Lista 1

I) a) Temos que:

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = b^n + b^{n-1}a + \dots + ba^{n-1} + a^n =$$

$$= b^n(1 + b^{-1}a + b^{-2}a^2 + \dots + b^{-n}a^n) < (n+1)b^n$$

b) $$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n \Rightarrow b^{n+1}-a^{n+1} < (b-a)(n+1)b^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{n+1} > b^{n+1} - b^n(b-a)(n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{n+1} > b^n[b-(b-a)(n+1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{n+1} > b^n[b+(a-b)(n+1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{n+1} > b^n[(n+1)a - nb].$$

c) $a^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$; $b^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n [\cancel{n}+1+\cancel{1}-\cancel{n}-\cancel{1}] \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

crescente

d) $$1 > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \left[n+1-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \left[\cancel{n}+1-\cancel{n}-\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2 > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

e) Do item b) provamos que a sequência é crescente para todo $n \in \mathbb{N}$ e do item c) temos que a sequência é limitada superiormente por 4. Assim, concluímos que a sequência converge e, portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

II) Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Também temos $a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

$\Rightarrow a \le \lim_{n\to\infty} c_n \le a$. Do Teorema do Confronto temos que $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, $\forall n > N$, com $n, N \in \mathbb{N}$.

III) 1) O termo geral é $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \therefore \{a_n\}$ converge para 1

2) Os termos gerais são $a_{2n+1} = 1$, $a_{2n} = \frac{1}{2n}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1 \\ \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0\end{array}\right\}$$ a sequência diverge

3) Os termos gerais são $a_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{2^n} - 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_{2n} = -1\end{array}\right\}$$ $\{a_n\}$ diverge.

4) $$\lim_{n\to\infty} \left(4+\frac{1}{n}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} 4+\frac{1}{n}\right)^{1/2} = (4)^{1/2} = 2.$$

5) $$c_k = \frac{\sqrt{k}+1}{k-1} \cdot \frac{(\sqrt{k}-1)}{(\sqrt{k}-1)} = \frac{(\cancel{k-1})}{(\cancel{k-1})(\sqrt{k}-1)} = \frac{1}{\sqrt{k}-1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1} = 0 \therefore \{c_k\}$ converge para 0, $\forall k \ge 2$

6) $$a_n = \frac{\cancel{n^3}(1+3/n^2+1/n^3)}{\cancel{n^3}(4+2/n)} = \frac{(1+3/n^2+1/n^3)}{(4+2/n)}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+3/n^2+1/n^3)}{(4+2/n)} = \frac{1}{4} \therefore \{a_n\}$ converge para 1/4

7) $$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge para 0.

8) $$a_n = \frac{\cancel{n}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{\cancel{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}\right]} = \frac{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{\left[1-\frac{(-1)^n}{n}\right]}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]}{\left[1-\frac{(-1)^n}{n}\right]} = 1 \therefore \{a_n\}$ converge para 1.

9) $$a_n = \frac{4n^2-(n+1)^2}{2n(n+1)} = \frac{4n^2-n^2-2n-1}{2n^2+2n} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}(3-2/n-1/n^2)}{2\cancel{n^2}(1+1/n)} = \frac{(3-2/n-1/n^2)}{2(1+1/n)}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \therefore \{a_n\}$ converge para 3/2

10) $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} =$

$= \dfrac{n(n^2+1-n^2)}{\left(\sqrt{n^2(1+1/n^2)}+n\right)} = \dfrac{n}{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\right)} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2} \therefore \{a_n\}$ converge para $1/2$.

11) $-1 \le sen(n) \le 1 \to -\dfrac{1}{n} \le \dfrac{sen(n)}{n} \le \dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \to$

$\to 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n} \le 0$

Pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n} = 0 \therefore$

$\{a_n\}$ converge para 0.

12) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} sen(n)$ não existe $\therefore \{a_n\}$ diverge

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} sen(\pi n) = 0 \therefore \{b_n\}$ converge para 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} sen(n\pi) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} sen\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2}\right] \text{ não existe} \end{array}\right\} \{c_n\} \text{ diverge.}$$

13) $a_n = \dfrac{\cancel{n}(2+sen(n)/n)}{\cancel{n}(5+1/n)} = \dfrac{(2+sen(n)/n)}{5+1/n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+\overset{\to 0}{sen(n)/n})}{5+1/n} = \dfrac{2}{5} \therefore \{a_n\}$ converge.

14) $a_n = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n! - n!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!} = \dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\dfrac{[(n+3)(n+2)(n+1)-1]}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\cancel{(n+3)}\cancel{(n+2)}\cancel{(n+1)}}{(n+4)\cancel{(n+3)}\cancel{(n+2)}\cancel{(n+1)}} - \dfrac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+4} - \dfrac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}\right] = 0 \therefore$

$\{a_n\}$ converge.

15) Seja $f(x) = \sqrt[x]{x^2+x}$ tal que $f(n) = \sqrt[n]{n^2+n} = a_n$. O limite $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2+x}$ existe, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$f(x) = (x^2+x)^{1/x} = e^{\ln(x^2+x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x^2+x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+x)}{x} \overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^0 = 1 \therefore \{a_n\}$ converge

16) $a_n = \dfrac{n\, sen(n!)}{n^2+1} = \dfrac{\cancel{n}\, sen(n)}{n^2(1+1/n^2)} = \dfrac{sen(n!)}{n+1/n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n+1/n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{sen(n!)}_{\text{limitada}} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge.

17) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n+10^n} = \dfrac{\cancel{10^n}\, 0{,}3^n}{\cancel{10^n}(0{,}2^n+1)} = \dfrac{0{,}3^n}{0{,}2^n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0{,}3^n}{0{,}2^n+1} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge

18) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \therefore \{a_n\}$ converge

19) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \dfrac{\cancel{n^n}(1+1/n)^n}{\cancel{n^n}\cdot n} = \dfrac{(1+1/n)^n}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+1/n)^n}{n} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge.

20) se $a \ge 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n a^n = +\infty \therefore \{a_n\}$ diverge

se $a \le -1$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 2n\, a^{2n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)\, a^{(2n+1)} = -\infty \end{array}\right\} \therefore \{a_n\} \text{ diverge}$$

se $-1 < a < 1$:

Seja $f(x) = x|a|^x$ tal que $f(n) = a_n = n|a|^n$. O limite de f existe, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\lim\limits_{x\to\infty} x|a|^x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1/|a|^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{|a|^{-x}} \overset{LH}{=}$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{-|a|^{-x}\ln(|a|)} = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{|a|^{x}}{\ln|a|} = 0$

$\therefore \{a_n\}$ converge

21) $0 \le \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n} \le \dfrac{1}{n} \therefore \lim\limits_{n\to\infty} 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$

Pelo Teorema do Confronto: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n} = 0 \therefore$

$\{a_n\}$ converge

22) $a_n = n - n^2 sen\, 1/n = n(1 - n\, sen(1/n)) =$

$= n\left(1 - \dfrac{sen(1/n)}{1/n}\right)$

$k = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{sen(1/n)}{1/n}\right) = \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{sen k}{k}\right) =$

$= \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{k - sen k}{k^2} \overset{LH}{=} \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{1-\cos k}{2k} \overset{LH}{=} \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{sen k}{2} = 0$

$\therefore \{a_n\}$ converge

por 2. Novamente, é trivial que $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Suponha que $a_n < 2$. Então: $2a_n < 4 \Rightarrow \sqrt{2a_n} < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} < 2$, com $a_n > 0$.

Como a sequência é monótona e crescente então ela converge.

Quando $n \to \infty$, temos

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \Rightarrow L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 - 2L = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow L = 2$ ou $L = 0$ (não serve, pois, a sequência é crescente)

3) Mostraremos que a sequência é crescente através do Princípio da Indução. Trivialmente, percebemos que $x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Suponha $x_{n-1} < x_n$. Então $x_{n-1} + 2 < x_n + 2 \Rightarrow \sqrt{x_{n-1}+2} < \sqrt{x_n + 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n < x_{n+1}$, com $n \geq 2$ e $x_n, x_{n-1} > 0$.

Novamente, pelo Princípio da Indução mostraremos que a sequência é limitada superiormente por 2. Vemos que $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Suponha $x_n < 2$. Então: $x_n + 2 < 4$ $\Rightarrow \sqrt{x_n + 2} < 2 \Rightarrow x_{n+1} < 2$, com $n \geq 2$ e $x_n > 0$.

A sequência é limitada e monótona, logo ela é convergente.

Temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \Rightarrow L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 - L = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow (L-2)(L+1) = 0$$

$$L = 2 \text{ ou } L = -1 \text{ (não serve)}$$

VIII) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $\frac{a_n}{10^n} > 0$

Pelo teste da razão: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{a_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{\cancel{10^n}\,10} \cdot \frac{\cancel{10^n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{10a_n}$. Como a sequência $\{a_n\}$ só vai até 9 então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{10a_n} < 1$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge.

XI) 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} \cdot 2^n = \infty$. Logo, pelo Teste do Termo Geral, a série é divergente.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[(-t^{1/2})\right]^k$. Trata-se de uma PG de razão $-t^{1/2}$ e $a_1 = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-t^{1/2})^k = \frac{1}{1+t^{1/2}} = \frac{1}{1+\sqrt{t}} \text{ é converge.}$$

3) Note que $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ é uma PG de razão u e $a_1 = 1$, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$ é convergente.

Também, $\sum_{n=0}^{\infty} (u^2)^n$ é uma PG de razão u^2 e $a_1 = 1$, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} (u^2)^n = \frac{1}{1-u^2}$ é convergente.

Como ambas as séries são convergentes vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n + u^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n) =$$

$= \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-u^2}$ que é convergente.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen}^2 x)^n$. Como $|x| < \pi/2$ então $|\operatorname{sen} x| < 1$.

Trata-se de uma PG com razão $\operatorname{sen}^2 x$ e $a_1 = 1$.

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen}^2 x)^n = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ é convergente.

6) Dado $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{n}{j}$, para $n, j \geq 1$ então, pelo Teste da Comparação, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}$ diverge.

7) $x_{2n+1} = \cos[(2n+1)\pi/2] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos[(2n+1)\pi/2] = 0$

$x_{2n+2} = \cos[(2n+2)\pi/2] \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \cos[(2n+2)\pi/2]$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Pelo Teste do Termo Geral $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ não converge.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$

Dado $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ tal que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$, para $n \geq 1$ temos que, pelo Teste de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ diverge, já que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

23) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n} \therefore \nexists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \{a_n\}$ diverge

não existe

24) Seja $f(x) = \sqrt[x]{a^x+b^x}$ tal que $f(n) = a_n$. O limite de f existe então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x+b^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(a^x+b^x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(a^x+b^x) \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x\ln(a)+b^x\ln(b)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (a/b)^x \ln(a) + \ln(b) = \ln(b) \qquad \lim_{x\to\infty} e^{1/x\,\ln(a^x+b^x)} =$$

$$= e^{\ln(b)}$$

28) $a_n = n^{1/n} = e^{\ln(n)^{1/n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$

Seja $f(x) = \sqrt[x]{x}$ tal que $f(n) = a_n$. O limite de f existe, então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Mas, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Portanto,

$\lim_{x\to\infty} e^0 = 1 \therefore \{a_n\}$ converge.

25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge

26) $a_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2\cancel{2}}\,\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-2)(n)}{(n-1)^2}\,\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \{a_n\}$ converge.

30) Seja $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^a}$ tal que $f(n) = a_n$. O limite de f existe então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} =$$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^a} = 0 \therefore \{a_n\}$ converge

32) $a_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = a^0 = 1 \therefore \{a_n\}$ converge

33) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Seja $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ tal que $f(n) = a_n$. O limite de f existe então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \quad k=-x$$

$$= \lim_{k\to-\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \left[\lim_{k\to-\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1}$$

$\therefore \{a_n\}$ converge.

34) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{x^{-2}} \overset{LH}{=}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\;\frac{-1}{(-2)x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^3}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

$\therefore \{a_n\}$ diverge

36) $a_n = \left[\frac{3\cancel{n}(1+5/3n)}{5\cancel{n}(1+11/5n)}\right]^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{3n/5}\right)}{\left(1+\frac{1}{5n/11}\right)}\right]^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{3n/5}\right)^{\frac{3n}{5}\cdot\frac{5}{3}} \to e^{5/3}}{\left(1+\frac{1}{5n/11}\right)^{\frac{5n}{11}\cdot\frac{11}{5}} \to e^{11/5}} = 0 \therefore \{a_n\} \text{ converge.}$$

37) $a_n = \left(\frac{1+5/3n}{1+1/5n}\right)^n \left(\cancel{\frac{3}{3}}\right)^n\left(\cancel{\frac{5}{5}}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{3n/5}\right)^{\frac{3n}{5}\frac{5}{3}}}{\left(1+1/5n\right)^{5n\frac{1}{5}}} = \frac{e^{5/3}}{e^{1/5}} = e^{5/3-1/5} = e^{\frac{22}{15}}$$

$\therefore \{a_n\}$ converge.

V) 1) $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$

Como a função f é contínua em A então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(a) = a.$$

2) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

Mostraremos que a sequência é crescente através do Princípio da Indução. Trivialmente percebemos que $a_1 = \sqrt{2} < a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Suponha que $a_{n-1} < a_n$. Então $2a_{n-1} < 2a_n \Rightarrow \sqrt{2a_{n-1}} < \sqrt{2a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$, já que $a_{n-1}, a_n > 0$.

Agora, vamos mostrar que a sequência é limitada.

9) A série $\sum_{k=1}^{\infty} k$ diverge pelo Teste do Termo Geral. Como $k \leq \frac{1}{\operatorname{sen} k}$, para $k \geq 1$, então pelo Teste de Comparação, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sen} k}$ diverge.

10) $\lim_{s \to \infty} \cos(1/s) = 1$ Logo, pelo Teste do Termo Geral, $\sum_{s=1}^{\infty} \cos(1/s)$ diverge

11) A série harmônica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge pelo Teste da Integral. Como $\frac{1}{k} \leq \frac{2+\cos k}{k}$, para $k \geq 1$, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$ diverge

XII) 1) Seja $y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} = 1$$

Pelo Teste de Comparação no Limite, como $\sum_{n=3}^{\infty} y_n$ diverge então $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ diverge.

2) Seja $y_n = 1/n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\cancel{n^2}} \cancel{n^2} = \frac{\pi}{2}$$

Pelo Teste de Comparação no Limite, como $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge então $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$

3) Seja $y_n = 1/n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}/\cancel{n^2}}{1/\cancel{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1$$

Novamente, pelo Teste da Comparação no Limite, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ converge.

4) $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{[(n+1)!]^4} \cdot \frac{(n!)^4}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}\, 2}{(n+1)^4 \cancel{(n!)^4}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^4}}{\cancel{2^n}} =$$

$$= \frac{2}{(n+1)^4}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)^4} = 0$ ∴ Pelo Teste da Razão, a série dada converge.

5) $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{(n!)^2}}{(n+1)^2\,\cancel{(n!)^2}\,\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+2n+4n+2}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = \frac{\cancel{n^2}(4+6/n+2/n^2)}{\cancel{n^2}(1+2/n+1/n^2)}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(4+6/n+2/n^2)}{(1+2/n+1/n^2)} = 4$ Pelo Teste da Razão, a série dada diverge.

6) Note que a função linear "cresce mais rápido" que a função logarítmica.

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é contínua, positiva e decrescente

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Big|_2^{\infty} = \infty$$

$u = \ln x$ ∴ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ $\int u\,du = (\ln x)^2$

Pelo Teste da Integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge

7) Seja $y_n = 1/n^{\alpha}$, $\alpha > 1$ e $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\ln n}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim n^{\alpha - \ln(n)} =$$

$$= \lim e^{\underbrace{(\alpha - \ln(n))}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\ln(n)}_{\to \infty}} = 0.$$

Como $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge, pelo Teste da Comparação no Limite, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ converge

8) $$x_n = \frac{n^{1/3}\sqrt[3]{1+2/n}}{n^{3/4}\sqrt[4]{1+3/n^3}\; n^{3/5}\sqrt[5]{1+5/n^3}} =$$

$$= \frac{n^{1/3}\sqrt{1+2/n}}{n^{27/20}\sqrt[4]{1+3/n^3}\sqrt[5]{1+5/n^3}}$$

Seja $y_n = \frac{n^{1/3}}{n^{27/20}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2/n}}{\sqrt[4]{1+3/n^3}\sqrt[5]{1-5/n^3}} = 1$$

Note que $y_n = \frac{1}{n^{27/20 - 1/3}} < \frac{1}{n^1}$ Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge. Pelo Teste de Comparação no Limite, a série dada também converge

9) Seja $y_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\cos 1/n)}{1/n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\cos 1/x)}{1/x^2} \overset{LH}{=}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2 \operatorname{sen} 1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}\cdot \operatorname{sen} 1/x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = \frac{1}{2}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge. Pelo Teste de Comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ converge.

10) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)} = 0$

Pelo Teste da Raiz, a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ converge.

11) Note que a função quadrática cresce mais rápido que a função logarítmica.

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ é contínua, positiva e decrescente.

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} - \frac{\ln a - 1}{a} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 2 + 1}{2} =$$

$g(x) = \ln(x) \to g'(x) = 1/x$

$h'(x) = x^{-2} \to h(x) = -1/x$ $\quad \int \frac{\ln x}{x^2} =$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-\ln x - 1}{x}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-\ln a - 2}{a} + \frac{\ln 2 + 2}{2} \overset{LH}{=} \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} = 0$$

Pelo Teste da Integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^p}$ é contínua, positiva e decrescente

$g(x) = \ln x \to g'(x) = \frac{1}{x}$

$h'(x) = \frac{1}{x^p} \to h(x) = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}$, se $p \neq 1$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^p}dx = \frac{\ln x}{(1-p)x^{p-1}} - \int\frac{1}{(1-p)x^p}dx =$$

$$= \frac{\ln x}{(1-p)x^p} + \frac{1}{(1-p)^2 x^{p-1}}$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{\ln x}{x^p}dx = \lim_{a\to\infty}\frac{\ln a}{(1-p)a^p} - \frac{1}{(1-p)^2 a^{p-1}} -$$

$$-\frac{\ln 2}{(1-p)2^p} + \frac{1}{(1-p)^2 2^{p-1}}$$

Se $p>1$: $\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{\ln x}{x^p}dx = -\underbrace{\frac{\ln 2}{(1-p)2p}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{(1-p)^2 2^{p-1}}}_{>0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a série converge

Se $p<1$: $\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{\ln x}{x^p}dx = +\infty \Rightarrow$ a série diverge

Se $p=1$: $\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{a\to\infty}(\ln x)^2\Big|_2^a = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a série diverge

13) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n^p)}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} n^p \ln(1+1/n^p) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^{n^p} = e$$

Pelo Teste da Comparação no limite a série converge se $p>1$ e diverge se $p\le 1$.

14) Seja $y_n = 1/\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,\ln(1+1/n)}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{n^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{x^{-1}} \overset{LH}{=}$$

$$\overset{LH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x^{-2}}}{-\left(1+\frac{1}{x}\right)\cancel{x^{-2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ diverge. Logo, pelo Teste da Comparação no limite, a série dada diverge.

15) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!\,3^n} =$

$$= \frac{(\cancel{n+1})\cancel{n!}\,\cancel{3^n}\,3}{(n+1)^n(\cancel{n+1})}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}\,\cancel{3^n}} = \frac{3\,n^n}{(n+1)^n} =$$

$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \frac{3}{e}$

Pelo Teste da Razão, a série diverge.

16) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,e^n} =$

$= \frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{e^n}\,e}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\,\cancel{e^n}} = \frac{e\,n^n}{(n+1)^n}$

Seja $y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Temos que y_n cresce para e quando $n \to \infty$. Já $\frac{1}{y_n}$ decresce para e quando $n \to \infty$. Portanto, $\frac{e}{y_n}$ decresce para 1 quando $n \to \infty$. Assim, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

Pelo Corolário do Teste da Razão, a série diverge

17) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{e^{1/k}}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{1/k^2}}{k} = 0$

Pelo Teste da Raiz, a série converge

18) Seja $y_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 3^n \cdot n \left(\overbrace{\frac{1}{1+1/n}}^{1/e}\right)^n \left(\overbrace{\frac{1}{1+1/n}}^{1/e}\right)^n$

$= \infty$

Como a série $\sum y_n$ diverge então, pelo Teste da Comparação no Limite, a série dada diverge

19) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{(\ln 2)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{\ln 2} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{3}{n}\ln n}}{\ln 2} =$

$= \frac{1}{\ln 2}$

(*) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}\ln x \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$

Pelo Teste da Raiz, a série converge

XIII)

1) $y_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$|y_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} = |y_n|$ Pelo Teste da Comparação, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ diverge

Note que $\{x_n\}$ é decrescente e $\lim x_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Portanto, pelo Teste de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente.

2) $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge pelo Teste da Integral (é uma série harmônica generalizada com expoente maior que 1). Como a série converge absolutamente então a série converge.

3) $|y_n| = \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ e $x_n = \frac{n^2}{n^3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+3} \cdot \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(2+1/n^2)\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}(1+3/n^3)\cancel{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n^2}{1+3/n^3} = 2$

Como sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, pelo Teste de Comparação no Limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ diverge.

Seja $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3}$, com $f(n) = |y_n|$ e $x \geq 1$

$f'(x) = \frac{4x(x^3+3) - (2x^2+1)3x^2}{(x^3+3)^2} =$ plotar o gráfico!

$= \frac{4x^4+12x-6x^4-3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{-2x^4-3x^2+12x}{(x^3+3)^2} < 0$

$\Leftrightarrow -2x^3 - 3x + 12 < 0 \Leftrightarrow x > 1{,}55 \Leftrightarrow n \geq 2$

$\lim_{n\to\infty} |y_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+1/n^2)}{n^3(1+3/n^3)} = 0$

Pelo Teste de Leibniz a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge condicionalmente, com $n \geq 2$.

4) Seja $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$, com $f(n) = |y_n|$ e $x \geq 2$

$f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ para todo $x \geq 2 \Rightarrow \{|y_n|\}$ é decrescente para todo $n \geq 2$

$\lim_{n\to\infty} |y_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$

Pelo Teste de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge. Devemos verificar se ela converge absolutamente

$\lim_{n\to\infty} \frac{1/\ln(n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} \stackrel{LH}{=}$

$\stackrel{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$

Pelo Teste da Razão no Limite, a série $\sum_{n=2}^{\infty} |y_n|$ diverge, pois, sabemos que $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ diverge.

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge condicionalmente

5) Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, com $f(n) = |y_n|$ e $n \geq 2$

$f'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e \Rightarrow \{|y_n|\}$ é decrescente para $n \geq 3$.

$\lim |y_n| = \lim \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Pelo Teste de Leibniz a série $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge. Vamos utilizar o Teste da Integral para ver se ela converge absolutamente.

$\lim_{t\to\infty} \int_3^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_3^t =$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2 - (\ln 3)^2}{2} = \infty \therefore$ a série $\sum_{n=3}^{\infty} y_n$ converge condicionalmente

6) Seja $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, com $f(n) = x_n = |y_n|$ e $x \geq 2$.

$f'(x) = -x^{-2}(\ln x)^{-2} - 2x^{-1} x^{-1} (\ln x)^{-3} =$

$= -\frac{1}{x^2(\ln x)^2} - \frac{2}{x^2(\ln x)^3}$ é sempre menor que zero para $x \geq 2 \therefore \{x_n\}$ decresce para $n \geq 2$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = 0$

Pelo Teste de Leibniz, a série $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge

$\lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t u^{-2}\,du = \lim_{t\to\infty} \left.-\frac{1}{\ln x}\right|_2^t =$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln t} = \frac{1}{\ln(2)} \therefore$ a série $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$ converge absolutamente

7) $\lim_{n\to\infty} y_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \stackrel{LH}{=}$

$\stackrel{LH}{=} \lim_{x\to\infty} -\frac{x^{-1/2}}{2\,1/x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\sqrt{x}}{2} = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} y_{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$

Como $\nexists \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow$ a série diverge.

8) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = |y_n|$

$\sqrt{n} \leq n$, para $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, para $n > 1$.

Como sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, então, pelo Teste de Comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ diverge.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, com $f(n) = x_n$ e $n \geq 1$.

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow$

$\{x_n\}$ é decrescente $\forall n \geq 1$.

$\lim x_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pelo Teste de Leibniz a série converge condicionalmente.

9) $x_n = \operatorname{sen}(1/n^p)$ e $|y_n| = |\operatorname{sen}(1/n^p)|$

$|\operatorname{sen}(1/n^p)| \leq 1/n^p$. Pelo Teste de Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ converge se $p > 1$, pois, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge.

Como há convergência absoluta se $p > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, para $p > 1$.

Agora para o caso em que $0 < p \leq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\operatorname{sen}(1/n^p)|}{1/n^p} = 1 \Rightarrow \text{a série } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \text{ diverge se } 0 < p \leq 1.$$

Seja $f(x) = \operatorname{sen}(1/x^p)$, com $f(n) = x_n$, $n \geq 1$ e $0 < p \leq 1$.

$$f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} \cdot \cos(1/x^p) < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ é decrescente para $n \geq 1$.

$$\lim x_n = \lim \operatorname{sen}(1/n^p) = 0$$

Pelo Teste de Leibniz, a série converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$

10) Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, com $f(n) = x_n$ e $n \geq 2$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow 1 < 2\ln x \Leftrightarrow x > e^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_n\}$ é decrescente para $n \geq 2$.

$$\lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \Big|_2^t =$$

$h(x) = \ln x \therefore h'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{x^2} \therefore g(x) = -\frac{1}{x}$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

$$= \lim_{t \to \infty} -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

Neste caso é fácil de ver que se a série converge ela obrigatoriamente converge absolutamente. Então, pelo Teste da Integral, a série converge absolutamente.

11) Pelo Teste da Comparação do Limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty} \ln(n) = \infty \Rightarrow \text{a}$$

série $\sum_{n=1} |y_n|$ diverge.

Seja $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, com $f(n) = x_n$ e $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0$$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e \Rightarrow$

$\{x_n\}$ é decrescente para $n \geq 3$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{x^{-1/2}}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^{1/2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Pelo Teste de Leibniz, a série converge condicionalmente.

XV)

4) $$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)!\,|x^{n+1}|}{n!\,|x^n|} = \frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{|x^n|}\,|x|}{\cancel{n!}\,\cancel{|x^n|}} = |x|(n+1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |x| \lim_{n \to \infty} (n+1)$$

Se $|x| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (n+1) = \pm\infty$ a série diverge.

Se $|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n = 0 \therefore$ a série converge.

6) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|y_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n \operatorname{sen} x}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^{\operatorname{sen} x}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\operatorname{sen} x}}$$

Pelo Teste da Razão no Módulo:

Se $\frac{1}{e^{\operatorname{sen} x}} < 1 \Rightarrow e^{\operatorname{sen} x} > 1 \Rightarrow e^{\operatorname{sen} x} > e^0$

$\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi \therefore$ a série converge se $\frac{1}{e^{\operatorname{sen}x}} = 1 \Rightarrow e^{\operatorname{sen}x} = e^0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = 0$.

Então $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$

$\therefore$ a série diverge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\operatorname{sen}x} \begin{cases} \text{converge se } x \in (2k\pi, 2k\pi+\pi) \\ \text{diverge se } x \in \mathbb{R}/(2k\pi, 2k\pi+\pi) \end{cases}$$

7) $\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = \frac{2n+3}{(n+2)^5} \cdot |x^{2n+2}| \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot \frac{1}{|x^{2n}|} =$

$= \frac{2n+}{(n+2)^5} \cdot \cancel{|x^{2n}|}|x|^2 \cdot \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot \frac{1}{\cancel{|x^{2n}|}} =$

$= \frac{2n+3}{2n+1} \frac{(n+1)^5}{(n+2)^5} \cdot x^2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = x^2 \lim \frac{(2n+3)}{(2n+1)} \frac{(n+1)^5}{(n+2)^5} =$

$= x^2 \lim \frac{(2+3/n)}{(2+1/n)} \frac{(1+1/n)^5}{(1+2/n)^5} = x^2$

Pelo Teste da Razão no Módulo:

se $x^2 < 1$: $-1 < x < 1 \Rightarrow$ a série converge

se $x^2 > 1$ $\therefore$ $x > 1$ ou $x < -1 \Rightarrow$ a série diverge

se $x^2 = 1$ $\therefore$ $x = 1$ ou $x = -1$

para $x = 1$: TCL

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}$, $y_n = \frac{n}{n^5}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2+1/n)}{n^{\cancel{5}}(1+1/n)^5} \frac{\cancel{n^5}}{\cancel{n}} = 2$. Como $\sum 1/n^4$ converge, pelo Teste de Comparação no Limite, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}$ converge.

para $x = -1$:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}$

A série converge para $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n} \begin{cases} \text{converge, se } x \in [-1, 1] \\ \text{diverge, se } x \in \mathbb{R}/[-1, 1] \end{cases}$$