RESOLUÇÃO NA PÁGINA 14

Probilidade 0303200
Primeira lista de exercícios

Alguns exercícios a seguir são adaptados de A. Leon-Garcia: *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineers*, 3rd. ed., Prentice-Hall, 2008, ou de R.D. Yates e D.J. Goodman: *Probability and Stochastic Processes — A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2005.

1. Uma transmissão de fax pode ser realizada com 3 velocidades, dependendo da condição da conexão entre duas máquinas de fax: velocidade alta (A), média (M) ou baixa (B) (vide tabela abaixo).

	Alta (A)	Média (M)	Baixa (B)
Velocidade (bps)	14.400	9600	4800

   Uma empresa envia apenas dois tipos de fax: curtos (C), com duas páginas, ou longos (L), com quatro páginas. Considere o experimento de monitorar uma transmissão de fax e observar a velocidade de transmissão e o comprimento da mensagem.

   (a) Qual é o espaço amostral do experimento?
   (b) Seja A_1 o evento "fax de velocidade média". Quais são os elementos de A_1?
   (c) Seja A_2 o evento "fax curto". Quais são os elementos de A_2?
   (d) Seja A_3 o evento "fax de alta velocidade ou de baixa velocidade". Quais são os elementos de A_3?
   (e) Os eventos A_1, A_2 e A_3 são mutualmente exclusivos?

2. Uma fábrica de circuitos integrados possui 3 máquinas X, Y e Z. Um CI produzido por cada máquina passa por um teste no qual ele pode ser aprovado (a) ou pode falhar (f). Uma observação é uma seqüência de 3 resultados correspondendo aos testes realizados em cada uma das máquinas. Por exemplo, aaf é uma observação na qual os CIs produzidos pelas máquinas X e Y foram aprovados, mas o CI fabricado pela máquina Z falhou no teste.

   (a) Quais são os elementos do espaço amostral desse experimento?

(b) Quais os elementos dos conjuntos Z_F={circuito de Z falha} e X_A ={circuito de X é aceitável} ?

(c) Z_F e X_A são mutualmente exclusivos?

3. Demonstre que:

   (a) $B - A = \bar{A} \cap B$

   (b) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$

4. Responda às questões abaixo para $i = 1, 2, \ldots$:

   (a) Considere $S = \mathbb{R}$ e $A_i = (-i, i)$. Os A_i formam uma partição de S?

   (b) Considere $S = [\,0, \infty)$ e $A_i = [\,i - 1, i)$. Os A_i formam uma partição de S?

   (c) Considere $S = [\,0, \infty)$ e $A_i = [\,i - 1, i\,]$. Os A_i formam uma partição de S?

5. Programas de computador são classificados pelo comprimento do código-fonte e pelo tempo de execução. Programas com mais de 150 linhas são classificados como grandes (G) e programas com um número menor ou igual a 150 linhas são chamados pequenos (P). Programas rápidos (R) executam em menos de 0.1 segundos, enquanto que programas lentos (L) demoram pelo menos 0.1 segundos para serem executados. Suponha que foi monitorada a execução de um programa, observando o comprimento do código e o tempo de execução. O modelo de probabilidades para esse experimento contém as seguintes informações: $\Pr[PR] = 0.5$, $\Pr[GR] = 0.2$ e $\Pr[GL] = 0.2$. Qual é o espaço amostral desse experimento? Calcule as seguintes probabilidades:

   (a) $\Pr[L]$

   (b) $\Pr[G]$

   (c) $\Pr[L \cup G]$

6. Existem dois tipos de telefones celulares: normais (N) e *smartphones* (S). Chamadas telefônicas realizadas a partir desses celulares podem ser classificadas como curtas (C) ou longas (L). Ao monitorar uma chamada de celular, observa-se o tipo de telefone e a duração da chamada. As seguintes informações são coletadas sobre o modelo de probabilidade deste experimento: $\Pr[C] = 0.5$, $\Pr[NC] = 0.2$ e $\Pr[SL] = 0.1$. Qual o espaço amostral do experimento? Calcule:

   (a) $\Pr[L]$

   (b) $\Pr[SC]$

   (c) $\Pr[N]$

7. Telefones celulares realizam *handoff* quando se movem de uma célula para outra. Durante uma chamada, um telefone pode não realizar nenhum *handoff* (H_0), um *handoff* (H_1) ou mais de um *handoff* (H_2). Além disso, as chamadas pode ser longas (L), durando mais de 3 minutos, ou curtas (C). A tabela seguinte descreve as probabilidades envolvidas no experimento.

	H_0	H_1	H_2
L	0.1	0.1	0.2
C	0.4	0.1	0.1

Qual a probabilidade $\Pr[H_0]$ de que um celular não faça nenhum *handoff*? Qual a probabilidade de uma chamada ser curta? Qual é a probabilidade de uma chamada ser longa ou de haver mais de um *handoff*?

8. Você lança um dado de 6 lados uma vez. Denote R_i o evento correspondente ao resultado do lançamento ser igual a i, M_j o evento correspondente ao resultado do lançamento ser maior do que j e P o evento correspondente ao resultado do lançamento ser um número par.

   (a) Qual é o valor de $\Pr[R_3|M_1]$, que corresponde à probabilidade condicional de o resultado do lançamento ser igual a 3, dado que o resultado é maior do que 1?

   (b) Qual é a probabilidade condicional de o resultado ser 6, dado que o resultado é maior do que 3?

   (c) Qual o valor de $\Pr[M_3|P]$, ou seja, qual a probabilidade de obter resultado maior do que 3, dado que saiu um número par?

   (d) Dado que o resultado é maior do que 3, qual a probabilidade condicional de que o resultado seja um número par?

9. Carrapatos podem transportar tanto a *doença de Lyme* quanto a *erliquiose granulocítica humana* (HGE). Em um estudo com carrapatos no *mid-west* americano, foi descoberto que 16% dos carrapatos eram portadores da doença de Lyme e 10% eram portadores do HGE. Além disso, descobriram que 10% dos carrapatos que eram portadores da doença de Lyme ou do HGE, eram portadores de ambas as doenças.

   (a) Qual a probabilidade $\Pr[\text{Lyme} \cap \text{HGE}]$ de que um carrapato seja portador da doença de Lyme e do HGE?

   (b) Qual a probabilidade condicional de que um carrapato seja portador do HGE, dado que ele é portador da doença de Lyme?

10. Em um experimento, A, B, C e D são eventos com probabilidades $\Pr[A] = 1/4$, $\Pr[B] = 1/8$, $\Pr[C] = 5/8$ e $\Pr[D] = 3/8$. Além disso, sabe-se que A e B são disjuntos e que C e D são independentes.

    (a) Encontre $\Pr[A \cap B]$, $\Pr[A \cup B]$, $\Pr[A \cap \bar{B}]$ e $\Pr[A \cup \bar{B}]$.

    (b) Os eventos A e B são independentes?

    (c) Encontre $\Pr[C \cap D]$, $\Pr[C \cap \bar{D}]$ e $\Pr[\bar{C} \cap \bar{D}]$.

    (d) Os eventos $\bar{C}$ e $\bar{D}$ são independentes?

11. Para eventos A e B independentes, prove que

    (a) A e $\bar{B}$ são independentes.
    (b) $\bar{A}$ e B são independentes.
    (c) $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são independentes.

12. Suponha que você joga uma moeda duas vezes. Em qualquer lançamento, a probabilidade de a moeda dar cara é 1/4. Use C_i para denotar que saiu cara no lançamento i e K_i para denotar que saiu coroa no lançamento i.

    (a) Qual a probabilidade $\Pr[C_1|C_2]$, ou seja, qual a probabilidade de obter cara na primeiro lançamento, dado que o segundo lançamento deu cara?
    (b) Qual a probabilidade de que o primeiro lançamento da moeda seja cara e o segundo seja coroa?

13. Suponha que para a população em geral, 1 em cada 5000 pessoas carrega o vírus HIV e que existe um teste para a presença do HIV cujo os possíveis resultados são positivo (+) e negativo (−). Suponha que o teste acerte a resposta em 99% das casos, isto é, para uma pessoa que tem HIV ou não, o teste dá o resultado correto 99% das vezes. Qual é a probabilidade $\Pr[-|\text{HIV}]$ de que o teste dê negativo dado que a pessoa possui o vírus HIV? Qual a probabilidade $P[\text{H}|+]$ de que uma pessoa escolhida aleatoriamente tenha o vírus HIV dado que o teste deu positivo?

14. Com base em dados de 2012 da Rede Interagencial de Informações para a Saúde (RIPSA) do Ministério da Saúde, aproximadamente 12% da população brasilieira tem diabetes melito **[link]**. Suponha que existem 2 métodos de diagnóstico para esta enfermidade: o método A dá resultado positivo para 80% dos que tem diabetes e para 10% dos sãos, enquanto que o método B dá positivo para 70% dos acometidos e para 5% dos sãos.

    (a) Calcule a probabilidade de uma pessoa qualquer obter um resultado positivo pelos dois métodos.
    (b) Calcule a probabilidade de que, entre duas pessoas com diabetes melito, pelo menos uma obtenha um resultado positivo por algum método.

15. Suponha que a cada dia que você sai de carro para vir para a USP, você encontra um semáforo que está verde com probabilidade 7/16, vermelho com probabilidade 7/16 ou amarelo com probabilidade 1/8, independentemente da cor do semáforo no dia anterior. Em um curso de 5 dias, G, R e Y denotam o número de dias em que a cor encontrada é verde, vermelha e amarela, respectivamente. Qual a probabilidade $\Pr[G = 2, Y = 1, R = 2]$? Qual a probabilidade $\Pr[G = R]$?

16. Um dardo é lançado sobre um quadrado cujo lado tem comprimento ℓ. Assuma que a pessoa jogando o dardo está vendada e que a probabilidade do dardo atingir qualquer ponto do quadrado é a mesma. Defina a variável aleatória Z dada pela soma das duas coordenadas do ponto onde dardo atinge o quadrado.

(a) Descreva $\mathcal{S}$, o espaço amostral do experimento, e $\mathcal{S}_Z$, a imagem da VA Z.

(b) Encontre a região do quadrado correspondente ao evento $\{Z \leq z\}$, para $-\infty < z < \infty$.

(c) Determine $P[Z \leq z]$.

17. A variável aleatória N tem função de massa de probabilidade

$$p_N(n) = \begin{cases} c(1/2)^n, & n = 0,1,2,\cdots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Qual é o valor da constante c?

(b) Qual o valor de $\Pr[N \leq 1]$?

18. A variável aleatória Y tem função de densidade de probabilidade (*pdf*)

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Use a *pdf* de Y para calcular:

(a) a constante c,

(b) $\Pr[0 \leq Y \leq 1]$,

(c) $\Pr[-1/2 \leq Y \leq 1/2]$,

(d) $F_Y(y)$.

19. Você é responsável por uma agência de venda ingressos por telefone para as olimpíadas Rio 2016. Você assume que as pessoas ligam 3 vezes na tentativa de comprar os ingressos e, se não conseguem, desistem. Você quer ter certeza de que é capaz de atender 95% dos clientes. Assuma que p é a probabilidade de que um cliente seja atendido em cada tentativa de ligação. Qual o valor mínimo de p necessário para que você atinja o seu objetivo?

20. Em um pacote de M&Ms, o número de M&Ms amarelos (Y) é uniformemente distribuído entre 5 e 15.

(a) Qual a função de probabilidade de Y?

(b) Qual o valor de $\Pr[Y < 10]$?

(c) Qual o valor de $\Pr[Y > 12]$?

(d) Qual o valor de $\Pr[8 \leq Y \leq 12]$?

21. Quando um celular transmite um SMS, a probabilidade de que a mensagem seja recebida pelo outro celular é igual p. Para garantir que o SMS seja recebido pelo menos uma vez, o sistema transmite a mensagem n vezes.

(a) Assumindo que todas as transmissões sejam independentes, qual é a função de probabilidade de K, o número de vezes que o celular *recebe* o SMS?

(b) Assuma que $p = 0.8$. Qual é o valor mínimo de n que produz uma probabilidade de 0.95 de receber o SMS pelo menos uma vez?

22. O número de bits B em uma transmissão de fax é uma variável aleatória geométrica com $p = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Qual a probabilidade $P[B > 500000]$ de que um fax tenha mais de 500000 bits? Dado: se uma VA B tem distribuição geométrica com parâmetro p, então $\Pr(B = b) = p(1-p)^{b-1}$, $b = 1, 2, 3, \ldots$ (e zero, caso contrário).

23. O número de circulares que passam no ponto de ônibus em frente à POLI em T minutos é uma variável aleatória $B \sim \text{Poisson}(T/5)$, ou seja,

$$P_B(n) = \text{Prob}\{B = n\} = \frac{(T/5)^n}{n!} e^{-(T/5)},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (a) Qual é a probabilidade de que em um intervalo de 2 minutos, 3 ônibus cheguem ao ponto?
   (b) Qual é a probabilidade de que nenhum ônibus chegue ao ponto em um intervalo de 10 minutos?
   (c) Quanto tempo você deve gastar para que apareça ao menos um ônibus com probabilidade 0.99?

24. Uma variável aleatória X do tipo $\text{Zipf}(n, \alpha = 1)$ possui função de probabilidade

$$p_X(x) = \begin{cases} c(n)/x, & x = 1,2, \cdots, n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A constante $c(n)$ é escolhida de forma que $\sum_{x=1}^{n} p_X(x) = 1$. Calcule $c(n)$ para $n = 1,2, \ldots, 6$.

25. Uma estação de rádio dá ingressos para o show da banda Calypso para o *sexto* ouvinte a ligar e a acertar a data de nascimento da Joelma. Para cada pessoa que liga, a probabilidade de que ela saiba a data de nascimento é 0.75. Todas as chamadas são independentes.

   (a) Qual a função de probabilidade de L, o número de chamadas necessário para obter um vencedor?
   (b) Qual é a probabilidade de achar um vencedor na décima ligação?
   (c) Qual a probabilidade de que a estação de rádio precise de 9 ou mais ligações para obter um vencedor?

26. A variável aleatória X possui função distribuição cumulativa dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \le x < 0 \\ 0.7, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

(a) Desenhe o gráfico de $F_X(x)$.

(b) Encontre $P_X(x)$ (função de probabilidade).

27. Em uma pizzaria, cada pizza vendida tem probabilidade $p = 2/3$ de ter *champignon*. Em um dia em que 100 pizzas foram vendidas, seja N o número de pizzas vendidas antes que a primeira pizza com *champignon* seja vendida. Qual a função de probabilidade de N? Qual a função de distribuição cumulativa de N?

28. Para uma constante $a > 0$, uma variável aleatória W do tipo Rayleigh tem fdp

$$f_W(w) = \begin{cases} a^2 w e^{-a^2 w^2/2}, & w > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a função de probabilidade acumulada, $F_W(w)$, de W?

29. Para a e b constantes, uma variável aleatória X tem fdp

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quais condições, em termos de a e de b, são necessárias e suficientes para garantir que $f_X(x)$ seja uma função densidade de probabilidade válida?

30. Em 80% das aulas, o professor M é pontual e a aula começa com atraso de $T = 0$ segundos. Quando o professor M se atrasa, o tempo de atraso T é uniformente distribuído entre 0 e 300 segundos. Encontre a função de distribuição cumulativa de T.

31. Quais são os possíveis valores de α e p para que $P_X(k) = \alpha p^k$, $k = 2, 3, \ldots$, seja uma função de probabilidade válida?

32. Considere a variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada abaixo. Calcule o valor de c e desenhe $f_X(x)$ e $F_X(x)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-1), & 1 \le x \le 2, \\ c(3-x), & 2 < x \le 3, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Probabilidade 0303200
Respostas da primeira lista de exercícios

FGAN/LCOC/VHN

1. (a) O espaço amostral é $S = \{AC, AL, MC, ML, BC, BL\}$.
   (b) $A_1 = \{MC, ML\}$.
   (c) $A_2 = \{AC, MC, BC\}$.
   (d) $A_3 = \{AC, AL, BC, BL\}$.
   (e) Não são mutualmente exclusivos.
2. (a) O espaço amostral é $S = \{aaa, aaf, afa, faa, aff, faf, ffa, fff\}$.
   (b) $Z_F = \{aaf, aff, faf, fff\}$ e $X_A = \{aaa, aaf, afa, aff\}$.
   (c) Não são mutualmente exclusivos.
3. (a) Demonstração.
   (b) Demonstração.
4. (a) Não.
   (b) Sim.
   (c) Não.
5. O espaço amostral é $S = \{LF, LW, BF, BW\}$.
   (a) $\Pr[L] = 0.3$.
   (b) $\Pr[G] = 0.4$.
   (c) $\Pr[L \cup G] = 0.5$.
6. O espaço amostral é $S = \{HF, HW, MF, MW\}$.
   (a) $\Pr[L] = 0.5$.
   (b) $\Pr[SC] = 0.3$.
   (c) $\Pr[N] = 0.6$.
7. $\Pr[H_0] = 0.5$, $\Pr[C] = 0.6$ e $\Pr[L \cup H_2] = 0.5$.
8. (a) $\Pr[R_3|M_1] = 1/5$.
   (b) $\Pr[R_6|M_3] = 1/3$.

(c) $\Pr[M_3|P] = 2/3$.

(d) $\Pr[P|M_3] = 2/3$.

9. (a) $\Pr[\text{Lyme} \cap \text{HGE}] = 0.0236$.

   (b) $\Pr[\text{HGE}|\text{Lyme}] = 0.148$.

10. (a) $\Pr[A \cap B] = 0$, $\Pr[A \cup B] = 3/8$, $\Pr[A \cap \bar{B}] = 1/4$ e $\Pr[A \cup \bar{B}] = 7/8$.

    (b) A e B não são independentes.

    (c) $\Pr[C \cap D] = 15/64$, $\Pr[C \cap \bar{D}] = 25/64$ e $\Pr[\bar{C} \cap \bar{D}] = 15/64$.

    (d) $\bar{C}$ e $\bar{D}$ são eventos independentes.

11. Dica: lembre que $A = A \cap (B \cup \bar{B})$.

12. (a) $\Pr[C_1|C_2] = 1/4$.

    (b) $\Pr[C_1 K_2] = 3/16$.

13. $\Pr[-|H] = 0.01$ e $\Pr[H|+] = 0.0194$.

14. (a) $\Pr[\text{A}+ \cap \text{ B}+] = 0.0716$.

    (b) $\Pr[\,\cdot\,] = 0.9964$.

15. $\Pr[G = 2, Y = 1, R = 2] = 0.1374$ e $\Pr[G = R] = 0.1449$.

16. (a) $\mathcal{S} = [0, \ell] \times [0, \ell]$ e $\mathcal{S}_Z = [0, 2\ell]$.

    (b) O evento $\{Z \leq z\}$ corresponde a todos os pontos abaixo a reta $y = z - x$ (ver Figura 1).

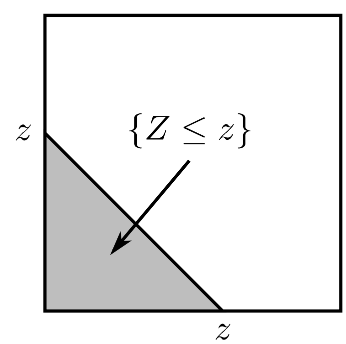


Figura 1: $\{Z \leq z\}$

    (c) Como a probabilidade do dardo acertar qualquer ponto dentro do quadrado é a mesma, $\Pr[Z \leq z]$ é proporcional a área do evento $\{Z \leq z\}$. Assim, $\Pr[Z \leq z] = \frac{z^2}{2}$.

17. (a) $c = 1/2$.

    (b) $\Pr[N \leq 1] = 3/4$.

18. (a) $c = 1/2$

    (b) $\Pr[0 \leq Y \leq 1] = 1/4$

    (c) $\Pr[-1/2 \leq Y \leq 1/2] = 1/16$

    (d)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{4}y^2, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

19. $p = 0.6316$.

20. (a) $p_Y(y) = \begin{cases} 1/11, & y = 5, 6, \ldots, 15 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

    (b) $\Pr[Y < 10] = 5/11$.

    (c) $\Pr[Y > 12] = 3/11$.

    (d) $\Pr[8 \leq Y \leq 12] = 5/11$.

21. (a) $p_K(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}, & k = 0{,}1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

    (b) $n = 2$.

22. $P[B > 500000] = 3.72 \cdot 10^{-6}$.

23. (a) $p_B(b) = \begin{cases} \dfrac{e^{-T/5}(-T/5)^b}{b!}, & b = 0{,}1, \ldots \\ 0, & \text{caso contráro} \end{cases}$

    (b) $p_B(3) = 0.0072$.

    (c) $p_B(0) = 0.1353$.

    (d) $T = 23.03$ minutos.

24. $c(1) = 1$
    $c(2) = 2/3$
    $c(3) = 6/11$
    $c(4) = 12/25$
    $c(5) = 60/137$
    $c(6) = 60/147$.

25. (a) $p_L(l) = \begin{cases} \begin{pmatrix} l-1 \\ 5 \end{pmatrix} 0.25^{l-6} \cdot 0.75^6, & l = 6{,}7, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

    (b) $p_L(10) = 0.0876$.

    (c) $p_L(L \geq 9) = 0.321$.

26. (a) Ver Figura 2.

    (b)

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = -1 \\ 0.5, & x = 0 \\ 0.3, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

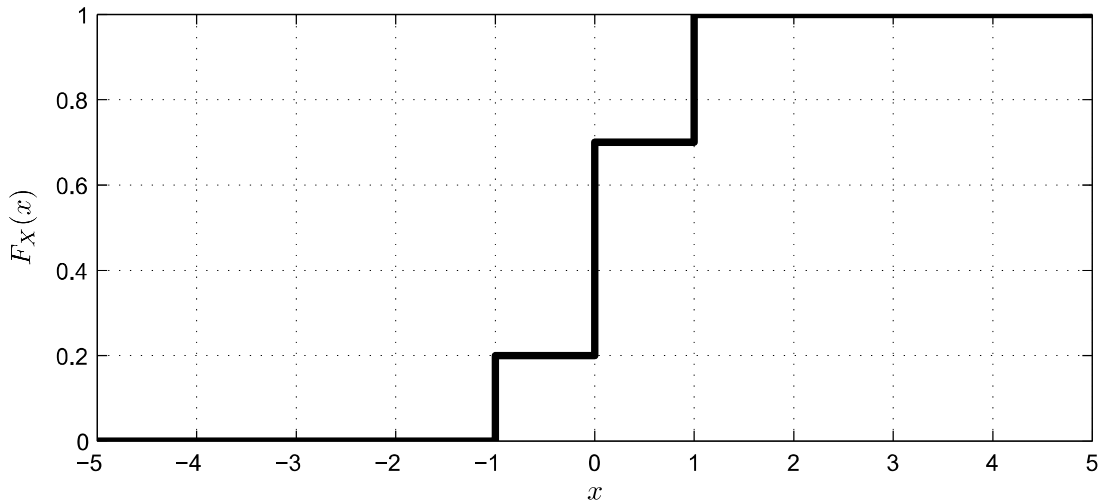


Figura 2: $F_X(x)$

27.

$$P_N(n) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n, & n = 0, 1, \ldots, 99 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{100}, & n = 100 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_N(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, & 0 \leq n < 100 \\ 1, & n \geq 100 \end{cases}$$

28.

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ 1 - e^{-a^2 w^2/2}, & w \geq 0 \end{cases}$$

29. $-6 \leq a \leq 3$ e $b = 2 - 2a/3$

30.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.8 + \dfrac{0.2t}{300}, & 0 \leq t < 300 \\ 1, & t \geq 300 \end{cases}$$

31. $0 < p < 1$ e $\alpha = (1-p)/p^2$

32. $c = 1$ e Figura 3.

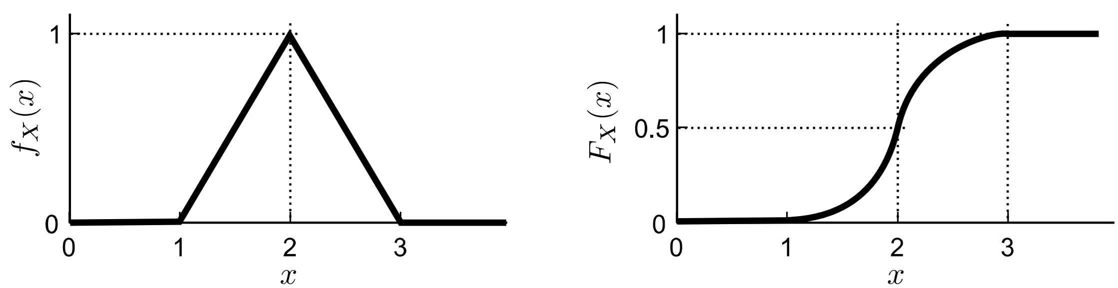


Figura 3: Função densidade e função distribuição de X

Lista 1B | Paulo Akira 2017.1

4) a) Não é uma partição, pois os A_i não conseguem cobrir todo $\mathbb{R}$.

b) Sim, é uma partição, pois, os conjuntos A_i são disjunt e cobrem todo S

c) Não é uma partição, pois, os conjuntos A_i não são todos disjuntos

10) a) Como A e B são disjuntos $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{B}) - \mathbb{P}(A \cup \bar{B}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{B}) - \mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cup \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{7}{8}$$

b) $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \neq \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 0 \neq \mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ A e B não são independentes.

c) $\mathbb{P}(C|D) = \mathbb{P}(C) \Rightarrow \dfrac{\mathbb{P}(C\cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \mathbb{P}(C) \Rightarrow \mathbb{P}(C\cap D) = \dfrac{15}{64}$

$\mathbb{P}(\bar{D}) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

Como C e D são independentes então C e $\bar{D}$ também serão.

$\mathbb{P}(C\cap\bar{D}) = \mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(\bar{D}) = \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{5}{8} = \dfrac{25}{64}$

$\mathbb{P}(\bar{C}) = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$

Como C e D são independentes então $\bar{C}$ e $\bar{D}$ também serão.

$\mathbb{P}(\bar{C}\cap\bar{D}) = \mathbb{P}(\bar{C})\cdot\mathbb{P}(\bar{D}) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8} = \dfrac{15}{64}$

d) $\mathbb{P}(\bar{C}|\bar{D}) = \dfrac{\mathbb{P}(\bar{C}\cap\bar{D})}{\mathbb{P}(\bar{D})} = \dfrac{5}{8} = \mathbb{P}(\bar{C})$

$\mathbb{P}(\bar{D}|\bar{C}) = \dfrac{\mathbb{P}(\bar{D}\cap\bar{C})}{\mathbb{P}(\bar{C})} = \dfrac{3}{8} = \mathbb{P}(\bar{D})$

$\therefore$ $\bar{C}$ e $\bar{D}$ são independentes

12) a) $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = 1/4 \therefore \mathbb{P}(K_1) = \mathbb{P}(K_2) = 3/4$

$\mathbb{P}(C_1 \text{ e } C_2) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

$\mathbb{P}(C_1|C_2) = \dfrac{\mathbb{P}(C_1 \text{ e } C_2)}{\mathbb{P}(C_2)} = \dfrac{1}{16}\cdot 4 = \dfrac{1}{4}$

b) $\mathbb{P}(C_1 \text{ e } K_2) = \mathbb{P}(C_1)\cdot\mathbb{P}(K_2) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

13) $\mathbb{P}(HIV) = \dfrac{1}{5000} = 0{,}2\cdot 10^{-3} = 0{,}0002$

$\mathbb{P}(+|HIV) = 0{,}99$ e $\mathbb{P}(-|\overline{HIV}) = 0{,}99$

$\mathbb{P}(-|HIV) = 1 - \mathbb{P}(+|HIV) = 0{,}01$

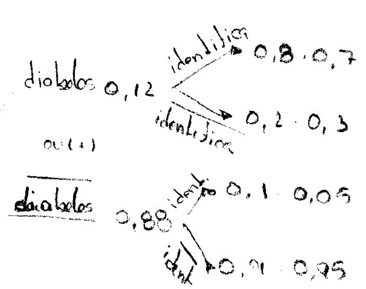
$\mathbb{P}(+|\overline{HIV}) = 1 - \mathbb{P}(-|\overline{HIV}) = 0{,}01$

$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+|HIV)\cdot\mathbb{P}(HIV) + \mathbb{P}(+|\overline{HIV})\cdot\mathbb{P}(\overline{HIV}) =$

$= 0{,}99\cdot 0{,}0002 + 0{,}01\cdot 0{,}9998 \cong 0{,}0102$

$\mathbb{P}(HIV|+) = \dfrac{\mathbb{P}(+|HIV)\cdot\mathbb{P}(HIV)}{\mathbb{P}(+)} = \dfrac{0{,}99\cdot 0{,}0002}{0{,}0102} \cong 0{,}02$

14) a) $\mathbb{P}(\text{diabetes}) = 0{,}12 \therefore \mathbb{P}(\overline{\text{diabetes}}) = 0{,}88$



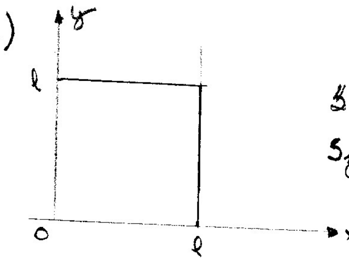
$P(\text{identifica}) = 0{,}12\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}88\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05 =$

$= 0{,}716$

b) $\mathbb{P}(+1 \text{ diabetes}) = 1 - \mathbb{P}(-1 \text{ diabetes}) =$

$= 1 - 0{,}2\cdot 0{,}3 \quad 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}9964$

16) a)



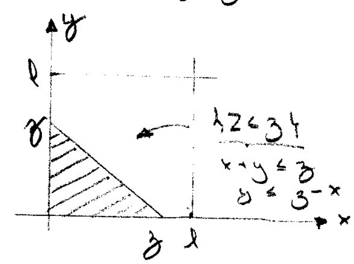
$S = [0,l]\times[0,l]$

$S_Z = [0,2l]$

$Z: S \longrightarrow S_Z$

$(x,y) \longrightarrow x+y$

b) $x + y = z \Rightarrow y = z - x$



c) $\mathbb{P}(Z\le z) =$

$= \displaystyle\int_0^z z - x\, dx =$

$= zx - \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^z =$

$= \dfrac{z^2}{2}$

17) a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c(1/2)^n = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = c\cdot\frac{1}{1-1/2} = 1 \Rightarrow$ pg infinita

$\Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = 1/2$

b) $p_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0,1,\dots \\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$

$\mathbb{P}(N\le 1) = p_N(0) + p_N(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

18) a) A área de $-\infty$ até $+\infty$ deve ser 1 mas o único local em que a área não é zero é no intervalo $[0;2]$. Portanto: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^2 f(y)\,dy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{cy^2}{2}\Big|_0^2 = 1 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$.

b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$

$\mathbb{P}(0\le y\le 1) = \displaystyle\int_0^1 f_Y(y)\,dy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

c) $\mathbb{P}(-1/2\le y\le 1/2) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} f_Y(y)\,dy = \int_{-1/2}^{0} f_Y(y)\,dy + \int_0^{1/2} f_Y(y)\,dy =$

$= 0 + \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{y}{2}\,dy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{16}$

d) $F_Y(y) = \int f_Y(y)\,dy \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 2 \\ \frac{y^2}{4}, & 0 < y < 2 \\ 0, & 0 \leq y \end{cases}$

20) a) $P(Y = y) = \begin{cases} 1/11, & \text{se } y = 5, \dots, 15 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) $P(Y < 10) = P(Y=5) + P(Y=6) + P(Y=7) + P(Y=8) + P(Y=9) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$

c) $P(Y > 12) = P(Y=13) + P(Y=14) + P(Y=15) = \frac{3}{11}$

d) $P(8 \leq Y \leq 12) = P(Y=8) + P(Y=9) + P(Y=10) + P(Y=11) + P(Y=12) = \frac{5}{11}$

19) $P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p, & \text{se } x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$P(X \leq 3) = 0{,}95 \Rightarrow p + (1-p)p + (1-p)^2 p = 0{,}95 \Rightarrow$

$\Rightarrow p + p - p^2 + p - 2p^2 + p^3 = 0{,}95 \Rightarrow p(p^2 - 3p + 3) = 0{,}95$

$\Rightarrow p = 0{,}6316$

24) $\sum_{n=1}^{n} c(n) \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow c(n) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{x}}$

$c(1) = 1$

$c(2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

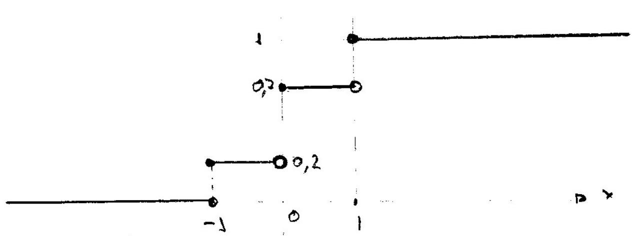
$c(3) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{11}$

$c(4) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{25}$

$c(5) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{60}{137}$

$c(6) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{147}{60}$

26) a)



b) $P(X=1) = F_X(1) - F_X(0) = 0{,}3$

$P(X=0) = F_X(0) - F_X(-1) = 0{,}5$

$P(X=-1) = 0{,}2$

$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}3, & \text{se } x = 1 \\ 0{,}5, & \text{se } x = 0 \\ 0{,}2, & \text{se } x = -1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

27) $P(N = n) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n = 1, \dots, 99 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & n = 100 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$F_N(n) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^i, & \text{se } 1 \leq n < 100 \\ 1, & \text{se } n \geq 100 \\ 0, & \text{se } n < 0. \end{cases}$

29) Para que $f_X(x)$ seja uma função densidade devemos garantir que $\begin{cases} f_X(x) \geq 0, \forall x \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$\int_0^1 ax^2 + bx = 1 \Rightarrow \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b}{2} = 1 - \frac{a}{3} \Rightarrow b = 2 - \frac{2a}{3}$

Para $x = 1$ temos: $a + b \geq 0 \Rightarrow a - \frac{2a}{3} + 2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{3} \geq -2 \Rightarrow a \geq -6$

$b \geq 0 \Rightarrow 2 - \frac{2a}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2a}{3} \leq 2 \Rightarrow a \leq 3$

28) $\int a^2 w e^{-\frac{a^2 w^2}{2}}\,dw$

$u = w^2 \Rightarrow du = 2w\,dw \Rightarrow w\,dw = \frac{du}{2}$

$\int \frac{a^2}{2} \cdot e^{-\frac{a^2 u}{2}}\,du = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2 u}{2}}}{a^2/2} = -e^{-\frac{a^2 w^2}{2}} + c$

$F_W(w) \longrightarrow 1$
$w \longrightarrow \infty$
$\therefore F_W(w) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{a^2 w^2}{2}}, & w \geq 0 \\ 0, & w < 0 \end{cases}$