} \dots$

leime  
guzzi

### 2a) Caso 1b, Totalmente elástico

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{cte} \rightarrow V_{\text{cm}} \text{ não muda}$$

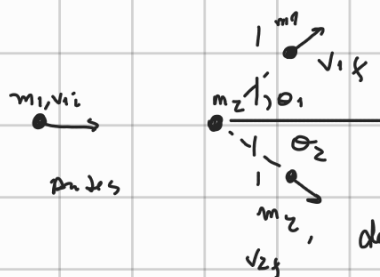
menor energia cinética possível que faz  $V_{\text{cm}}$  existir. Então o sistema inteiro tem a mesma velocidade.

$$V_{1f} = V_{2f} = V_{\text{cm}}$$

$$V_{\text{cm}} = \frac{P_i}{M} = \frac{m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

### Caso 3: 2b, elástico (de fácil)

$m_2$  em repouso e  $V_{1i}$  é horizontal



dados:

$$m_1, m_2, V_{1i}$$

$$V_{2i} = 0$$

incógnitas:

$$V_{1f}, V_{2f}, \theta_1, \theta_2$$

Vou ter conservação do momento nas duas

componentes:

$$x: P_{1f} \cos \theta_1 + P_{2f} \cos \theta_2$$

$$y: P_{1f} \sin \theta_1 - P_{2f} \sin \theta_2 = 0$$

elástico:

$$T_i = T_f \rightarrow \frac{P_{1i}^2}{m_1} = \frac{P_{1f}^2}{m_1} + \frac{P_{2f}^2}{m_2}$$

Caso particular:  $m_1 = m_2 = m$

$$P_{1i}^2 = P_{1f}^2 + P_{2f}^2$$

$$\vec{P}_{1i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad \text{fazemos produto escalar}$$

e resulta:

$$P_{1f} \cdot P_{2f} = 0 \quad P_{1f} \cdot P_{2f} \text{ é perpendicular-} \\ \text{enares.}$$

# Aula 13

→ Vem aí outra conservação pq ão temos uma invariância por rotação.

## ↳ Rotação

• movimento circular de raio  $R$ .

• posição:  $\vec{r}$

• velocidade:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

• Aceleração:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

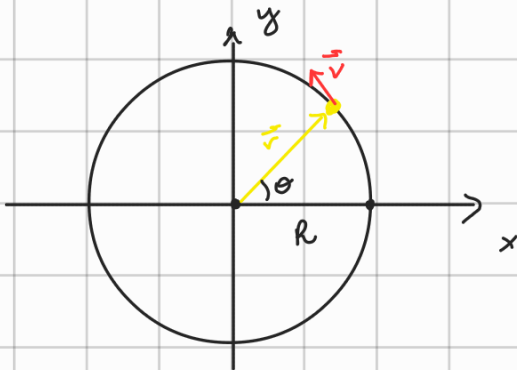
• Força:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\theta$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$z$



Trabalho aprendemos que a Força desloca o movimento

$$W = F \cdot \Delta \vec{r}; \text{ mas queremos relacionar}$$

o. Aí que surge o Torque.

## Torque

↳ ele é o equivalente as forças

pl rotações.



$$\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \phi$$

Obs:

1) Se  $\vec{F}$  é paralelo  $\vec{r} \rightarrow \phi = 0$  então  $\tau = 0$

2)  $\tau > 0 \rightarrow$  Anti-horário

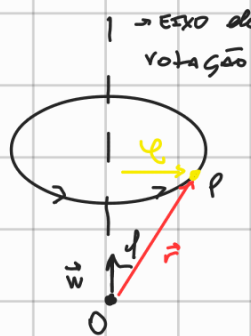
$\tau < 0 \rightarrow$  horário

## Em 3D

eixo de rotação: eixo ao redor do qual o

objeto está girando.

Plano → Gerando



$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \ell = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin \phi$$

Algebra!

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$$

$\phi$  é o ângulo entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

propriedades:

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$2) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$3) \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)$$

$$4) \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

$$5) \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

→ Lembrar que:  $a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = 0$

$$a_y \hat{j} \times b_y \hat{j} = 0$$

$$a_z \hat{k} \times b_z \hat{k} = 0$$

$$(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) =$$

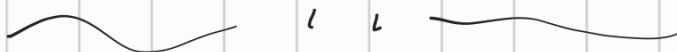
$$= 0$$

$$= a_x b_y \hat{k}$$

$$= -a_x b_z \hat{j}$$

→ fazendo essa distribuição em todas as componentes.

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$



Usando produtos vetoriais

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

→ momento angular:  $\vec{L}$

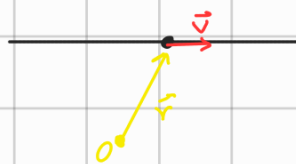
$$\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\rightarrow \text{se } \vec{L} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \sim \vec{L} = \text{cte}$$

→ conservação do momento angular.

casos

1) m.e.v



$$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = \text{cte}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{v}| m \sin \theta = m |\vec{r}| |\vec{v}| \sin \theta = m r_{\perp} |\vec{v}|$$

$$= \text{cte}$$

2) força central

$$\frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{cte}$$

Corine

guzir

# Aula 14

$\vec{\omega}$ : vetor velocidade angular

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Importante!

Torque ( $\tau$ ) e momento angular ( $\vec{L}$ ) depende da origem do sistema de coordenadas.

→ Sistemas de partículas!

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \rightarrow \text{momento angular total do meu sistema}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i) =$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

Pela 3ª L.N., as forças internas são pares de ação e reação.

→ Imagine o par de ação e reação  $\vec{F}_i^{\text{int}}$  e  $\vec{F}_j^{\text{int}} \rightarrow \vec{F}_i^{\text{int}} = -\vec{F}_j^{\text{int}}$ .

↳ ele faz uma luta longa p/ falar que:  $\vec{F}_i^{\text{int}} = 0$ , portanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \tau_i^{\text{ext}} = \tau_i^{\text{ext}}$$

Obs: em geral:  $\vec{L}^{\text{ext}} = \sum_i \tau_i^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$

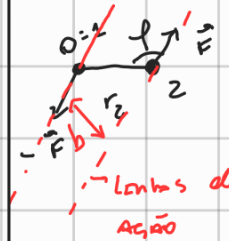
$\vec{N}$  pode fazer força externa resultante

↳ e posição do centro de massa  $\vec{r}_{\text{cm}} \rightarrow \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{F}^{\text{ext}} \rightarrow \text{NÃO PODE!}$

→ Num sistema:  $\vec{L}^{\text{ext}} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{cte}$ , mas cada  $\vec{L}_i$  pode mudar.

Se  $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$ , torque  $\vec{\tau}$  depende do referencial.

Ex: Binário de forças



$$\vec{F} = -\vec{F}$$

$$\vec{F}^{\text{ext}} = -\vec{F} + \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \text{torque } \vec{\tau}$$

depende da origem.

relativo a O:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}_2 \times \vec{F}| = |\vec{r}_2| |\vec{F}| \sin \varphi = |\vec{F}| b$$

→ Isso serve p/ gente entender sobre o momento. Muitas vezes queremos o equilíbrio do corpo, por isso resultante das  $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$ , então conseguimos fazer o momento (uma tendência de giro) a partir de qualquer referencial adotado.

lozime guzzi

## Aula 15

↳ Aplicações das rotações

Estratégias passo a passo:

1) Translação do CM

2) Rotação no Ref. do CM.

Qual a importância do Ref. do CM.

1) Momento Angular

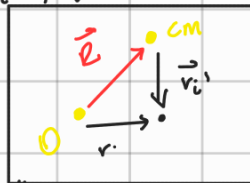
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

para mudar de referencial p/ o centro de massa (CM)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$$

referencial original do CM

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$



$\vec{R}$  e  $\vec{V}$  são posições e velocidade do C.M. no referencial original.

↳ reescrevendo:

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times (\vec{v}_i' + \vec{V})$$

com tudo, temos:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P}$$

$\vec{L}$ : momento angular fora do CM

$\vec{L}'$ : momento angular visto do CM: momento angular interno

$\vec{R} \times \vec{P}$ : momento angular do próprio CM: momento

angular externo

ex: veículo movendo em uma pista

circular.

o momento angular

da roda:



$\vec{L}'$ : roda girando ao redor do eixo. (int.)

$\vec{L} \times \vec{P}$ : CM girando na pista circular e.

1) Eq. do movimento:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L}_{ext}$  vemos que serve p/ referencial inercial. Mas serve p/ referencial acelerado?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

→ posso falar  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ , então:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L}^{ext}$$

→ essa eq. vale mesmo se o CM estiver acelerado.

III) corpos rígidos.

Vamos sempre considerar o movimento como Translação do CM + Rotação ao redor do CM.

2b

$\vec{L}, L$  são escalares: Translação do CM + Rotação:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L}'$$

↳ Rotação só precisa de uma equação.

$$L_i = r_i p_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega = I_i \omega$$

$I_i$  = momento de inércia da  $i$ -ésima partícula

em um objeto rígido temos a mesma velocidade angular.

$$L = \sum_i L_i = \sum_i I_i \omega = I \omega$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

3b

$\vec{L}, \vec{L}'$  são vetores!

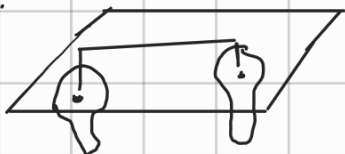
6 eq. ao todo: MUITA COISA

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'$$

→ Vamos amenizar.

→ movimentos no plano:

Ex:

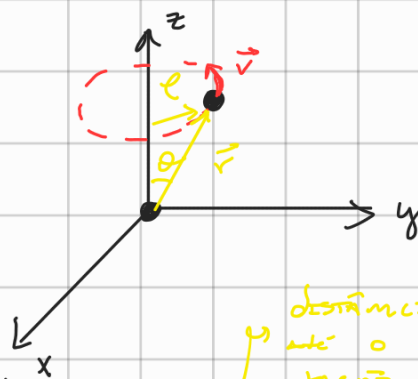


Translação +  
Rotação  
no plano

translação sempre ocorre neste plano.  
Eixo da Rotação é perpendicular ao plano.

Objeto 3D, mas cada ponto dele faz movimento 2D.

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dL_z'}{dt} = \tau_z'$$



distância do ponto até o eixo de rotação

$$v = r\omega$$

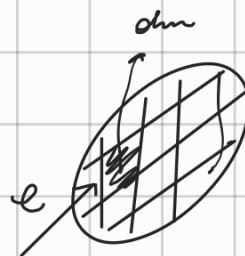
$$l = r \sin \theta$$

$$I_z = m l^2$$

$$I_z = \sum m_i l_i^2 \quad \text{p/ várias partículas}$$

→ Para um corpo extenso:

$$I_z = \int l^2 dm$$



$$\tau_z' = \frac{dL_z'}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt}$$

p/ objeto rígido, e com eixo fixo

→  $I_z$  é constante.

$$\tau_z' = I_z' \frac{d\omega}{dt} = I_z' \alpha$$

→ É importante saber o momento de inércia.

como fazer

## Aula 16

1) Anel / cilindro oco  $I_z = R^2 M$



2) disco circular / cilindro sólido  $I_z = \frac{m}{2} R^2$

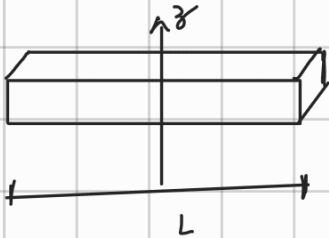


3) esfera sólida girando em torno de um diâmetro.



$$I_z = \frac{2}{5} m R^2$$

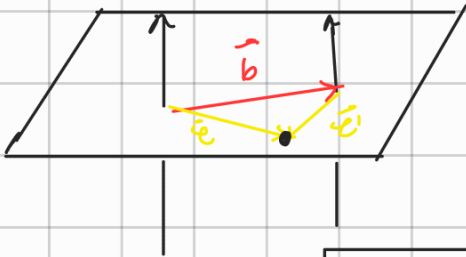
4) Barra em torno do centro



$$I_z = \frac{1}{12} m L^2$$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS:

P1 transporta o momento de inércia:

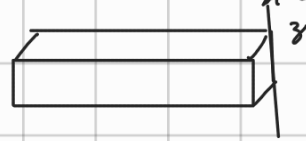


$$I = I_{cm} + b^2 M$$

↳ P1 Transporta

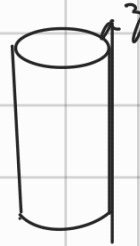
MEC A.

5) Barra girando com o z deslocado



$$I_z = \frac{1}{3} m L^2$$

6) cilindro com z deslocado



$$I = \frac{3}{2} m R^2$$

torque girar

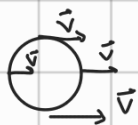
# aula 17

## rolamento



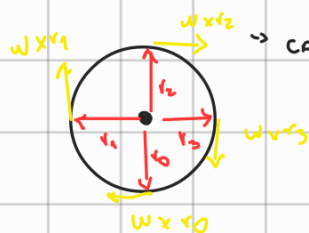
Translação + Rotação

ex: só translação



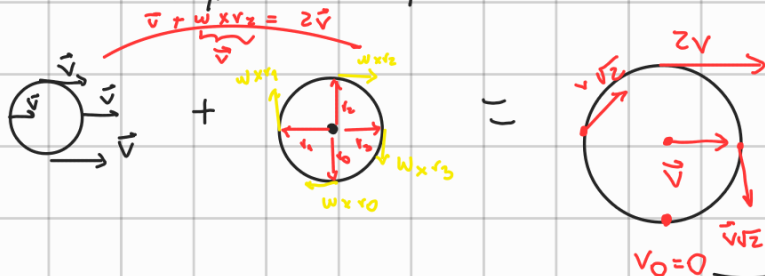
→ carro deslizando com Roda travada.

ex: só rotação



→ carro na lama atolado

ex: translação + rotação

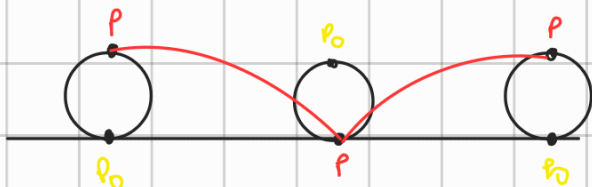


$$\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$$

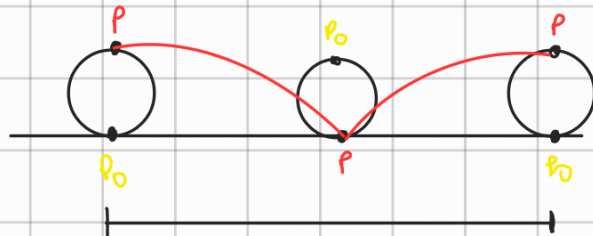
$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

temos:

→ rolamento sem deslizar:



cada ponto da Roda tem contato com o piso.



$l$  = comprimento do tanto que a Roda Rodou.

$$l = 2\pi R$$

Relaciona portanto o chão com a Roda.

$$l = 2\pi R \Rightarrow l = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow |\vec{v}| = \omega R$$

Translação + Rotação ligadas a  $\omega R$  p/ a vel.

→ ponto de contato da Roda

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = 0 \rightarrow \text{Atrito estático.}$$

(Quando há deslizamento,  $\vec{v}_0 \neq 0 \rightarrow$  tem atrito dinâmico).

ponto Qualquer da Roda:

$$\vec{v} = \omega \times (\vec{r}' - \vec{r}_0') \rightarrow \text{ponto de contato}$$

em instantâneo de Rotação.

→ Se calcularmos a Energia Cinética dele:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad \text{com: } v = \omega R$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (m R^2 + I_{cm})$$

se usarmos eixos paralelos.

$$= \frac{1}{2} I \omega^2 = T$$

$I$  = momento de inércia em relação ao ponto de contato.

Lois



movimento espinado: roda desliza, rotação desce e gira.

Forças em y:  $Mg - F = MA$

Torques em relação ao cm:  $T_y = P \cdot \text{distância}$

$T_y = F \cdot \text{dist. do cm.}$

Vas tender girar no sentido anti-

horário, por isso é positivo.

fio desliza sem deslizar

$$V = w \cdot \ell \rightarrow \text{vel.}$$

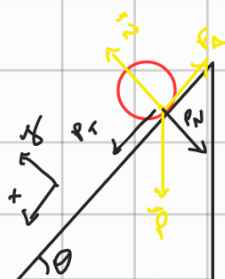
$$A = \alpha \cdot \ell \rightarrow \text{acel.}$$

$$\alpha = F \cdot \ell / I_{cm}$$

$$F = \frac{Mg}{\left(1 + \frac{M \ell^2}{I_{cm}}\right)}$$

$$A = \frac{g}{\left(\frac{I_{cm}}{M \ell^2} + 1\right)} < g$$

rolando no plano inclinado



Forças em y:

$$N - P_N = 0 \rightarrow N = P_N = P \cos \theta$$

Forças em x:

$$P_T - f = MA \quad P_T = P \sin \theta$$

Torque em relação ao cm.

$$T_y = f \cdot R = I_{cm} \alpha = M K^2 \alpha$$

$K$  = Raio de giro.

Se for rolando sem deslizar:

$$A = \alpha R$$

$$f \cdot R = M K^2 \alpha = M K^2 \frac{A}{R} \rightarrow f = \frac{M K^2}{R^2} \cdot A$$

$$P_T = P \sin \theta = Mg \sin \theta = MA + fA = MA \left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$A = \frac{g \sin \theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}$$

$K = R \rightarrow$  Se fosse um anel

$K = R/\sqrt{2} \rightarrow$  Disco

$K = R\sqrt{2}/5 \rightarrow$  Esfera

→ Variando o ângulo do plano inclinado!

→ Existe uma inclinação máxima p/ ser rolamento sem deslizar.

$$F_a = Mg \sin \theta \frac{K^2}{K^2 + R^2} \leq F_e = \mu_e N = \mu_e Mg \cos \theta$$

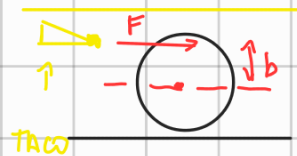
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \leq \mu_e N \left( \frac{K^2 + R^2}{R^2} \right) = \tan \theta_e$$

$\theta_e$ : Ângulo limite p/ rolamento sem deslizar

→ Energia Cinética, após descer uma distância  $L$ .

$$T_f = Mgh = E_{gi} \rightarrow \text{Tem conservação de Energia.}$$

Bola de Bilihar



$b$ : parâmetro de impacto.

$F$ : força impulsiva

$$I = F \cdot \Delta t = \Delta P = P = M V_0 \quad V_0: \text{Vel. do CM logo após a tacada.}$$

$$\tau' \cdot \Delta t = \Delta L' = -F b \Delta t = L = I_{cm} \omega$$

↳ sentido Anti-horário

$\omega$ : Vel. Angular após a tacada.

→ Rotação e Translação são independentes,  $\tilde{n}$  é Rolamento Puro.

$$\omega = -\frac{5}{2} \frac{b}{R^2} V_0$$

Se  $b$  |  $> 0 \rightarrow \omega < 0 \rightarrow$  gira horário  
 $< 0 \rightarrow \omega > 0 \rightarrow$  gira anti-horário  
 $= 0 \rightarrow \omega = 0 \rightarrow \tilde{n}$  gira

Velocidade no ponto inferior da bola

$$V_0 = V_0 \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{b}{R} \right), \text{ definindo } b_e = \frac{2}{5} R$$

Se  $b = b_e \rightarrow V_0 = 0 \rightarrow$  Rolamento puro

$b > b_e \rightarrow V_0 < 0 \rightarrow$  girar ali + transladar

$b < b_e \rightarrow V_0 > 0 \rightarrow$  Translada + rápido do que gira.

Nos casos  $b \neq b_e$  tenho deslizamento e tenho atrito dinâmico; sentido oposto da velocidade.

Vel. no ponto de contato:

$$V = V + \omega R$$

$$V = V_0 - \frac{7}{2} \mu_d g t$$

$$V = 0 \rightarrow t_1 = \frac{2}{7} \frac{V_0}{\mu_d g}$$

cosine guzzi

## Revisão - Aula 18

CM:  $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

→ Como calcular a posição do C.M.

$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

→ Momento total do sistema.

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$

$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \Delta \vec{P}$

Impulso

colisões só forças internas:  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

conservação do momento

1º ou 2º:

Elasticas ( $T_i = T_f$ )

Inelásticas ( $T_i \neq T_f$ ) → objetos ficam grudados.

rotações:  $\vec{\omega}$  {  
módulo  $d\omega/dt$   
direção: eixo de rotação  
sentido: positivo visto de cima é anti-horário

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  ;  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$  ;  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  ;  $\vec{I} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$  ;  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L}^{ext}$  Vale pl q's seg. inicial.

$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L} \times \vec{P}$   
↑ ↑  
interno externo

→ Momento de Inércia

$I = \sum_i m_i r_i^2$   $I = \int r^2 dm$

Ele é tabulado; vale você decorar os + bobrados

→ Se I for constante

$\tau = I \alpha$

$L = I \omega$

$I = mk^2 \rightarrow k = \text{raio de giro}$

$I = I_{cm} + b^2 M$  : Teorema dos eixos paralelos

$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

leira guzzi