PROBABILIDADE – RESUMO E EXERCÍCIOS* P2

**Exercícios de provas anteriores escolhidos para você estar preparado para qualquer questão na prova. Resoluções grátis em simplificaaulas.com*

Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

Propriedades:

$0 \leq P(X = x) \leq 1$ **e** $\sum_x P(X = x) = 1;$

Valor esperado (média):

X discreta: $\mu = E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$

X contínua: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

Propriedades:

- **Se x=c (constante real) então** $E[X] = c$
- $E[X + c] = E(X) + c$
- $E[cX] = c.E(X)$
- $E[X + Y] = E(X) + E(Y)$
- $E[XY] = E(X).E(Y)$

Variância:

$V[X] = E[(X - E[X])^2]$ **ou** $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Em função das probabilidades:

X discreta: $Var(X) = \sum_i x_i^{\,2} P(x_i) - \mu^2$

X contínua: $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2.$

Adicionalmente: $Var(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 \cdot P(X = x)$

Propriedades:

- $V(X + c) = V(X)$
- $V(cX) = c^2.V(X)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ **(SOMENTE SE X E Y FOREM INDEPENDENTES)**

Distribuições de Probabilidades

Distribuição Binomial

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow E(X) = np \rightarrow var(X) = np(1-p)$$

Parâmetros: p (probabilidade de sucesso) e n (amostra)

Distribuição de Poisson

$$Poisson \rightarrow P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \rightarrow E(X) = \lambda \rightarrow var(X) = \lambda$$

Parâmetro: λ (taxa média de ocorrência)

Distribuição Geométrica

$$P[X = j] = (1-p)^j p \rightarrow E(X) = \frac{1-p}{p} \rightarrow var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Parâmetro: p (probabilidade de sucesso)

Variáveis Bidimensionais

Independência: duas variáveis são independentes se:

P[X = x, Y = y] = P(X = x) . P(Y = y) para todos os pares (x,y)

Covariância: $\mathbf{COV(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)}$

Correlação: $\boldsymbol{\rho(X, Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$

Formulário da prova:

Formulário:

$$Probabilidade\ condicional:\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$Fórmula\ das\ probabilidades\ totais:\ P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B)\ \ (B_1, B_2, B_3, .. = S)(partição\ de\ S)$$

$$Fórmula\ de\ Bayes:\ P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}\ \ ou\ P(A_i|B) = \frac{P(B|Ai)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}$$

$$f(x) = função\ densidade\ de\ probabilidade \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = função\ distribuição\ de\ probabilidade \rightarrow F(x) = P[X \leq x]$$

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \rightarrow F'(x) = f(x) \rightarrow P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

$$E(X) = esperança\ ou\ valor\ esperado\ de\ uma\ variável\ aleatória$$

$$Variável\ Aleatória\ Discreta \rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P[X = x_i] \rightarrow E(h(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i)P[X = x_i]$$

$$Variável\ Aleatória\ Contínua \rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \rightarrow E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

$$Variância \rightarrow var(X) = \sigma^2(X) = E\big(X - E(x)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$Variável\ Aleatória\ Discreta \rightarrow \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \big(x_i - E(X)\big)^2 P[X = x_i]$$

$$Variável\ Aleatória\ Contínua \rightarrow \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)^2 f(x)dx$$

$$Momento\ de\ ordem\ k\ de\ uma\ V.A.D. \rightarrow E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k P[X = x_i]$$

$$Momento\ de\ ordem\ k\ de\ uma\ V.A.C. \rightarrow E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Distribuições discretas:

$$Binomial \rightarrow P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow E(X) = np \rightarrow var(X) = np(1-p)$$

$$n = nº\ de\ ensaios, p = probabilidade\ de\ sucesso, X = nº\ de\ sucessos$$

$$Geométrica \rightarrow P[X = j] = (1-p)^j p \rightarrow E(X) = \frac{1-p}{p} \rightarrow var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$j = número\ de\ falhas, p = probabilidade\ de\ sucesso$$

$$Poisson \rightarrow P[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \rightarrow E(X) = \lambda \rightarrow var(X) = \lambda$$

$$\lambda = nº\ esperado\ de\ ocorrências\ num\ dado\ intervalo\ de\ tempo, k = P\ de\ existirem\ k\ ocorrências$$

EXERCÍCIOS (vídeos de resoluções grátis em simplificaaulas.com)

1) (P2 2017) Seja uma variável aleatória X. Considere:

a) Se X = 1, então E[X] = 1

b) E[X+2X] = 3 E[X]

c) V[X+2X] = 5 V[X]

d) $E[X^4] = V[X^2] + (V[X] + E[X^2])^2$

São corretas as afirmações:

a) (b), (c) e (d)
b) (a), (c) e (d)
c) (a) e (b)
d) (a), (b), (c) e (d)
e) (a), (b) e (d)

2) (P2 2017) Em uma indústria de cosméticos uma das matérias primas é fornecida em frascos. A presença de um contaminante no conteúdo de um dos frascos prejudica todo o processo. A análise química da amostra de um frasco permite a determinação do contaminante.

De modo a reduzir o número de análises, separam-se 10 frascos e retira-se uma amostra de cada um dos frascos e as 10 amostras são misturadas um único lote e então efetua-se a análise do lote.

Se a análise do lote indicar que não há contaminação, então considera-se que os 10 frascos estão aprovados (supõe-se que basta uma amostra contaminada para que todo o lote fique contaminado). Se a análise indicar que há contaminação, procede-se a análise de todas as amostras (ou seja, realiza-se um total de 11 análises para este lote).

Se a probabilidade do conteúdo de um frasco estar contaminado for 0,1 e a presença ou não de contaminação em cada recipiente for independente dos demais, o valor esperado para o número de análises para um lote de frascos é:

a) $10-11(0,9)^{10}$
b) $11(0,1)^{10}$
c) $11-10(0,1)^{10}$
d) $11-10(0,9)^{10}$

e) $1-(0,1)^{10}$

3) (P2 2016) Um equipamento industrial é bastante frágil. A probabilidade de apresentar defeito em um mês qualquer é q. Em função disso, deve-se programar o momento de parada do equipamento para manutenção preventiva. Qual a probabilidade de não ocorrer defeito nos primeiros k meses?

a) $1-\sum_{j=1}^{k}(1-q)^{j}q$

b) $\sum_{j=1}^{k}(1-q)^{j-1}q$

c) qk

d) $(1-q)^{k}$

e) $(1-q)^{k}q$

4) (P2 2016) Uma máquina (A) produz 100 kg de balas por dia, sendo que 14% das balas produzidas não atingem a especificação exigida por um supermercado. Uma nova máquina (B) foi adquirida e produz 200 kg de balas por dia. Constata-se que 8% das balas produzidas por essa máquina também não atingem a especificação do supermercado. Sabe-se que a produção das duas máquinas é misturada. Coletada uma amostra aleatória de 12 balas da produção, qual a probabilidade de que essa amostra contenha exatamente 2 balas fora da especificação?

a) $(0,14)^2(0,86)^{10}$

b) $66(0,14)^2(0,86)^{10}$

c) (2/3)0,08

d) $(0,1)^2(0,9)^{10}$

e) $0,66(0,9)^{10}$

5) (P2 2017) Em uma loja, 20% dos produtos têm defeito. A loja vende o produto em pacotes contendo 4 produtos selecionados aleatoriamente. Caso o consumidor compre um pacote com um ou mais produtos com defeito, ele retorna à loja para trocar o pacote. Um dado consumidor comprou 3 pacotes. Qual a probabilidade de ele retornar à loja para a troca?

a) $(0,8)^{12}$

b) 0,8

c) $1-3(0,8)^4$

d) $(0,2)^8(0,8)^4$

e) $1-(0,8)^{12}$

6) (P2 2016) A probabilidade de ocorrência de uma chuva crítica em um ano é q. O inverso dessa probabilidade, 1/q, é chamado de período de retorno, em anos. Considerando que a ocorrência ou não de uma chuva crítica é independente para cada ano, determine a expressão da probabilidade P de não ocorrer uma chuva crítica em 1/q anos. Para $q \to 0$, qual o valor de P?

a) 1

b) 0,5

c) e^{-1}

d) $1-e^{-1}$

e) 0

7) (P2 2016) Considere uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com parâmetro 4t, em que t é o período de tempo fornecido, dado em horas. Esse tipo de variável é usada para representar solicitações de assistência em uma empresa de seguros: X é o número de pedidos de assistência em um intervalo de tempo t. Se os operadores da empresa tirarem meia hora de folga para almoço, qual a probabilidade de não perderem nenhum chamado de assistência?

a) e^2

b) 1/8

c) 1/e

d) $1/e^2$

e) $1/\sqrt{e}$

8) (P2 2017) Considere duas variáveis aleatórias X e Y com distribuições geométricas, com mesmo parâmetro p e tais que P({X = x}∩{Y = y}) = P(X = x)P(Y = y) para quaisquer x e y. Qual é o valor de P(X + Y = n)?

a) $np^2(1-p)^n$

b) $p^n(1-p)^n$

c) $(n+1)p^2(1-p)^n$

d) 1/n

e) $(1-p)^n/(np^2)$

9) Um restaurante serve três pratos de preço fixo que custam 12, 15 e 20 reais. Para um casal selecionado ao acaso seja x = custo do prato do homem e y = custo do prato da mulher. A função massa de probabilidade de x e y está representada na tabela seguinte:

P(x,y)		Y		
		12	15	20
X	12	0,05	0,05	0,10
	15	0,05	0,10	0,35
	20	0	0,20	0,10

a) Calcule as distribuições marginais de x e y.

b) Qual a probabilidade do prato do homem e da mulher juntos custarem mais de 30 reais?

c) x e y são independentes? Justifique sua resposta.

d) Qual o custo total esperado pela soma dos dois pratos?

10) A tabela abaixo dá a distribuição conjunta de X e Y :

	X		
Y	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,0	0,3
2	0,0	0,1	0,1

a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

b) Calcule a média e a variância de cada uma das variáveis X e Y.

c) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.

d) Calcule P (X = 1|Y = 0) e P (Y = 2|X = 3).

e) Calcule P (X ≤ 2) e P (X = 2, Y ≤ 1).