CATALOG

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Segunda Prova — 13/05/2019

IDENTIFICAÇÃO

**Nome:** _____ **NUSP:** _____ **Turma:** _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h30min.
4. As questões dissertativas podem ser feitas a tinta (azul ou preta) ou a lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
8. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
10. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

**Assinatura:** _____

BOA PROVA!

**Teste 1** [afirms1] Assinale a alternativa cuja afirmação é verdadeira.

■ Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f$ não possui pontos críticos, então $f$ não possui extremos globais.

B Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer tal que $f(1)f(-1) < 0$, então existe $c \in ]-1,1[$ tal que $f(c) = 0$.

C Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f$ é derivável em $]-1,1[$ e $f(1) = f(-1) + 1$, então existe $c \in ]-1,1[$ tal que $f'(c) = 1$.

D Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável e $c \in ]-1,1[$ é o único ponto crítico de $f$, então $c$ é extremo global de $f$.

E Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]-1,1[$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in ]-1,1[$.

***Solução:*** A) Verdadeira. Se existisse $c \in ]-1,1[$ ponto de extremo global de $f$ então $c$ seria ponto de extremo local de $f$, já que $]-1,1[$ é intervalo aberto. Como $f$ é derivável, teríamos $f'(c) = 0$, isto é, $c$ seria ponto crítico.
B) Falsa. Por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 1; \\ -1, \text{ se } -1 \le x < 0. \end{cases}$
C) Falsa. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$.
D) Falsa. Por exemplo, $f(x) = x^3$.
E) Falsa. Por exemplo, $f(x) = 2x + 1$.

**Teste 2** [afirms2] Assinale a alternativa cuja afirmação é verdadeira.

■ Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada contínua, $c \in ]-1,1[$ é o único ponto crítico de $f$ e $c$ é ponto de mínimo local de $f$ então $c$ é ponto de mínimo global de $f$.

B Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada contínua, tal que $f$ possui pontos críticos, então $f$ possui extremos locais.

C Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer tal que $f(1)f(-1) < 0$, então existe $c \in ]-1,1[$ tal que $f(c) = 0$.

D Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f$ é derivável em $]-1,1[$ e $f(1) = f(-1) + 1$, então existe $c \in ]-1,1[$ tal que $f'(c) = 1$.

E Se $f\colon ]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]-1,1[$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in ]-1,1[$.

***Solução:*** A) Verdadeira. Observe que $f'(x) < 0$, se $x < c$ e $f'(x) > 0$, se $x > c$. (De fato, se existisse $b \in ]-1,c[$ com $f'(b) > 0$ então, pelo TVI, existiria $d \in ]b,c[$ tal que $f'(d) = 0$, isto é, existiria outro ponto crítico de $f$ em $]-1,1[$. Analogamente para $]c,1[$.) Assim, $f$ é estritamente decrescente em $]-1,c]$ e estritamente crescente em $[c,1[$. Portanto, $c$ é ponto de mínimo global de $f$.
B) Falsa. Por exemplo, $f(x) = x^3$.
C) Falsa. Por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 1; \\ -1, \text{ se } -1 \le x < 0. \end{cases}$
D) Falsa. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$.
E) Falsa. Por exemplo, $f(x) = 2x + 1$.

**Teste 3** [cones1] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 10]$. Entre esses cones, sejam $C_1$ o de maior volume e $C_2$ o de menor volume. Então a razão entre o volume de $C_1$ e o volume de $C_2$ é

■ $\frac{32}{25}$.
B $\frac{32}{27}$.
C $\frac{27}{25}$.
D $\frac{9}{8}$.
E $\frac{256}{243}$.

***Solução:*** Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 10]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 10]$. Pelo Teorema de Weierstrass, $V$ possui máximo e mínimo globais. Além disso, $f$ é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 10$ e os pontos críticos de $V$ em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$, $V(8) = 256$ (máximo) e $V(10) = 200$ (mínimo). Assim, a resposta correta é $\frac{32}{25}$.

**Teste 4** [cones2] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 9]$. Entre esses cones, sejam $C_1$ o de maior volume e $C_2$ o de menor volume. Então a razão entre o volume de $C_1$ e o volume de $C_2$ é

■ $\frac{32}{27}$.
B $\frac{32}{25}$.
C $\frac{27}{25}$.
D $\frac{9}{8}$.
E $\frac{256}{243}$.

***Solução:*** Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 9]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 9]$. Pelo Teorema de Weierstrass, $V$ possui máximo e mínimo globais. Além disso, $f$ é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 9$ e os pontos críticos de $V$ em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$ (mínimo), $V(8) = 256$ (máximo) e $V(9) = 243$. Assim, a resposta correta é $\frac{32}{27}$.

**Teste 5** [cones3] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 10]$. Entre esses cones, sejam $C_1$ o de menor volume e $C_2$ o de maior volume. Então a razão entre o volume de $C_1$ e o volume de $C_2$ é

■ $\frac{25}{32}$.
B $\frac{27}{32}$.
C $\frac{25}{27}$.
D $\frac{8}{9}$.
E $\frac{243}{256}$.

***Solução:*** Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 10]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 10]$. Pelo Teorema de Weierstrass, $V$ possui máximo e mínimo globais. Além disso, $f$ é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 10$ e os pontos críticos de $V$ em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$, $V(8) = 256$ (máximo) e $V(10) = 200$ (mínimo). Assim, a resposta correta é $\frac{25}{32}$.

**Teste 6** [cones4] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 9]$. Entre esses cones, sejam $C_1$ o de menor volume e $C_2$ o de maior volume. Então a razão entre o volume de $C_1$ e o volume de $C_2$ é

■ $\frac{27}{32}$.
B $\frac{25}{32}$.
C $\frac{25}{27}$.
D $\frac{8}{9}$.
E $\frac{243}{256}$.

***Solução:*** Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 9]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 9]$. Pelo Teorema de Weierstrass, $V$ possui máximo e mínimo globais. Além disso, $f$ é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 9$ e os pontos críticos de $V$ em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$ (mínimo), $V(8) = 256$ (máximo) e $V(9) = 243$. Assim, a resposta correta é $\frac{27}{32}$.

*Para os testes 7, 8, 9 e 10 considere a função* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

**Teste 7** [grafa1] É correto afirmar que $f$ é estritamente decrescente em

■ $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
B $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.
C $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.
D $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.
E $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$. Assim, $f$ é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]0, 1]$.

**Teste 8** [grafa2] É correto afirmar que $f$ tem concavidade para baixo em

■ $\left]\frac{7}{2}, 4\right[$.
B $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.
C $\left]2, \frac{5}{2}\right[$.
D $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.
E $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.

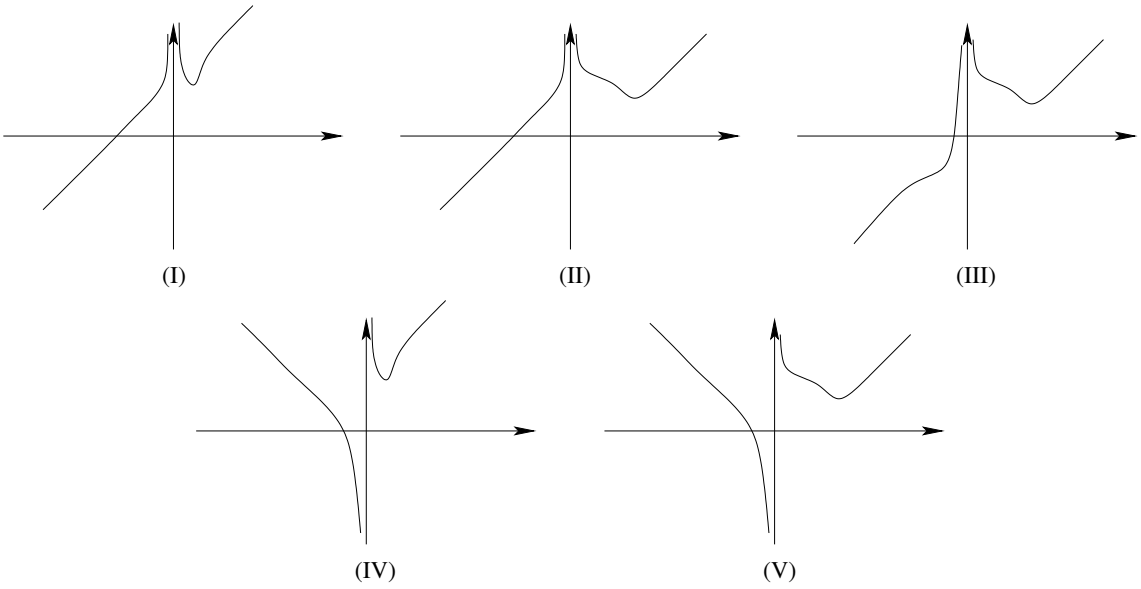
***Solução:*** Temos $f''(x) = \frac{-2x+6}{x^4}$. Assim, $f$ tem concavidade para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3]$ e tem concavidade para baixo em $[3, +\infty[$.

**Teste 9** [grafa3] É correto afirmar que

■ a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = -1$.
B a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 0$.
C a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 1$.
D $f$ não tem assíntota quando $x \to +\infty$.
E a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = -2$.

***Solução:*** A reta $y = x + 1$ é assíntota para $f$, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

**Teste 10** [grafa4] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de $f$.




■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

***Solução:*** O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

*Para os testes 11, 12, 13 e 14 considere a função* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

**Teste 11** [grafb1] É correto afirmar que $f$ é estritamente crescente em

■ $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

B $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.

C $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

D $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

E $\left]-\frac{7}{2}, -3\right[$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+x-2)}{x^3}$. Assim, $f$ é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-1, 0[$.

**Teste 12** [grafb2] É correto afirmar que $f$ tem concavidade para baixo em

■ $\left]-4,-\frac{7}{2}\right[$.

B $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

C $\left]-\frac{5}{2},-2\right[$.

D $\left]-2,-\frac{3}{2}\right[$.

E $\left]1,\frac{3}{2}\right[$.

***Solução:*** Temos $f''(x) = \frac{2x+6}{x^4}$. Assim, $f$ tem concavidade para cima em $[-3,0[$ e em $]0,+\infty[$ e tem concavidade para baixo em $]-\infty,-3]$.

**Teste 13** [grafb3] É correto afirmar que

■ a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 1$.

B a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 0$.

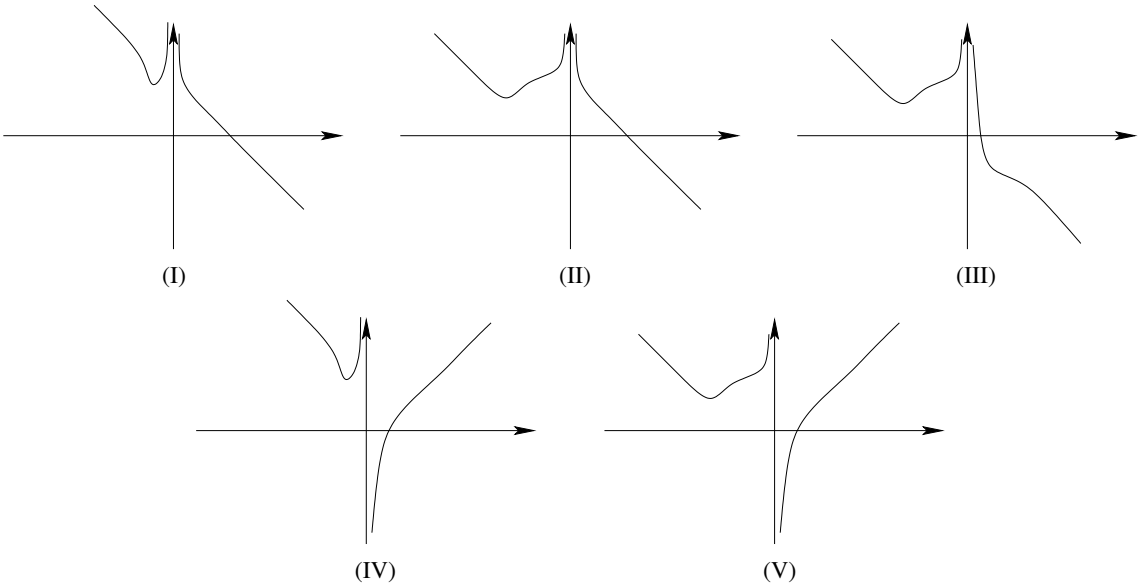
C a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = -1$.

D $f$ não tem assíntota quando $x \to +\infty$.

E a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 2$.

***Solução:*** A reta $y = -x + 1$ é assíntota para $f$, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (-x+1) = 0$.

**Teste 14** [grafb4] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de $f$.




■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

***Solução:*** O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

*Para os testes 15, 16, 17 e 18 considere a função* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

**Teste 15** [grafc1] É correto afirmar que $f$ é estritamente crescente em

■ $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

B $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

C $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

D $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

E $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

***Solução:*** $f'(x) = \frac{(x-1)(-x^2-x-2)}{x^3}$. Assim, $f$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente crescente em $]0, 1]$.

**Teste 16** [grafc2] É correto afirmar que $f$ tem concavidade para cima em

■ $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

B $\left]\frac{5}{2}, 3\right[$.

C $\left]-\frac{5}{2}, -2\right[$.

D $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

E $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

***Solução:*** Temos $f''(x) = \frac{2x-6}{x^4}$. Assim, $f$ tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3]$ e tem concavidade para cima em $[3, +\infty[$.

**Teste 17** [grafc3] É correto afirmar que

■ a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = -1$.

B a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 0$.

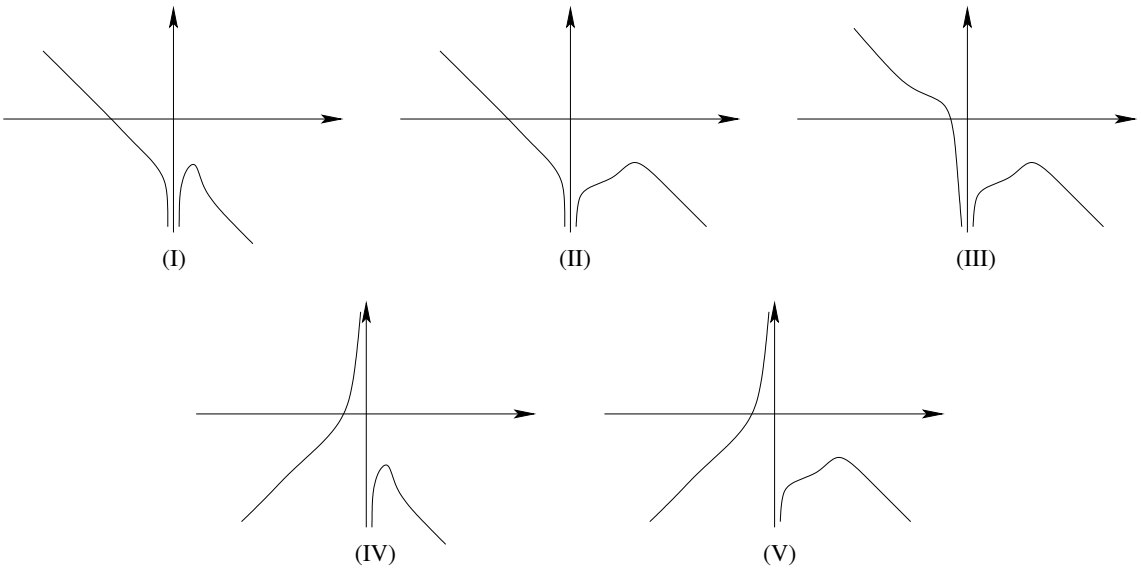
C a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 1$.

D $f$ não tem assíntota quando $x \to +\infty$.

E a assíntota de $f$ quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x = -2$.

***Solução:*** A reta $y = -x - 1$ é assíntota para $f$, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (-x - 1) = 0$.

**Teste 18 [grafc4]** Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de $f$.




■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

***Solução:*** O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

*Para os testes 19, 20, 21 e 22 considere a função* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

**Teste 19 [grafd1]** É correto afirmar que $f$ é estritamente decrescente em

■ $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.
B $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.
C $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.
D $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.
E $\left]-\frac{7}{2}, -3\right[$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$. Assim, $f$ é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 0[$.

**Teste 20** [grafd2] É correto afirmar que $f$ tem concavidade para cima em

■ $\left]-\frac{7}{2},-3\right[$.

B $\left]-3,-\frac{5}{2}\right[$.

C $\left]2,\frac{5}{2}\right[$.

D $\left]\frac{3}{2},2\right[$.

E $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

***Solução:*** Temos $f''(x)=\frac{-2x-6}{x^4}$. Assim, $f$ tem concavidade para baixo em $[-3,0[$ e em $]0,+\infty[$ e tem concavidade para cima em $]-\infty,-3]$.

**Teste 21** [grafd3] É correto afirmar que

■ a assíntota de $f$ quando $x\to+\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x=1$.

B a assíntota de $f$ quando $x\to+\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x=0$.

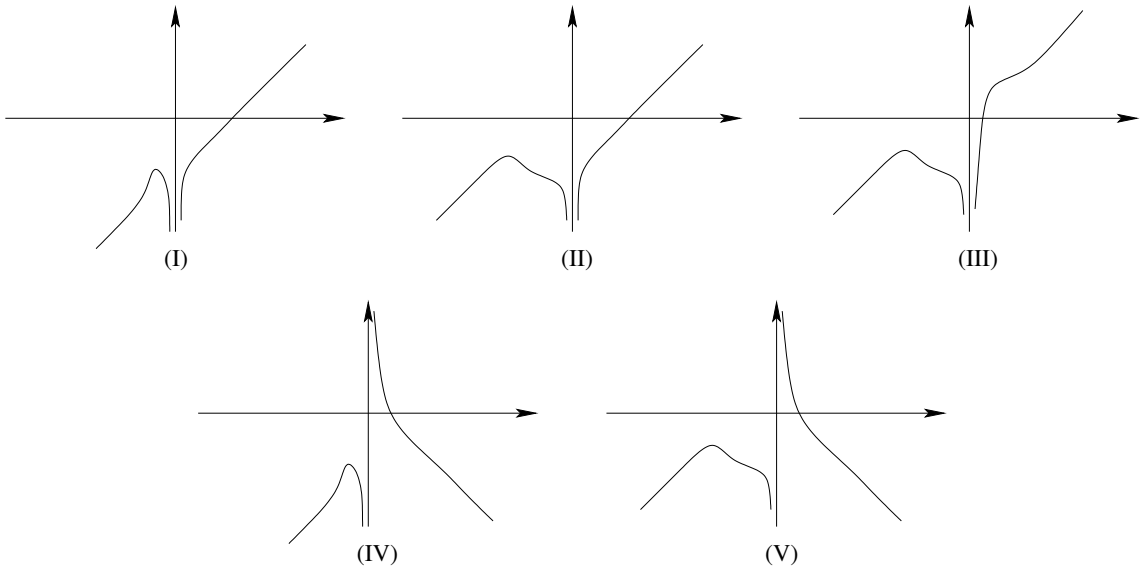
C a assíntota de $f$ quando $x\to+\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x=-1$.

D $f$ não tem assíntota quando $x\to+\infty$.

E a assíntota de $f$ quando $x\to+\infty$ intercepta o eixo $x$ no ponto $x=2$.

***Solução:*** A reta $y=x-1$ é assíntota para $f$, para $x\to\infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x)-(x-1)=0$.

**Teste 22** [grafd4] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de $f$.




■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

***Solução:*** O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$.

**Teste 23** [limite1] O valor de $\lim_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}}$ é

■ $e^{-\frac{2}{9}}$.
B $e^{-\frac{3}{4}}$.
C $e^{-\frac{4}{9}}$.
D $e^{-\frac{9}{4}}$.
E $e^{-\frac{1}{9}}$.

***Solução:*** Note que $(1-2x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}} = e^{\frac{\ln(1-2x^2)}{\sin^2(3x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^2)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1-2x^2)\sin(3x)\cos(3x)3}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 3 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{2}{9}$.

**Teste 24** [limite2] O valor de $\lim_{x\to 0}(1-3x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$ é

■ $e^{-\frac{3}{4}}$.
B $e^{-\frac{2}{9}}$.
C $e^{-\frac{4}{9}}$.
D $e^{-\frac{9}{4}}$.
E $e^{-\frac{1}{9}}$.

***Solução:*** Note que $(1-3x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}} = e^{\frac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2(2x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{(1-3x^2)\sin(2x)\cos(2x)2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 2 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{3}{4}$.

**Teste 25** [limite3] O valor de $\lim_{x\to 0}(1-4x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}}$ é

■ $e^{-\frac{4}{9}}$.
B $e^{-\frac{3}{4}}$.
C $e^{-\frac{2}{9}}$.
D $e^{-\frac{9}{4}}$.
E $e^{-\frac{1}{9}}$.

***Solução:*** Note que $(1-4x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}} = e^{\frac{\ln(1-4x^2)}{\sin^2(3x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^2)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x}{(1-4x^2)\sin(3x)\cos(3x)3}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 3 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{4}{9}$.

**Teste 26** [limite4] O valor de $\lim_{x\to 0}(1-9x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$ é

■ $e^{-\frac{9}{4}}$.
B $e^{-\frac{4}{9}}$.
C $e^{-\frac{3}{4}}$.
D $e^{-\frac{2}{9}}$.
E $e^{-\frac{1}{9}}$.

***Solução:*** Note que $(1-9x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}} = e^{\frac{\ln(1-9x^2)}{\sin^2(2x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-9x^2)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-9x}{(1-9x^2)\sin(2x)\cos(2x)2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 2 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{9}{4}$.

**Teste 27** [maxmin1] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de máximo local de $f$?

■ $-\dfrac{11\pi}{6}$.
B $\dfrac{\pi}{3}$.
C $-\dfrac{2\pi}{3}$.
D $\dfrac{5\pi}{6}$.
E $\dfrac{2\pi}{3}$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que $k$ é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k$ inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ ( os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro, são de mínimo local).

**Teste 28** [maxmin2] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de máximo local de $f$?

■ $-\dfrac{5\pi}{6}$.
B $\dfrac{\pi}{3}$.
C $-\dfrac{2\pi}{3}$.
D $\dfrac{5\pi}{6}$.
E $\dfrac{2\pi}{3}$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que $k$ é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k$ inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ ( os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro, são de mínimo local).

**Teste 29** [maxmin3] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de mínimo local de $f$?

■ $\frac{\pi}{3}$.
B $\frac{\pi}{6}$.
C $-\frac{5\pi}{6}$.
D $-\frac{4\pi}{3}$.
E $-\frac{\pi}{3}$.

***Solução:*** Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que $k$ é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k$ inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ ( os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro, são de mínimo local).

**Teste 30** [maxmin4] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de mínimo local de $f$?

■ $\frac{4\pi}{3}$.
B $\frac{\pi}{6}$.
C $-\frac{5\pi}{6}$.
D $-\frac{4\pi}{3}$.
E $-\frac{\pi}{3}$.

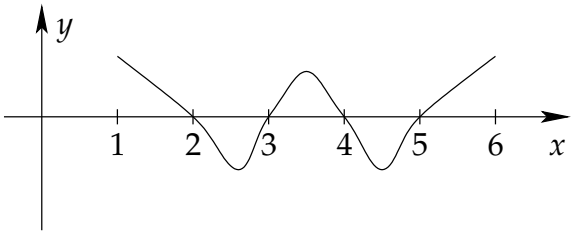
***Solução:*** Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que $k$ é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k$ inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ ( os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro, são de mínimo local).

**Teste 31 [raizes1]** Seja $f\colon ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3)=2$ e $f(5)=-3$;

II. as retas $x=0$ e $y=x$ são assíntotas para $f$;

III. $f'$ tem exatamente 4 raízes, e o gráfico de $f'$ no intervalo $[1,6]$ está esboçado na figura abaixo.




É correto dizer que o número de raízes de $f$ no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 3.
B 4.
C 0.
D 1.
E 2.

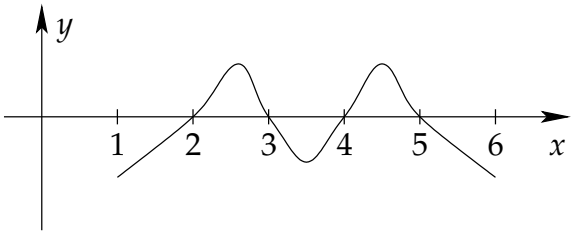
***Solução:*** Em $[2,4]$, $f$ não possui raízes, pois $f$ é estritamente decrescente em $[2,3]$, estritamente crescente em $[3,4]$ e $f(3)>0$. Em particular, $f(2)>0$ e $f(4)>0$. Como $x=0$ é assíntota vertical para $f$ e $f$ é estritamente crescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Além disso, $f(2)>0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de $f$ em $]0,2]$. Em $[4,5]$ existe exatamente uma raiz real de $f$ pois $f(4)>0$, $f(5)<0$ e $f$ é estritamente decrescente nesse intervalo. Finalmente, em $[5,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: $f$ é estritamente crescente, $f(5)<0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, pelo fato de $y=x$ ser assíntota para $x\to+\infty$.

**Teste 32 [raizes2]** Seja $f\colon ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3)=-2$ e $f(5)=3$;

II. as retas $x=0$ e $y=-x$ são assíntotas para $f$;

III. $f'$ tem exatamente 4 raízes, e o gráfico de $f'$ no intervalo $[1,6]$ está esboçado na figura abaixo.




É correto dizer que o número de raízes de $f$ no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 3.
B 4.
C 0.
D 1.
E 2.

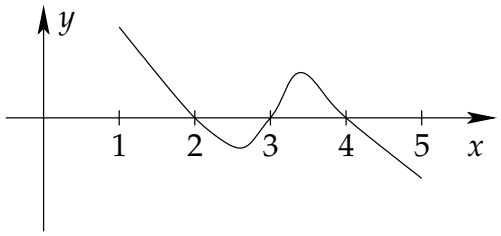
***Solução:*** Em $[2,4]$, $f$ não possui raízes, pois $f$ é estritamente crescente em $[2,3]$, estritamente decrescente em $[3,4]$ e $f(3)<0$. Em particular, $f(2)<0$ e $f(4)<0$. Como $x=0$ é assíntota vertical para $f$ e $f$ é estritamente decrescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Além disso, $f(2)<0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de $f$ em $]0,2]$. Em $[4,5]$ existe exatamente uma raiz real de $f$ pois $f(4)<0$, $f(5)>0$ e $f$ é estritamente crescente nesse intervalo. Finalmente, em $[5,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: $f$ é estritamente decrescente, $f(5)<0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, pelo fato de $y=-x$ ser assíntota para $x\to+\infty$.

**Teste 33 [raizes3]** Seja $f\colon ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3)=2$;

II. as retas $x=0$ e $y=-x$ são assíntotas para $f$;

III. $f'$ tem exatamente 3 raízes, e o gráfico de $f'$ no intervalo $[1,5]$ está esboçado na figura abaixo.




É correto dizer que o número de raízes de $f$ no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 2.
B 3.
C 4.
D 0.
E 1.

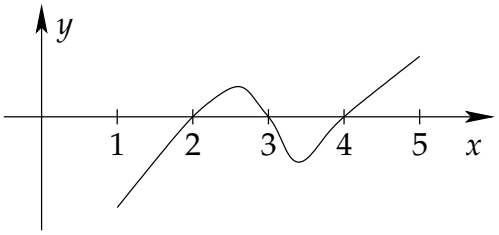
***Solução:*** Em $[2,4]$, $f$ não possui raízes, pois $f$ é estritamente decrescente em $[2,3]$, estritamente crescente em $[3,4]$ e $f(3)>0$. Em particular, $f(2)>0$ e $f(4)>0$. Como $x=0$ é assíntota vertical para $f$ e $f$ é estritamente crescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Além disso, $f(2)>0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de $f$ em $]0,2]$. Em $[4,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: $f$ é estritamente decrescente, $f(4)>0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, pelo fato de $y=-x$ ser assíntota para $x\to+\infty$.

**Teste 34 [raizes4]** Seja $f\colon ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3)=-2$;

II. as retas $x=0$ e $y=x$ são assíntotas para $f$;

III. $f'$ tem exatamente 3 raízes, e o gráfico de $f'$ no intervalo $[1,5]$ está esboçado na figura abaixo.




É correto dizer que o número de raízes de $f$ no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 2.
B 3.
C 4.
D 0.
E 1.

***Solução:*** Em $[2,4]$, $f$ não possui raízes, pois $f$ é estritamente crescente em $[2,3]$, estritamente decrescente em $[3,4]$ e $f(3)<0$. Em particular, $f(2)<0$ e $f(4)<0$. Como $x=0$ é assíntota vertical para $f$ e $f$ é estritamente decrescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Além disso, $f(2)<0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de $f$ em $]0,2]$. Em $[4,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: $f$ é estritamente crescente, $f(4)<0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, pelo fato de $y=x$ ser assíntota para $x\to+\infty$.

**Teste 35 [tvm1]** Se $e^{\frac{3}{2}}<a<b<e^2$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\frac{1}{2e^3},-\frac{1}{e^4}\right[$.
B $\left]-\frac{1}{e^4},-\frac{3}{2e^5}\right[$.
C $\left]-\frac{3}{2e^5},-\frac{2}{e^6}\right[$.
D $\left]-\frac{2}{e^6},-\frac{3}{e^8}\right[$.
E $\left]-\frac{3}{e^8},-\frac{4}{e^{10}}\right[$.

***Solução:*** Seja $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$. Temos $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Como $f$ é derivável para $x>0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a,b]$ e concluir que existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x)>0$ se $x>e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}},+\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}}<a<b<e^2$, temos que $f'(c)\in]f'(e^{\frac{3}{2}}),f'(e^2)[$, isto é, $f'(c)\in\left]-\frac{1}{2e^3},-\frac{1}{e^4}\right[$.

**Teste 36** [tvm2] Se $e^2 < a < b < e^{\frac{5}{2}}$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5}\right[$.

B $\left]-\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4}\right[$.

C $\left]-\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6}\right[$.

D $\left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

E $\left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

***Solução:*** Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como $f$ é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^2 < a < b < e^{\frac{5}{2}}$, temos que $f'(c) \in ]f'(e^2), f'(e^{\frac{5}{2}})[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5}\right[$.

**Teste 37** [tvm3] Se $e^{\frac{5}{2}} < a < b < e^3$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6}\right[$.

B $\left]-\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5}\right[$.

C $\left]-\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4}\right[$.

D $\left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

E $\left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

***Solução:*** Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como $f$ é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^{\frac{5}{2}} < a < b < e^3$, temos que $f'(c) \in ]f'(e^{\frac{5}{2}}), f'(e^3)[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6}\right[$.

**Teste 38** [tvm4] Se $e^3 < a < b < e^4$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

B $\left]-\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6}\right[$.

C $\left]-\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5}\right[$.

D $\left]-\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4}\right[$.

E $\left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

***Solução:*** Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como $f$ é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^3 < a < b < e^4$, temos que $f'(c) \in ]f'(e^3), f'(e^4)[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

**Teste 39** [tvm5] Se $e^4 < a < b < e^5$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

B $\left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

C $\left]-\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6}\right[$.

D $\left]-\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5}\right[$.

E $\left]-\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4}\right[$.

***Solução:*** Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como $f$ é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^4 < a < b < e^5$, temos que $f'(c) \in ]f'(e^4), f'(e^5)[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

# 2019 – MAT-2453 – Segunda Prova – Folha de Respostas

***Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.***

## Identificação:

**Nome:** _____ **NUSP:** _____ **Turma:** _____

_____
Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as **primeiras colunas** em branco.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |

## Respostas:

**Teste 1:** ■ B C D E

**Teste 2:** ■ B C D E

**Teste 3:** ■ B C D E

**Teste 4:** ■ B C D E

**Teste 5:** ■ B C D E

**Teste 6:** ■ B C D E

**Teste 7:** ■ B C D E

**Teste 8:** ■ B C D E

**Teste 9:** ■ B C D E

**Teste 10:** ■ B C D E

**Teste 11:** ■ B C D E

**Teste 12:** ■ B C D E

**Teste 13:** ■ B C D E

**Teste 14:** ■ B C D E

**Teste 15:** ■ B C D E

**Teste 16:** ■ B C D E

**Teste 17:** ■ B C D E

**Teste 18:** ■ B C D E

**Teste 19:** ■ B C D E

**Teste 20:** ■ B C D E

**Teste 21:** ■ B C D E

**Teste 22:** ■ B C D E

**Teste 23:** ■ B C D E

**Teste 24:** ■ B C D E

**Teste 25:** ■ B C D E

**Teste 26:** ■ B C D E

**Teste 27:** ■ B C D E

**Teste 28:** ■ B C D E

**Teste 29:** ■ B C D E

**Teste 30:** ■ B C D E

**Teste 31:** ■ B C D E

**Teste 32:** ■ B C D E

**Teste 33:** ■ B C D E

**Teste 34:** ■ B C D E

**Teste 35:** ■ B C D E

**Teste 36:** ■ B C D E

**Teste 37:** ■ B C D E

**Teste 38:** ■ B C D E

**Teste 39:** ■ B C D E