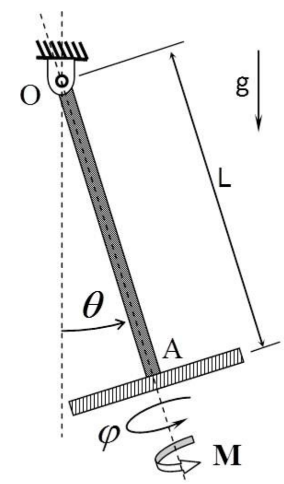
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Prova Substitutiva de Mecânica B – PME 2200 – 03/07/2012

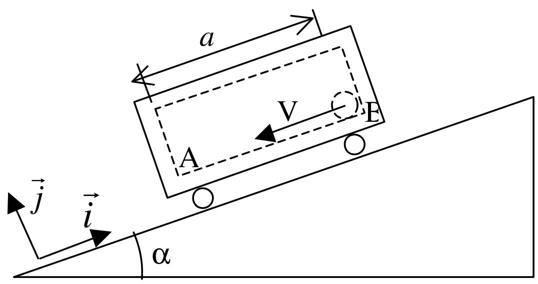
Tempo de prova: 100 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)

1º Questão (3,5 pontos) O disco de raio R, massa m e centro em A, gira em torno da haste AO que se move no plano da figura devido à ação do pino no ponto O. Entre a haste e o mancal em O, existe uma mola torcional de constante k e um amortecedor torcional viscoso com coeficiente de viscosidade c. Um torque M acelera o disco que tem velocidade angular $\dot{\varphi}$. Considerando a massa da haste desprezível, pede-se:



a) Energia cinética do disco;
b) Energia potencial do disco;
c) Forças generalizadas atuantes no disco;
d) Obter as equações de movimento do disco utilizando a formulação de Lagrange para as coordenadas generalizadas θ e φ.

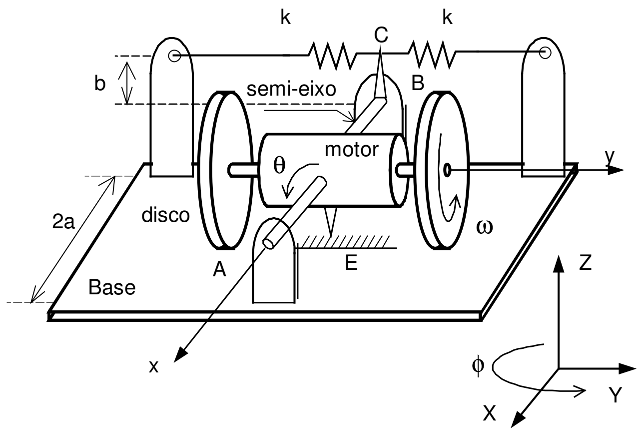
2º Questão (3,5 pontos) Um carro de massa *M* e comprimento interno *a* pode mover-se ao longo de uma rampa inclinada de um ângulo α em relação à horizontal. Sobre sua base inferior *AB* há uma partícula esférica de massa *m* que se movimenta sem atrito. No instante inicial a partícula está no ponto B, com velocidade *V* na direção de *A*. Neste mesmo instante, o carro é abandonado sem velocidade inicial. O coeficiente de restituição para o choque dos materiais da esfera e do carro é ***e***. Nessas condições, pede-se:



(a) A aceleração da partícula e do carro;
(b) O intervalo de tempo até o primeiro choque;
(c) A velocidade da partícula imediatamente após o primeiro choque;
(d) Idem (item b e c) após o segundo choque;
(e) As velocidades relativas sucessivas até o *n-ésimo* choque;
(f) O tempo decorrente entre o instante inicial e o de ocorrência do *n-ésimo* choque;
(g) Admitindo que u_n e v_n sejam, respectivamente, as velocidades do carro e da partícula antes do *n-ésimo* choque, determinar as suas velocidades após a ocorrência desse evento (ou seja, do *n-ésimo* choque).

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

3º Questão (3,0 pontos)



Helicópteros possuem um sensor que mede a velocidade angular baseado no efeito giroscópico, sendo utilizado para controlar a sua atitude rotacional $\dot{\phi}$ em torno do eixo vertical. O rotor do sensor é composto por um motor elétrico e dois discos fixados no eixo. A carcaça do motor elétrico é apoiada por dois semi-eixos sobre os mancais A e B, espaçados da distância 2a, conforme mostrado na figura. Os semi-eixos são perpendiculares ao eixo do motor elétrico que mantêm a velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$ do rotor constante. Duas molas de rigidez *k* fixadas no ponto C, solidário ao semi-eixo, têm deformação nula na posição $\vec{\theta} = \theta\vec{i} = 0$ (quando $\dot{\phi} = 0$ o braço BC está na vertical). As molas podem ser consideradas ideais e estão instaladas paralelas à base do sensor. Quando o helicóptero realiza uma manobra em torno do seu eixo vertical $\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi}\vec{K}$, a base do sensor é arrastada alterando a posição angular $\vec{\theta}$ do rotor, permitindo a identificação da velocidade angular $\dot{\phi}$ no indicador angular E. Sabendo-se que a matriz de inércia do rotor é diagonal com momentos centrais *I, J, I* e utilizando o sistema de coordenadas móvel, pede-se:

a) Determinar a velocidade angular absoluta do rotor do sensor;
b) Deduzir as equações diferenciais do movimento angulare do rotor utilizando o Teorema do Momento Angular (TMA);
c) Obter a relação entre a velocidade angular $\dot{\phi}$ de manobra do helicóptero e o ângulo de equilíbrio θ do rotor do sensor, admitindo $\ddot{\theta}$ desprezível;

Resolução da 1º Questão (3,5 pontos)

- Energia cinética: Assumindo sistema de coordenadas com eixo *Oy* na direção da barra *OA* e eixo *Ox* perpendicular ao plano do desenho

$$T = T_{Disco} = \frac{1}{2} m\vec{V}_A.\vec{V}_A + m\vec{V}_A.[\vec{\omega}\wedge(A-A)] + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^t[I_A]\{\vec{\omega}\},$$

em que $\vec{V}_A = \vec{V}_O + \dot{\theta}\,\vec{i} \wedge (A-O) = \dot{\theta}\,L\,\vec{k}$ e $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{i} + \dot{\varphi}\,\vec{j}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\varphi} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ 0\end{bmatrix}, \text{ em que } I = \frac{mR^2}{4} \text{ e } J = \frac{mR^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2} \qquad (1{,}0)$$

- Energia potencial: $V = V_{El} + V_{Grav} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{1}{2} k\theta^2 + mg(L - L\cos\theta)}$ (1,0)

$$\Rightarrow \boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} k\theta^2 - mg(L - L\cos\theta)}$$

- Função de dissipação de Rayleigh: $\boxed{R = \frac{1}{2} c\dot{\theta}^2}$ (0,5)

- Forças generalizadas: $\delta W = M\delta\varphi \quad \Rightarrow Q_\theta = 0$ e $Q_\varphi = M$ (0,5)

- Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \text{ com } q_1 = \theta \text{ e } q_2 = \varphi$$

Para θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}L^2 + I\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k\theta + mgLsen\theta) \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = c\dot{\theta}$$

$$\boxed{mL^2\ddot{\theta} + \frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} + k\theta + mgLsen\theta + c\dot{\theta} = 0}$$

Para φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{mR^2}{2}\ddot{\varphi} = M} \qquad (0{,}5)$$

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

Resolução da 2º Questão (3,5 pontos)

Como a esfera e o carro estão sujeitos à mesma aceleração (0,5)

$$a' = g \sin \alpha ,$$

o primeiro choque da esfera com o carro ocorre após o intervalo de tempo (0,5)

$$t_1 = \frac{a}{V} .$$

Imediatamente após esse choque, a velocidade relativa da esfera muda para: (0,5)

$$V_1 = -eV .$$

Conclui-se que as velocidades relativas sucessivas serão: (0,5)

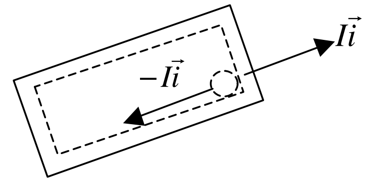
$$v_{r1} = V$$
$$v_{r2} = -eV$$
$$v_{r3} = e^2 V$$
$$\ldots$$
$$v_{rn} = (-e)^{n-1} V$$

e que os intervalos de tempo que separam dois choques sucessivos serão: (0,5)

$$t_1 = \frac{a}{V}$$
$$t_2 = \frac{a}{eV}$$
$$\ldots$$
$$t_n = \frac{a}{e^{n-1}V}$$

Portanto, o tempo t(0, n) decorrente desde o instante inicial até a ocorrência do n-ésimo choque será:

$$t(0,n) = \frac{a}{V} + \frac{a}{eV} + \frac{a}{e^2V} \cdots + \frac{a}{e^{n-1}V} = \frac{a}{V}\left(1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}}\right).$$ (0,5)



Para o sistema material constituído pelo carro e pela esfera, os únicos impulsos atuantes durante os eventos de choque são os impulsos internos $I\vec{i}$ e $-I\vec{i}$ indicados na figura ao lado.
No instante inicial, a quantidade de movimento desse sistema é:

$$\vec{Q} = -mV\vec{i}$$

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

Portanto, a quantidade de movimento desse sistema após um intervalo de tempo *t*, é dada por:

$$\vec{Q} = -[mV + (m+M)g \sin \alpha t]\vec{i}$$

Como são dadas as velocidades u_n e v_n do carro e da esfera, imediatamente antes do *n-ésimo* choque, pode-se escrever:

$$-(Mu_n + mv_n)\vec{i} = -[mV + (m+M)g \sin \alpha t(0,n)]\vec{i}$$

$$\therefore Mu_n + mv_n = mV + (m+M)g \sin \alpha t(0,n)$$

E como a quantidade de movimento do sistema se conserva durante o evento do choque, resulta:

$$Mu'_n + mv'_n = mV + (m+M)g \sin \alpha \frac{a}{V}\left(1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}}\right) \qquad (1)$$

Para o *n-ésimo* choque, tem-se:

$$v'_n - u'_n = (-e^n)V \qquad (2)$$

Resolvendo-se o sistema de equações 1-2, obtêm-se: (0,5)

$$u'_n = \frac{m}{M+m}\left[1 - (-e)^n\right]V + g \sin \alpha \frac{a}{V}\left(1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}}\right)$$

$$v'_n = \frac{m + M(-e)^n}{M+m} V + g \sin \alpha \frac{a}{V}\left(1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}}\right)$$

Resolução da 3º Questão (3,0 pontos)

a) $\vec{\Omega}_{abs} = \omega_{rel} + \omega_{arr} = (\dot{\theta}\,\vec{i} + \omega\,\vec{j}) + \dot{\phi}\,\vec{K}$ (0,5 pontos)

b) Aplicando o TMA no baricentro do rotor, considerando o referencial móvel G$\vec{i}\;\vec{j}\,\vec{k}$ e apenas o movimento angular constante do helicóptero no plano horizontal, ou seja $\vec{K} = \cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right) = \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix} \right) = \vec{M}_G$$ (0,5 pontos)

Considerando a velocidade angular de arrastamento $\dot{\phi}\,\vec{K} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})$, a variação temporal dos versores do referencial móvel são:

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \dot{\phi}(\cos\theta\,\vec{k} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}) \wedge \vec{i} = \cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\vec{k}$;

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = -\cos\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\vec{i}$ resultando em:

$$\boxed{\begin{aligned} & J_x\,\ddot{\theta} + (J_z \operatorname{sen}\theta - J_y \cos\theta)\,\dot{\phi}\,\omega = M_x \\ & J_y \frac{d}{dt}(\omega + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta) + J_x \cos\theta\,\dot{\phi}\,\omega = M_y \\ & J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi}\cos\theta) - J_x \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\omega = M_z \end{aligned}}$$ (0,5 pontos)

As reações dos mancais A e B produzem momento nas direções $\vec{j}\,e\,\vec{k}$ e o momento das molas na direção $\vec{i}$, consideradas paralelas à base, tem magnitude $M_x = -2kb^2 \operatorname{sen}\theta$. Em torno de pequenos ângulos a primeira equação resulta em:

$J_x\,\ddot{\theta} - J_y\,\dot{\phi}\,\omega = -2kb^2\theta$ ou $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2kb^2}{J_x}\theta = \frac{J_y}{J_x}\omega\dot{\phi}}$ (0,5 pontos)

c) Para aceleração angular do rotor desprezível ($\ddot{\theta} \approx 0$) e em torno de pequenos ângulos, obtêm-se a função de sensibilidade do sensor:

$$\boxed{\theta = \frac{J_y\,\omega}{2k\,b^2}\dot{\phi}}$$ (1,0 pontos)