Lista 1 | Paulo Akira

1) a) São idade, sexo, raça, salário e ocupação.

b) As variáveis quantitativas são idade (ano) e salário (moeda).

2) Dados: 4,6 4,9 5,2 5,6 5,7 6,4

$\bar{x} = 5,4$; $s = 0,64187$; $m_d = 5,4$

3) $\bar{x} = 1705$; $s = 339,85$; $M = 1400$; $m_d = 1600$

4)

	f	c	fc	fc^2
	3	164,5	493,5	81180,75
	8	194,5	1556	302642
	10	224,5	2245	504002,5
	13	254,5	3308,5	842013,25
	33	284,5	9388,5	2671028,25
	40	314,5	12580	3956410
	35	344,5	12057,5	4153808,75
Total:	142		41629	12511085,5

$$\bar{x} = \frac{41629}{142} = 293,16$$

$$s^2 = \frac{12511085,5 - \frac{41629^2}{142}}{141} \cong 2177,63$$

$\therefore s \cong 46,67$

5) a) $\bar{x} = \frac{620}{15} = 41,33$; $s^2 = \frac{31572 - \frac{620^2}{15}}{14} =$

$\cong 424,67 \therefore s \cong 20,6$

b) $Q_1 = 27$; $m_d = 34$; $Q_3 = 50$

$d_q = Q_3 - Q_1 = 23$

$L_i = 27 - 1,5 \cdot 23 = -7,5$

$L_s = 50 + 1,5 \cdot 23 = 84,5$ $\therefore I = [-7,5; 84,5]$

Os valores fora do intervalo (outliers) são 85 e 86.

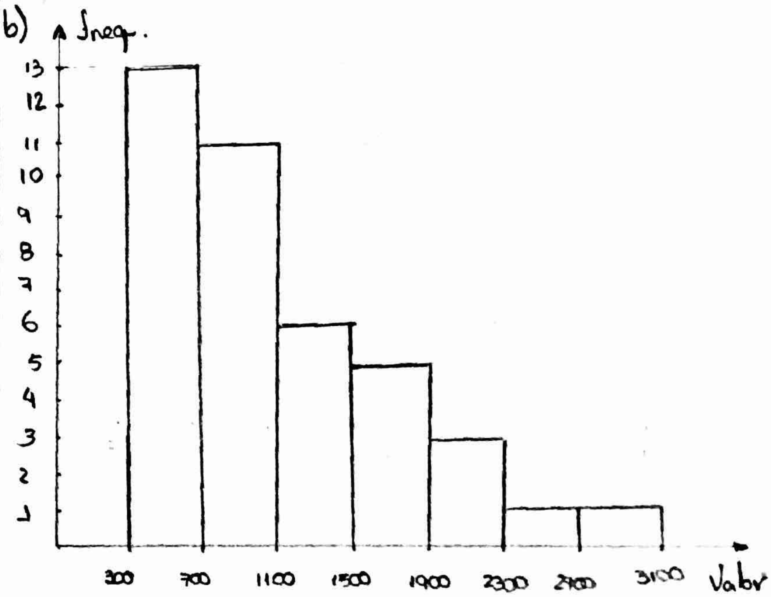
$\bar{x} = \frac{449}{13} \cong 34,54$; $s^2 = \frac{16951 - \frac{449^2}{13}}{12} \cong 120,27$ $s = 10,97$

Como a média e o desvio padrão são sensíveis a valores extremos, estes acabam sendo muito influenciados pelos outliers.

6) a)

Classes	f
300 ⊢ 700	13
700 ⊢ 1100	11
1100 ⊢ 1500	6
1500 ⊢ 1900	5
1900 ⊢ 2300	3
2300 ⊢ 2700	1
2700 ⊢ 3100	1

b)



c) $m_d = 700 + \frac{(20) - 13}{11} \cdot 400 = 954,54$

$m_o = 300 + \frac{13}{13+2} \cdot 400 = 300 + \frac{13}{15} \cdot 400 \cong 646,67$

$\bar{x} = \frac{42700}{40} = 1067,5$.

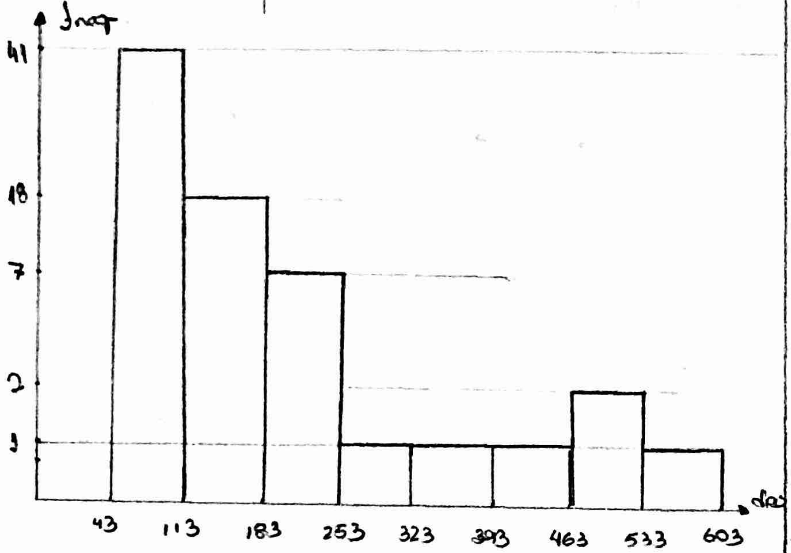
d) Os valores são: 600, 600, 650, 700, 750, 750, 850, 850, 900, 900.

e) $s^2 = \frac{15\,262\,750}{39} \cong 391352,56$ $s \cong 625,58$

7) $R = 598 - 43 = 555$ $h = \frac{555}{8} \cong 70$

$K = \sqrt{72} = 8,485 \cong 8$

Intervalos	f
43 ⊢ 113	41
113 ⊢ 183	18
183 ⊢ 253	7
253 ⊢ 323	1
323 ⊢ 393	1
393 ⊢ 463	1
463 ⊢ 533	2
533 ⊢ 603	1



8) $Q_1 = \frac{82+83}{2} = 82,5$, $m_d = \frac{102+103}{2} = 102,5$

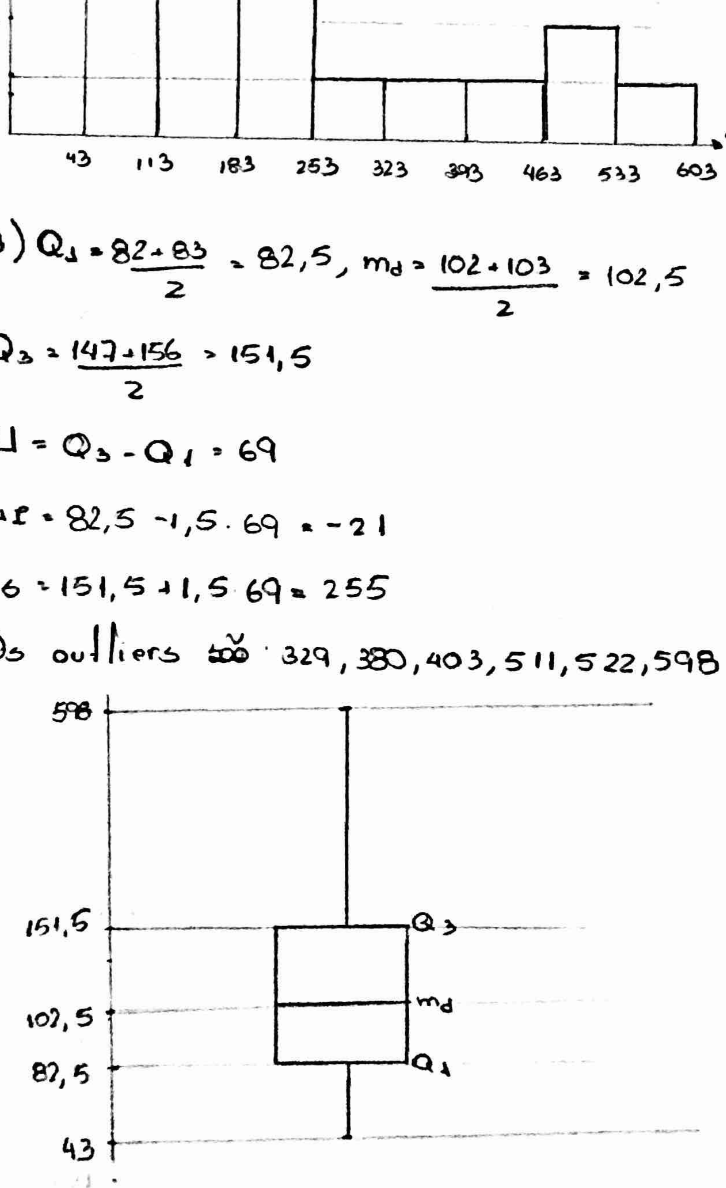
$Q_3 = \frac{147+156}{2} = 151,5$

$II = Q_3 - Q_1 = 69$

$LI = 82,5 - 1,5 \cdot 69 = -21$

$LS = 151,5 + 1,5 \cdot 69 = 255$

Os outliers são: 329, 380, 403, 511, 522, 598.



9) Verifiquemos se os estimadores são justos.

$E(\hat{\theta}_1) = E(x_1) = \mu \therefore \hat{\theta}_1$ é justo

$E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2} E(x_1 + x_5) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu \therefore \hat{\theta}_2$ é justo

$E(\hat{\theta}_3) = \frac{1}{2} E(x_1 + 2x_5) = \frac{3\mu}{2} \therefore \hat{\theta}_3$ não é justo

$E(\hat{\theta}_4) = \frac{1}{5} E(x_1 + x_2 + \dots + x_5) = \frac{5\mu}{5} \therefore \hat{\theta}_4$ é justo

Como $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ e $\hat{\theta}_4$ são justos, vamos comparar suas consistências:

$V(\hat{\theta}_1) = V(x_1) = \sigma$

$V(\hat{\theta}_2) = V\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{4} 2 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

$V(\hat{\theta}_4) = V\left(\frac{1}{5}(x_1 + x_2 + \dots + x_5)\right) = \frac{1}{25} 5\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{5}$

$\frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2/2} = 2 \therefore \underbrace{V(\hat{\theta}_1) > V(\hat{\theta}_2)}_{\hat{\theta}_2 \text{ é mais eficiente que } \hat{\theta}_1}$

$\frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_4)} = \frac{\sigma^2/2}{\sigma^2/5} = 2,5 \therefore \underbrace{V(\hat{\theta}_4) < V(\hat{\theta}_2)}_{\hat{\theta}_4 \text{ é mais eficiente que } \hat{\theta}_2}$

Portanto o melhor estimador é o $\hat{\theta}_4$.

Note que se analisarmos a suficiencia, também encontraremos que $\hat{\theta}_4$ é o melhor estimador já que utiliza mais informações da amostra que $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$.

10) Utilizaremos a distribuição χ^2_r. Sabemos que $\chi^2_r = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ e que $E(\chi^2_r) = r$, onde r é o número de elementos. Sabemos que $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$ segue uma dist. $\chi^2_{n-1} \therefore E(\chi^2_{n-1}) = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = E\left(\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \Rightarrow (n-1)\sigma^2 = E\left(\sum(x_i - \mu)^2\right)$

Do estimador $\hat{\theta}$: $E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}\right) =$

$= \dfrac{E(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)}{n} \Rightarrow E(\hat{\Theta}) = \dfrac{(n-1)\sigma^2}{n}$

$\therefore$ o estimador $\hat{\Theta}$ é viciado.

13) $E(\bar{x}) = E\left(\dfrac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}\right) = \dfrac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \dfrac{n\mu}{n} = \mu$

$V(\bar{x}) = V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \dfrac{n\sigma^2}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Se $x_i \sim N$, pelo Teorema da Combinação Linear, $\bar{x} \sim N$.

Se $n \geq 30$, pelo Teorema do Limite Central, $\bar{x} \overset{\sim}{\sim} N$.

14) $P(|\bar{x}-\mu| \leq a) = \alpha \Rightarrow P\left(\dfrac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \dfrac{\overset{\text{erro}}{a}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$

$P\left(Z \leq \dfrac{a_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,9 \therefore \dfrac{a_1}{\sigma/\sqrt{n}} = 1,65 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1,65\,\sigma}{\sqrt{n}}$

$P\left(Z \leq \dfrac{a_2}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,95 \therefore \dfrac{a_2}{\sigma/\sqrt{n}} = 1,96 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}}$

$P\left(Z \leq \dfrac{a_3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,99 \therefore \dfrac{a_3}{\sigma/\sqrt{n}} = 2,58 \Rightarrow a_3 = \dfrac{2,58\,\sigma}{\sqrt{n}}$

15) a) $a_2 = \dfrac{1,96 \cdot 5}{6} = 1,63$

$I = [\bar{x}-a_2 ; \bar{x}+a_2] = [6,37 ; 9,63]$

b) $a_1 = \dfrac{1,65 \cdot 5}{6} = 1,375$

$I = [\bar{x}-a_1 ; \bar{x}+a_1] = [6,625 ; 9,375]$

c) $a_3 = \dfrac{2,58 \cdot 5}{6} = 2,15$

$I = [\bar{x}-a_3 ; \bar{x}+a_3] = [5,85 ; 10,15]$

16) $\bar{x} = 10$

I) $e = \dfrac{1,96 \cdot 4}{3} = 2,613$

$I_c = [7,39 ; 12,61]$

II) $e = \dfrac{1,96 \cdot 12}{3} = 7,84 \therefore I_c = [2,16 ; 17,84]$

III) $e = \dfrac{1,96 \cdot 5}{4} = 2,45 \therefore I_c = [7,55 ; 12,45]$

IV) $e = \dfrac{1,96 \cdot 5}{10} = 0,98 \therefore I_c = [9,02 ; 10,98]$

V) $e = \dfrac{2,58 \cdot 8}{5} = 4,128 \therefore I_c = [5,872 ; 14,128]$

VI) $e = \dfrac{1,96 \cdot 8}{5} = 3,136 \therefore I_c = [6,864 ; 13,136]$

De (I) → (II), como houve um aumento de σ então o intervalo de confiança aumenta.

De (III) → (IV), como houve um aumento no tamanho da amostra então há uma diminuição do intervalo de confiança.

De (V) → (VI), como houve uma diminuição de α, então houve uma diminuição no intervalo de confiança.

a) $\sigma = 5cm$; $n = 36$, $\bar{x} = 150cm$, $1-\alpha = 95\%$

$e = \dfrac{1,96 \cdot 5}{6} = 1,63 \therefore I_c = [148,37 , 151,63]$

b) $e = 0,98 \Rightarrow 0,98 = \dfrac{1,96 \cdot 5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{1,96 \cdot 5}{0,98} \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 100$

17) a) $\dfrac{\alpha}{2} = 0,475 \Rightarrow \alpha = 0,95$

b) $\dfrac{\alpha}{2} = 0,4495 \Rightarrow \alpha = 0,899$

18) $n = 20$; $\bar{x} = 587,25$; $\sigma = 93,76$

$e_0 = \dfrac{1,96 \cdot 93,76}{\sqrt{20}} = 41,091$

$I_c = [546,159 ; 628,341]$

19) $e = 25 \Rightarrow 25 = \dfrac{1,65 \cdot 93,76}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{1,65 \cdot 93,76}{25}$

$\Rightarrow n \cong 39$

20) a) A: $\bar{x} = 10min$; $n = 50$, $\sigma = 10$

$e = \dfrac{1,75 \cdot 10}{\sqrt{50}} \cong 2,475 \therefore I_c = [-7,525 ; 12,475]$

b) $\mathcal{B}: n = 70,\ \bar{T} = 12,\ \sigma = 10$

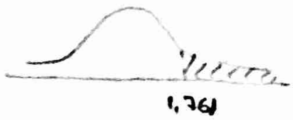
$e = \dfrac{1{,}75 \cdot 10}{\sqrt{70}} = 2{,}09$ $\quad I_c = [9{,}91 ; 14{,}09]$

21) a) $w_\alpha = t_{9;5\%} = 1{,}833$

$P(|w| \geq w_\alpha) = 10\%$

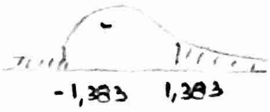
b) $w_\alpha = t_{14;5\%} = 1{,}761$

$P(|w| \geq w_\alpha) = 10\%$



c) $w_\alpha = t_{9;10\%} = 1{,}383$

$P(w \geq w_\alpha \text{ ou } w \leq -w_\alpha) = 10\%$



22) a) $e = \dfrac{2{,}33 \cdot 3{,}1}{3} \Rightarrow e = 2{,}4077$

$\bar{x} = 30{,}9375$

$IC = [28{,}5298 ; 33{,}3452]$

23) $\bar{x} = 293{,}16$, $s = 46{,}67$ ← t-Student

$e = \dfrac{t_{141;2,5\%} \cdot s}{\sqrt{142}} = \dfrac{1{,}96 \cdot 46{,}67}{\sqrt{142}} = 7{,}676$

$IC = [285{,}484 ; 300{,}836]$.

24) b) $\bar{x} = 0{,}545$; $s = 0{,}635$ ← t-Student

$e = \dfrac{t_{9999;1\%} \cdot s}{\sqrt{10000}} = \dfrac{2{,}326 \cdot 0{,}635}{\sqrt{10000}} =$

$= 0{,}01477$

$IC = [0{,}53023 ; 0{,}55977]$.

25) $\bar{x} = 3{,}2$, $s^2 = 4 \Rightarrow s = 2$; $n = 18$

$e = \dfrac{t_{17;1\%} \cdot s}{\sqrt{18}} = \dfrac{2{,}567 \cdot 2}{\sqrt{18}} = 1{,}21$

$IC = [1{,}99 , 4{,}41]$