

1) Integrais Duplas:

Propriedades (valem também para integrais triplas): suponha que $\exists \iint_D f dx dy, \iint_D g dx dy$.

$$(1) \iint_D f + g dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy$$

$$(2) \lambda \in \mathbb{R}: \iint_D \lambda f dx dy = \lambda \iint_D f dx dy$$

$$(3) f > 0 \text{ em } D \Rightarrow \iint_D f dx dy \geq 0$$

$$(3.1) f > g \text{ em } D \Rightarrow \iint_D f dx dy > \iint_D g dx dy$$

$$(3.2) \iint_D |f| dx dy \geq \left| \iint_D f dx dy \right|$$

$$(3.3) \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ com } \alpha \leq f(x, y) \leq \beta \text{ em } D \Rightarrow \\ \rightarrow \alpha A(D) \leq \iint_D f dx dy \leq \beta A(D).$$

Interpretações para a integral: (1) Volume

(2) D := placa plana, f := densidade, então $\iint_D f(x, y) dx dy$ é a massa da placa.

(3) $f = 1$ \Rightarrow soma de áreas $\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy$

Teorema: f é contínua e D convexa por caminhos $\Rightarrow \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ tal que $\iint_D f dx dy = f(\bar{x}, \bar{y}) A(D)$.

Domínio de Integragão: são conjuntos $D \subset \mathbb{R}^2$ limitados tais que $\exists \iint_D dx dy = A(D)$, ou seja, são domínios que tem área. Os domínios D que têm área são aqueles cuja fronteira ∂D tem área zero, i.e.,

$$A(D) = \iint_D dx dy = 0.$$

Teorema: se $\exists \iint_D f dx dy$ $\Rightarrow f$ é limitado em D .

Teorema (Cribório de Integragabilidade): se $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e

(1) é limitada em D

(2) o conjunto de descontinuidades em D tem área 0 $\Rightarrow \exists \iint_D f dx dy$

Corolário: f é contínua em D (domínio de integragão) fechado $\Rightarrow f$ é integrável em D

Teorema (Fubini): sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, com f contínua em Ω . Suponhamos que:

$$(1) \exists \iint_{\Omega} f \, dx \, dy$$

$$(2) \exists A(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy \Rightarrow \iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_c^d A(y) \, dy$$

$$(3) \exists \int_c^d A(y) \, dy$$

Teorema (Fubini Caso Geral): sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f contínua, $\Omega = h(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

$\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos que:

$$(1) \exists \iint_{\Omega} f \, dx \, dy$$

$$(2) \exists B(y) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \Rightarrow \iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f \, dy \right) dx$$

$$(3) \exists \int_a^b B(y) \, dx$$

Teorema (Função Inversa): sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^1$ e não nula. e $(u_0, v_0) \in \Omega$. Então se $D\phi$ for inversível ou $\det(D\phi) \neq 0$, ϕ é localmente inversível.

Teorema: seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em Ω_{xy} (domínio de integração). Seja $\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como acima e $\Omega_{uv} \subset \Omega$ tal que $\phi(\Omega_{uv}) = \Omega_{xy}$. Suponhamos que ϕ não é bijetora e $J\phi = 0$ no máximo num conjunto de área 0 em Ω_{uv} . Então:

$$\iint_{\Omega_{xy}} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega_{uv}} f(\phi(u, v)) \cdot J\phi \, du \, dv$$

Coordenadas Polares:

$$r, \theta, \text{ com } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

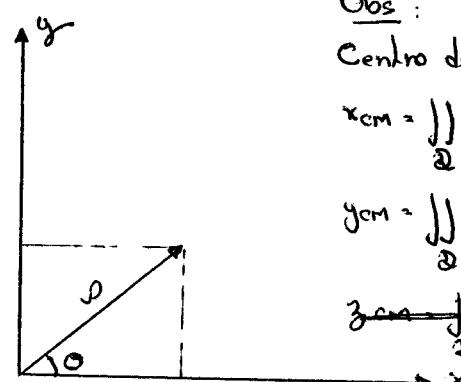
$$D\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det D\phi = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$\Omega = \{r \geq 0, \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi\}$$

Obs.:

Momento de Inércia: $I_E = \iint_D s d^2((x, y), E) \, dx \, dy$.



Obs.:

Centro de Massa:

$$x_{cm} = \iint_D \frac{x \phi}{m} \, dx \, dy,$$

$$y_{cm} = \iint_D \frac{y \phi}{m} \, dx \, dy,$$

~~$$z_{cm} = \iint_D \frac{z \phi}{m} \, dx \, dy.$$~~

2) Integral Triple

Domínio de integração: Ω é domínio de integração se $\exists \iiint_{\Omega} f dx dy dz$, ou seja, os domínios que têm volume.
Os domínios que têm volume são aqueles que $\iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = 0$.

Teorema (Criterio de Integridade): Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) se f é limitada em Ω

$$\Rightarrow \exists \iiint_{\Omega} f dx dy dz$$

(2) se o conjunto de descontinuidades de f em Ω tem volume 0

Corolário: se Ω (domínio de integração) é fechado e f é contínua em Ω então existe $\iiint_{\Omega} f dx dy dz$.

Teorema (Fubini): Sejam $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e Ω domínio de integração com $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ e

$\varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$, onde $\varphi_1, \varphi_2: D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Se:

$$(1) \exists \iiint_{\Omega} f dx dy dz$$

$$(2) \exists A(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z) dz, \forall (x,y) \in D_{xy} \Rightarrow \iiint_{\Omega} f dx dy dz = \iint_{D_{xy}} A(x,y) dx dy$$

$$(3) \exists \iint_{D_{xy}} A(x,y) dx dy$$

Teorema (Fubini Caso Geral): $f, \Omega, \varphi_1, \varphi_2$ como acima e $D_{xy} = h(x) : a \leq x \leq b, \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}$. Então

$$\iint_{D_{xy}} A(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} A(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx = \iiint_{\Omega} f dx dy dz.$$

Mudança de Coordenadas:

$$\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

$$D\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}, \quad J\phi = \det(D\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

Teorema (Função Inversa): se ϕ como acima e $\phi(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$ inversível ou $J\phi(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0) \neq 0$ então

Existe uma bola $(\phi(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0), r)$ onde ϕ é inversível.

Teorema: seja ϕ como acima, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em D_{xyz} . Seja $D_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(D_{uvw}) = D_{xyz}$. Se ϕ for injetiva $\Rightarrow J\phi \neq 0$ em D_{uvw} , exceto talvez num conjunto de volume zero, temos:

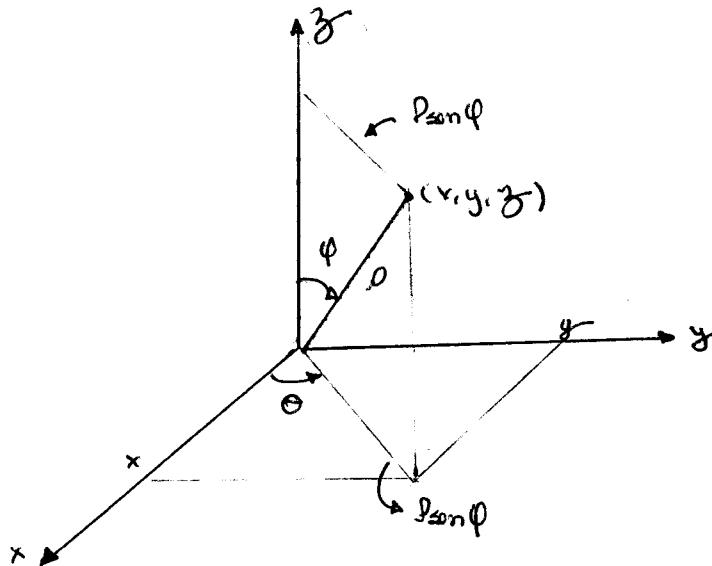
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(\phi(u,v,w)) \cdot |\partial\phi| du dv dw$$

Coordenadas Esféricas (com centro $(0,0,0)$ e eixo \hat{z})

$$(\rho, \theta, \varphi), \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \phi : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho, 0 \leq \theta \leq \alpha + 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi$$



Coordenadas Cilíndricas:

$$\phi : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, D\phi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$dV = D$$

