# Bitolão Cálculo IV P2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{C_n} = L$$

$$R = \frac{1}{L}$$ → checar pontas.

## · Série de Taylor

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n} \quad , \quad x_0 - R < x_0 < x_0 + R$$

$$\boxed{C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} \quad , n > 0$$

· f pode ser representada por série de Taylor se for $\mathcal{C}^\infty$

· Nem sempre o intervalo I da série é o mesmo intervalo i def.

· Série de <u>MacLaurin</u> se $x_0 = 0$

· $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (só ímpares), converge em $\mathbb{R}$.

· $f(x) = e^x \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, converge em $\mathbb{R}$.

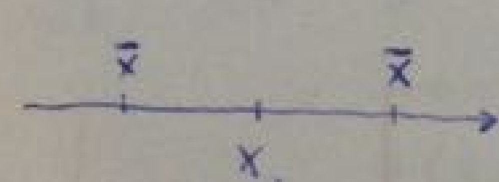
· $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow S(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1 \leq x < 1$

· $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow S(x) = \frac{2}{\quad} \cdot \sum_{n=} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

## · Resto (ou Erro) de Taylor

$$\boxed{R_{K,x_0} = f(x) - P_{K,x_0}(x)} \quad \Rightarrow \quad \text{Erro} = \left| \sum_{K+1}^{\infty} a_n \right|$$

$$\boxed{R_{K,x_0} = f^{(K+1)}(\bar{x}) \cdot \frac{(x - x_0)^{K+1}}{(K+1)!}}$$




· Se $|f^{(K+1)}(x)| < M$, com $|x - x_0| < R$ ∴

$$\boxed{|R_{K,x_0}| < M \cdot \frac{|x - x_0|^{K+1}}{(K+1)!}}$$

lembrar: $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$

# Séries de Fourier

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

$$\left( \int_a^b v\,du = uv\Big|_a^b - \int_a^b u\,dv \right)$$

$$v \to dv$$
$$du \to u$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx} \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)\,dx} \quad , \; n =$$

· desenhar sempre que possível $f(x)$ e $S(x)$.

## Teorema da Convergência Pontual de uma Série de Fourier

· $f : [-\pi, \pi]$ é $C^1$ por partes.

tq: $-\pi = x < x_1 < x_2 < \cdots < x_i = \pi$ , $f$ e $f'$ são contínuas e limitadas em $]x_{i-1}, x_i[$ e nos limites laterais são finitos.

Logo: $\boxed{S(x) = f(x)}$ e $\boxed{S(x_i) = \dfrac{\lim_{x \to x_i^+} f(x) + \lim_{x \to x_i^-} f(x)}{2}}$

generalizando: $[-L, L]$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

$$\cancel{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ideia: extender f em $[-\pi, \pi]$ par: só cossenos.

ideia 1: (1) Decompor séries em "mini" séries e usar $S(x) = \frac{a_1}{1-q}$.

ideia 2: Descobrir R.

ideia 3: (1) Derivar (Séries de potências.) depois integrar.

Lembrar da G.

ideia 4: Se a f for decrescente contínua positiva e tal podemos usar o critério da integral para provar que $\left|\sum_{n=K+1}^{\infty} a_n\right| \leq \int_{K}^{+\infty} f(x)\,dx$

ideia 5: Ver o Erro como uma série.

ideia 6: $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\cdot\frac{1}{n!} = C_n \rightsquigarrow$ just. $\nearrow$ Série de Pot. → função ↓ Série de Taylor.

ideia 7: Sempre que pedir pra "escrever" como f, trabalhar com derivações. → buscar $\underline{\underline{n \cdot x^{n-1}}}$ $\rightsquigarrow$ observar $\underline{\underline{R}}$

ideia 8: Se série alternada Erro $\leq |a_{K+1}|$