Gabarito da PROVA SUBSTITUTIVA

Tabela 1: Respostas das alternativas corretas das questões **Q1-Q8** para as diferentes provas.

Prova	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**
17XY1	e	e	a	b	c	a	b	e
33BC1	a	a	d	d	b	d	a	a
54DE1	d	d	c	c	e	e	b	b
88FF1	b	c	b	a	a	b	a	d

Para todas as questões:

- A aceleração da gravidade na superfície da Terra é representada por g.
- Quando necessário, adote para g o valor de $10\,\mathrm{m/s^2}$.
- Os vetores unitários associados às coordenadas cartesianas x, y e z são, respectivamente, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$.
- $I = I_{CM} + MD^2$
- $\vec{v}_p = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \otimes \vec{r}$

Enunciado da questão (Q1).
[1,0 ponto] Um corpo, inicialmente em repouso, é acelerado em uma trajetória circular de raio $R = 2$ m, com aceleração angular que varia com o tempo segundo a equação

$$\alpha(t) = 12t^2 - 6t + 4 \ \ (\mathrm{rad/s^2}).$$

O módulo do vetor aceleração do corpo quando $t = 1,0$ s é:

(a) $\sqrt{70}$ m/s^2.
(b) 20 m/s^2.
(c) $10\sqrt{5}$ m/s^2.
(d) 50 m/s^2.
(e) $10\sqrt{29}$ m/s^2.

Dado: $\int Ax^n dx = A\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ onde A é constante.

Solução Q1: O módulo do vetor aceleração do corpo será dado por:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \tag{1}$$

onde a_c e a_t são as acelerações centrípeta e tangencial, respectivamente. A aceleração tangencial é calculada como $a_t = \alpha R$. A aceleração centrípeta é dada por $a_c = \omega^2 R$ onde ω é a velocidade angular, que é calculada como

$$\omega(t) = \int \alpha(t)dt = \int (12t^2 - 6t + 4)dt = 4t^3 - 3t^2 + 4t. \tag{2}$$

A aceleração tangencial para $t = 1$ s será dada por:

$$a_t(1) = \alpha(1)R = (12 - 6 + 4) \times 2 \Rightarrow \boxed{a_t(t = 1\ \mathrm{s}) = 20\ \mathrm{m/s^2}} \tag{3}$$

A aceleração centrípeta para $t = 1$ s é:

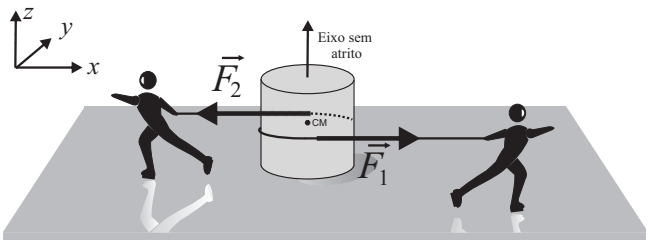
$$a_c(1) = \omega^2(1)R = (4 - 3 + 4)^2 \times 2 \Rightarrow \boxed{a_c(t = 1\ \mathrm{s}) = 50\ \mathrm{m/s^2}} \tag{4}$$

Substituindo os valores na expressão (1) obtemos:

$$a = \sqrt{50^2 + 20^2} = \sqrt{2900} = 10\sqrt{29}\ \mathrm{m/s^2} \tag{5}$$

Para as provas com $R = 1$ m o módulo do vetor aceleração é $5\sqrt{29}$ m/s^2.

Enunciado da questão (Q2).
[1,0 ponto] Um cilindro circular reto e sólido, de densidade de massa uniforme, de 40 kg e raio de base 0,50 m, está parado sobre uma superfície de gelo lisa, mas pode girar sem atrito em torno de um eixo fixo vertical, que passa pelo seu centro de massa (CM), como mostra a figura. Dois patinadores enrolam cordas em torno do cilindro, num mesmo sentido, exercendo sobre o cilindro forças constantes $\vec{F}_1 = 60\,\vec{\imath}$ (N) e $\vec{F}_2 = -40\,\vec{\imath}$ (N), durante 2 segundos, como esquematizado na figura. A energia cinética de rotação do cilindro quando $t = 2$ s será:



Adote:
⋆ O momento de inércia do cilindro circular reto e sólido, de massa M e raio de base R, em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa (CM) e que é perpendicular à sua base, é $I_z = \frac{1}{2}MR^2$.
⋆ Ignore qualquer atrito do cilindro com o gelo.

(a) 50 J.
(b) 76 J.
(c) 250 J.
(d) 500 J.
(e) 1000 J.

Solução Q2: A expressão que nos permite determinar a energia cinética de rotação (E_{rot}) do cilindro é:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Precisamos portanto determinar a velocidade angular. Para isso, vamos primeiro calcular o torque resultante (τ) que atua no cilindro:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 50\,\vec{k}\ \text{(N.m)}$$

onde usamos $\vec{r}_1 = 0,5\,\vec{\jmath}$(m) e $\vec{r}_2 = -0,5\,\vec{\jmath}$(m). A aceleração angular do cilindro é dada por

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{50}{5} = 10\,\vec{k}\,(\text{rad/s}^2)$$

sendo

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}[40 \times (0,5)^2] = 5\ \text{kg.m}^2.$$

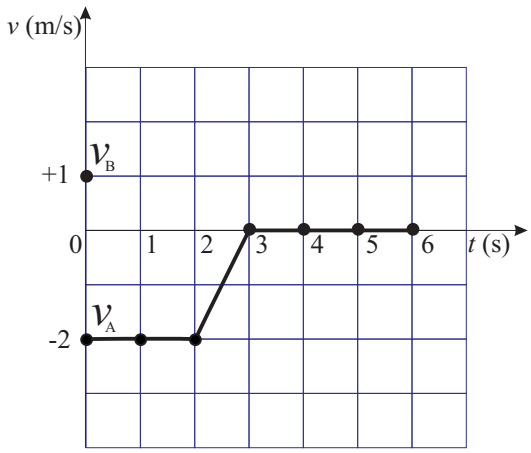
Com isso obtemos:

$$\vec{\omega}(t) = 10t\,\vec{k}\ \text{(rad/s)}$$

e o cálculo da energia cinética de rotação é imediato:

$$E_{rot}(t = 2\,\text{s}) = \frac{1}{2}[(5) \times (20)^2] = 1000\,\text{J}.$$

Enunciado da questão (Q3).
[2,0 pontos] Duas partículas A e B, de massas $m_A = 0,5$ kg e $m_B = 0,25$ kg, *interagem apenas entre si* no intevalo $0 \leq t \leq 6$ s. Elas deslocam-se em cima de uma mesa horizontal sem atrito ao longo do eixo OX. No instante $t = 0$ s a partícula A tem velocidade inicial $\vec{v}_A = -2,0\,\vec{\imath}$ (m/s) enquanto a partícula B tem velocidade inicial $\vec{v}_B = +1,0\,\vec{\imath}$ (m/s). Durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 6$ s observa-se, a cada segundo, a velocidade v_A da partícula A. O gráfico mostra a função v_A obtida unindo-se por segmentos de reta os pontos experimentais representados por pequenos círculos. Com base nos dados, podemos afirmar que a força média $\vec{F}_{BA}$ exercida pela partícula A na partícula B durante o tempo de colisão e o tipo de colisão são, respectivamente:



(a) $\vec{F}_{BA} = -1,0\,\vec{\imath}$ (N), colisão elástica.
(b) $\vec{F}_{BA} = +1,0\,\vec{\imath}$ (N), colisão elástica.
(c) $\vec{F}_{BA} = -1,5\,\vec{\imath}$ (N), colisão inelástica.
(d) $\vec{F}_{BA} = -2,0\,\vec{\imath}$ (N), colisão elástica.
(e) $\vec{F}_{BA} = +2,0\,\vec{\imath}$ (N), colisão inelástica.

Solução Q3: As forças externas que atuam sobre cada partícula são a força da gravidade e a força normal exercida pela mesa sobre a partícula, e que equilibra a força da gravidade. Portanto, a força externa resultante sobre o sistema das duas partículas é nula. Assim sendo, podemos considerar que a variação temporal da velocidade de cada partícula é devida apenas à força de interação entre elas. Pelo gráfico podemos calcular imediatamente a variação do momento linear da partícula A durante o intervalo $2 \leq t \leq 3$ s, intervalo este no qual ocorre a interação entre as duas partículas. A força média que atua na partícula A devido a interação com a partícula B é dada por:

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m[\frac{\vec{v}_A(t=3\,\text{s}) - \vec{v}_A(t=2\,\text{s})}{\Delta t}] = \frac{1}{2}\left[\frac{0-(-2,0\,\vec{\imath})}{(3,0-2,0)}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{AB} = +1,0\,\vec{\imath}\,(\text{N})}$$

$\boxed{\text{A força que A aplica em B será dada por } \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} = -1,0\,\vec{\imath}\,(\text{N})}$.

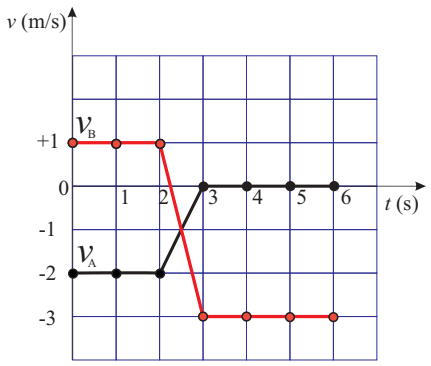
Para verificarmos o tipo de colisão devemos calcular a energia cinética do sistema antes e depois da colisão. Para isso devemos determinar a velocidade das partículas antes e depois da colisão. Isso pode ser feito considerando que atuam apenas forças internas e que o momento linear do sistema conserva-se. Para o instante $t = 0$, o momento do sistema é

$$\vec{P}^{antes}_{sistema} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = \frac{1}{2}(-2,0\,\vec{\imath}) + \frac{1}{4}(+1,0\,\vec{\imath}) = -\frac{3}{4}\,\vec{\imath}\,(\text{kg.m/s})$$

Este valor será conservado durante todo o intervalo de $0 \leq t \leq 6$ s, pois o sistema está sujeito apenas às forças internas entre as duas partículas. Uma vez a velocidade da partícula A é constante no intervalo $0 \leq t \leq 2$ s, a velocidade de B também será constante neste intervalo e com valor igual a $\vec{v}_B = +1,0\,\vec{\imath}$(m/s). Para o intervalo $t \geq 3$ s, a velocidade de B será:

$$\vec{P}^{depois}_{sistema} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}\vec{v}_B = -\frac{3}{4}\,\vec{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = -3\,\vec{\imath}\,(\text{m/s})}$$

Podemos representar a velocidade das partículas A e B como no gráfico ao lado.



Podemos agora determinar a energia cinética do sistema antes e depois da colisão.

$$E_{cin}^{antes} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(-2,0)^2}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{(+1,0)^2}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{cin}^{antes} = \frac{9}{8}\ \text{J}}.$$

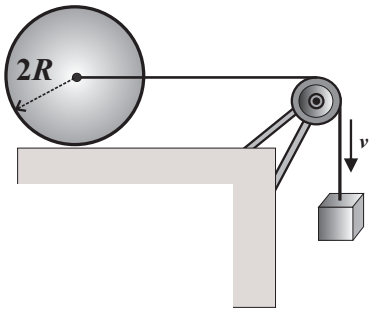
A energia cinética depois da colisão é dada por:

$$E_{cin}^{depois} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{(-3,0)^2}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{cin}^{depois} = \frac{9}{8}\ \text{J}}$$

Como $E_{cin}^{antes} = E_{cin}^{depois}$, a colisão é elástica.

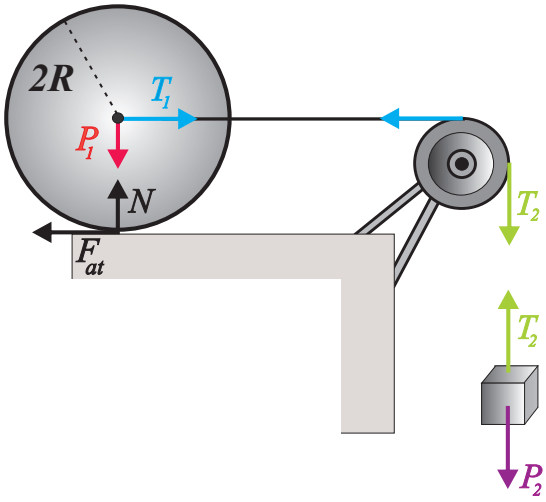
Enunciado da questão (Q4).
[2,0 pontos] Um cilindro reto e sólido com uma distribuição uniforme de massa, com raio $\boldsymbol{2R}$ e massa $\boldsymbol{M}$, está em repouso em cima de uma mesa. Ele está ligado a um bloco suspenso de massa $\boldsymbol{M}$, pelo fio ideal que passa por uma polia de massa $\boldsymbol{M}$ e raio $\boldsymbol{R}$. Se o atrito da polia em relação ao seu eixo de rotação é nulo, se a corda não desliza sobre a polia e o cilindro rola sem deslizar, a aceleração de translação do bloco suspenso em função da aceleração da gravidade g quando o sistema é libertado a partir do repouso é:



(a) $g/2$.
(b) $g/3$.
(c) $2g/3$.
(d) $3g/4$.
(e) $g/4$.

Adote que:
⋆ O momento de inércia de um cilindro reto e sólido de massa m e raio r, em relação ao eixo de rotação que é perpendicular à base e que passa pelo seu centro de massa (CM) é $I_{CM} = \frac{1}{2}mr^2$.
⋆ O momento de inércia da polia de massa m e raio r, em relação ao seu eixo de rotação é $I_{polia} = \frac{1}{2}mr^2$.

Solução Q4: O diagrama das forças que atuam no sistema está representado na figura ao lado. A 2ª Lei de Newton para o movimento de translação do cilindro e do bloco suspenso podem ser escritas como:



$$T_1 - F_{at} = Ma \tag{6}$$

e

$$P_2 - T_2 = Ma \tag{7}$$

A 2ª Lei de Newton aplicada ao movimento de rotação da polia fornece:

$$(T_2 - T_1)R = I_p\alpha = \frac{1}{2}MR^2(\frac{a}{R}) \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \tag{8}$$

onde I_p é o momento de inércia da polia e α é a aceleração angular da polia em torno de seu eixo de rotação e que está relacionada com a aceleração de translação do centro de massa do bloco e do cilindro pela relação

$$a = \alpha R_p \tag{9}$$

sendo R_p o raio da polia. Mas como o cilindro rola sem deslizar, também temos que

$$a = \alpha_c R_c \tag{10}$$

onde α_c é a aceleração angular do cilindro em torno de seu centro de massa e R_c seu raio. Igualando as equações (9) e (10) temos:

$$\alpha_c R_c = \alpha R_p \Rightarrow \boxed{\alpha_c = \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}}.$$

Assim a 2ª Lei de Newton aplicada ao movimento de rotação do cilindro será:

$$F_{at}(2R) = I_c\alpha_c = \frac{1}{2}M(2R)^2(\frac{a}{2R}) \Rightarrow$$

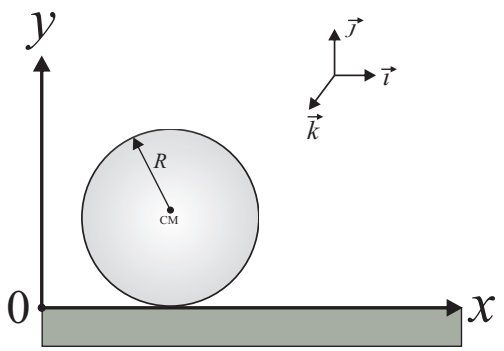
onde I_c é o momento de inércia do cilindro e α_c a velocidade angular do cilindro em torno do seu centro de massa. Portanto,

$$F_{at} = \frac{1}{2}Ma \tag{11}$$

Somando as expressões (6), (7), (8) e (11) obtemos

$$3Ma = Mg \Rightarrow \boxed{a = \tfrac{g}{3}}$$

Enunciado da questão (Q5).
[2,0 pontos] Um cilindro sólido de massa $m = 1$ kg e raio $R = 10$ cm é atirado sobre uma superfície horizontal com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 8,5\,\vec{\imath}$ (m/s) e velocidade angular $\vec{\omega}_0 = -35\,\vec{k}$ (rad/s). O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a superfície é $\mu_c = 0,2$. Podemos afirmar que o tempo que a bola escorrega até atingir a condição de rolamento sem deslizamento é:



(a) $\frac{2}{3}$ s.

(b) $\frac{1}{6}$ s.

(c) $\frac{5}{6}$ s.

(d) $\frac{3}{4}$ s.

(e) $\frac{5}{4}$ s.

⋆ Adote que o momento de inércia de um cilindro reto e sólido de massa m e raio r, em relação ao eixo de rotação que é perpendicular à base e que passa pelo seu centro de massa (CM) é $I_{CM} = \frac{1}{2}mr^2$.

Solução Q5: A 2ª Lei de Newton para o movimento de translação do centro de massa do cilindro é:

$$\vec{F}_{res} = -\mu_c mg\,\vec{\imath} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -\mu_c g\,\vec{\imath}}$$

A velocidade do centro de massa será dada por:

$$\vec{v} = \int \vec{a}(t)dt = \int -\mu_c g\,dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \mu_c g\,t\,\vec{\imath}} \tag{12}$$

Para o movimento de rotação temos que o torque resultante ($\vec{\tau}_{res}$) é dado por:

$$\vec{\tau}_{res} = -\mu_c mgR\,\vec{k} = I\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}(t) = -\frac{\mu_c mgR\,\vec{k}}{I} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}(t) = -\frac{2\mu_c g}{R}\,\vec{k}}$$

e a velocidade angular do cilindro ao redor do eixo que passa pelo centro de massa será:

$$\vec{\omega} = \int \vec{\alpha}(t)dt = -\int \frac{2\mu_c g}{R}\,dt\,\vec{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 - \frac{2\mu_c g}{R}t\,\vec{k}} \tag{13}$$

Para atingir a condição de rolamento sem deslizamento, o ponto que entra em contato com o chão deve ter velocidade nula ou seja, deve satistazer a condição

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \otimes \vec{r} = 0 \tag{14}$$

onde $\vec{v}_{cm}$ e $\vec{\omega}$ são dadas pelas expressões (10) e (11), respectivamente, o símbolo $\otimes$ indica o produto vetorial e $\vec{r} = -R\,\vec{\jmath}$. Fazendo as substituições em (12) obtemos:

$$(v_0 - \mu_c g\,t)\,\vec{\imath} + (\vec{\omega}_0 - \frac{2\mu_c g}{R}t\,\vec{k}) \otimes \vec{r} = 0$$

ou

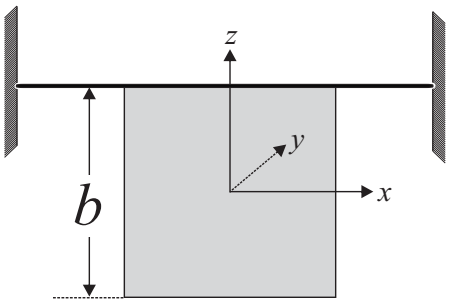
$$(v_0 - \mu_c g\, t)\, \vec{\imath} - (|\omega_0|\, R + 2\mu_c g\, t)\, \vec{\imath} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{v_0 - |\omega_0| R}{3\mu_c g}}$$

Substituindo os valores numéricos encontramos:

$$t = \frac{8,5 - 35 \times (0,1)}{3 \times (0,2) \times 10} \Rightarrow \boxed{t = \frac{5}{6}\ \mathrm{s}}$$

Enunciado das questões (Q6) e (Q7).
Um alvo quadrado, em uma galeria de tiro, de densidade de massa uniforme, massa $M = 6m$ e lado de comprimento b, está pendurado na vertical por um eixo que passa por seu lado superior, como mostra a figura. Ele está inicialmente parado quando é atingido no seu centro, por um projétil de massa m e velocidade $\vec{v} = v\,\vec{j}$, perpendicular ao plano do quadrado, o qual fica encravado no alvo.



Adote que:
⋆ O momento de inércia de um plano quadrado homogêneo, de massa M e lado b, em relação a um eixo paralelo ao eixo x e que passa pelo seu centro de massa (CM) é $I_x^{CM} = \frac{1}{12}Mb^2$.
⋆ Considere o projétil como partícula.

(Q6) [1,0 ponto] O momento de inércia do alvo com o projétil encravado, em relação ao eixo de rotação é:

(a) $\frac{9}{4}mb^2$.

(b) $\frac{7}{12}mb^2$.

(c) $\frac{3}{4}mb^2$.

(d) $\frac{1}{3}mb^2$.

(e) $\frac{7}{4}mb^2$.

Solução Q6: Para determinar o momento de inércia do alvo em torno de um eixo que passa por um de seus lados e não pelo centro de massa utilizaremos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{alvo} = I_x^{CM} + MD^2$$

onde $I_x^{CM} = \frac{1}{12}Mb^2$ e D é a distância entre os dois eixos paralelos, ou seja, $D = \frac{b}{2}$. Com isso obtemos

$$I_{alvo} = \frac{1}{12}Mb^2 + MD^2 = \frac{1}{12}Mb^2 + M\frac{b^2}{4} \Rightarrow \boxed{I_{alvo} = \tfrac{1}{3}Mb^2}.$$

O momento de inércia do alvo com o projétil encravado (I_{total}) será dado por:

$$I_{total} = I_{alvo} + I_{projetil} = \frac{1}{3}Mb^2 + m(\frac{b}{2})^2 = \frac{1}{3}Mb^2 + m\frac{b^2}{4}$$

Usando que $M = 6m$ obtemos:

$$\boxed{I_{total} = \tfrac{9mb^2}{4}}$$

(Q7) [1,0 ponto] A velocidade angular do alvo com o projétil encravado logo após o impacto é:

(a) $\vec{\omega} = -\frac{2v}{9b}\,\vec{\imath}$.

(b) $\vec{\omega} = +\frac{2v}{9b}\,\vec{\imath}$

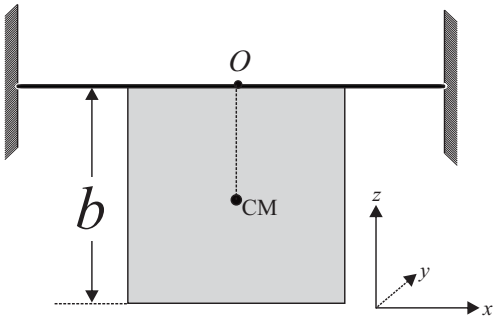
(c) $\vec{\omega} = -\frac{3v}{2b}\,\vec{\imath}$

(d) $\vec{\omega} = +\frac{2v}{3b}\,\vec{\imath}$

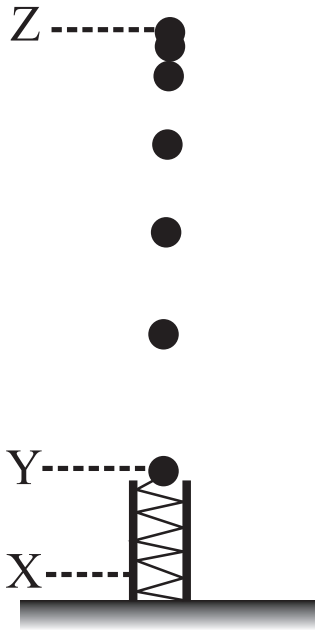
(e) $\vec{\omega} = +\frac{7v}{2b}\,\vec{\imath}$

Solução Q7: Não existem torques externos sobre o sistema alvo + projétil, de modo que o momento angular do mesmo deve conservar-se. O alvo não possui momento angular inicial, mas o projétil, sim. O momento angular do sistema em relação ao ponto O (escolhido convenientemente) antes do impacto é dado por $\vec{L}_O^{antes} = mv(b/2)\,\vec{\imath}$. Depois da colisão, o momento do sistema será dado por $\vec{L}_O^{depois} = I_{total}\vec{\omega}$. A conservação do momento angular requer que antes e depois da colisão os vetores sejam iguais, isto é, $mv\frac{b}{2}\,\vec{\imath} = I_{total}\vec{\omega}$. Logo,

$$\vec{\omega} = \frac{mvb}{2I_{total}}\,\vec{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{2v}{9b}\,\vec{\imath}}.$$



Enunciado da questão (Q8).
[1,0 ponto] A figura representa uma fotografia múltipla de uma bolinha sendo atirada verticalmente para cima. A mola, com a bolinha em cima, foi comprimida até o ponto marcado com X e então foi solta. A bola deixou a mola no ponto marcado com Y, e atingiu a altura máxima no ponto marcado com Z. Assumindo que a resistência do ar é desprezível, podemos afirmar que:



(a) A maior aceleração da bola foi no momento em que atingiu o ponto Y (ainda em contato com a mola).

(b) A aceleração da bola foi decrescendo em seu trajeto do ponto Y ao ponto Z.

(c) A aceleração da bola foi zero no ponto Z.

(d) Todas as respostas acima estão corretas.

(e) A aceleração da bola foi a mesma em todos os pontos de sua trajetória, do ponto Y ao Z.

A única alternativa correta é: **A aceleração da bola foi a mesma em todos os pontos de sua trajetória, do ponto Y ao Z.**