

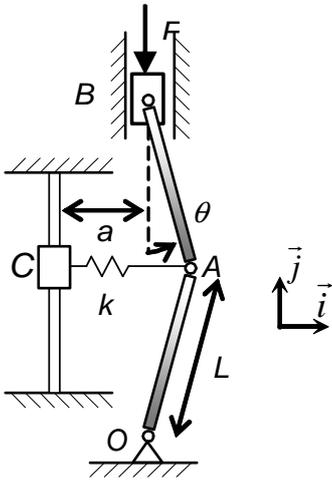


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mecânica B – PME 2200 – 2ª Prova – 14/05/2013

Duração da Prova: 110 minutos

(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)



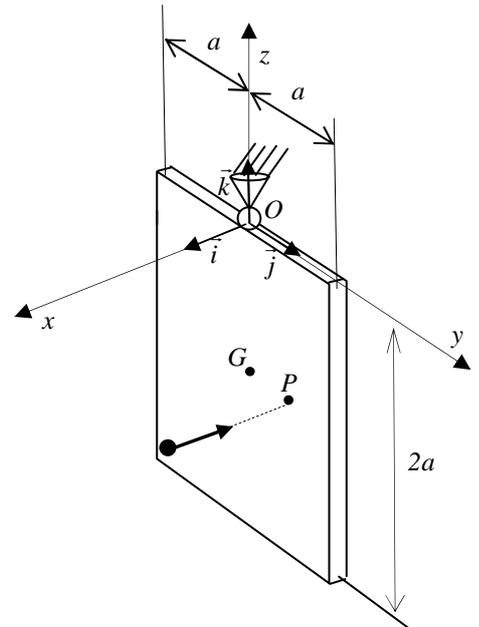
QUESTÃO 1 (3,0 pontos) . Considere que o dispositivo mecânico ilustrado ao lado situa-se no plano horizontal, ou seja, que a direção do campo gravitacional seja perpendicular ao plano da figura. Esse dispositivo é constituído por duas barras rígidas OA e AB de comprimentos L , articuladas em O , A e B . Um pistão ligado à barra em B montado ao longo de uma guia linear, é submetido a uma força F . Uma mola de constante elástica k é ligada por suas extremidades à articulação A e a um anel C , restrito a mover-se ao longo de uma guia linear. A mola tem comprimento natural a quando as barras estão alinhadas na direção das guias lineares. Admita que todos os vínculos sejam ideais. Pede-se:

- utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), determine o ângulo θ_{eq} de equilíbrio do sistema;
- explique porque não é necessário o conhecimento das massas dos componentes do sistema.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos). Uma placa quadrada fina de massa M e lados $2a$ está em equilíbrio suspensa por uma rótula em O . Um projétil de massa $m = M/3$ e dimensões desprezíveis é disparado com velocidade $\vec{v} = -v_x \vec{i}$ ($v_x = const$) em direção ao ponto $P(0, a/2, -a)$ da placa. Admita que o choque seja perfeitamente elástico. Pede-se:

- construir a matriz de inércia da placa no sistema cartesiano $Oxyz$ a ela solidário;
- determinar o vetor rotação da placa imediatamente após o choque;
- determinar a posição do ponto P imediatamente após o choque;
- desenhar o eixo instantâneo de rotação da placa imediatamente após o choque.

São dados: $J_{Gx} = \frac{2}{3}Ma^2$, $J_{Gy} = \frac{1}{3}Ma^2$, $J_{Gz} = \frac{1}{3}Ma^2$





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). Uma barra delgada de comprimento L e massa M está articulada em O . A barra é abandonada a um ângulo θ_0 , sujeita à ação gravitacional até colidir com a partícula A no ponto C . A partícula A tem massa m , posição vertical $u(t)$ e apoia-se sobre uma mola de rigidez k . O comprimento da mola quando sujeita ao peso da massa m é u_0 , conforme mostrado na figura ao lado. Considerando as mesmas hipóteses do enunciado do EMSC#2, responda as seguintes questões:

- descreva o critério por você adotado para identificar os eventos de choque em seu programa de simulação;
- identifique as variáveis dos gráficos temporais apresentados nas figuras **a**, **b**, **c**, e **d**;
- reproduza em sua folha de respostas o gráfico por você identificado no item (b) como aquele correspondente a $\omega(t) = \dot{\theta}$, e nele indique os instantes em que ocorrem eventos de choque;
- no gráfico correspondente à velocidade $\dot{u}(t)$, identifique pontos de máximo (ou de mínimo) locais muito próximos entre si, e apresente sua interpretação para estas ocorrências.

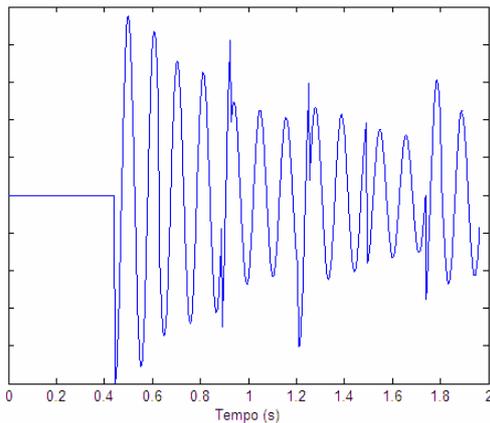
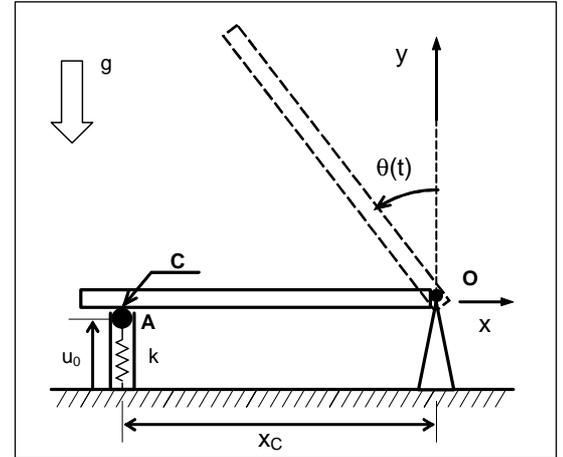


Figura (a)

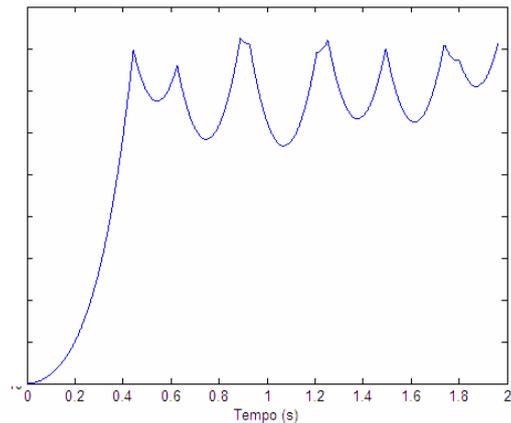


Figura (b)

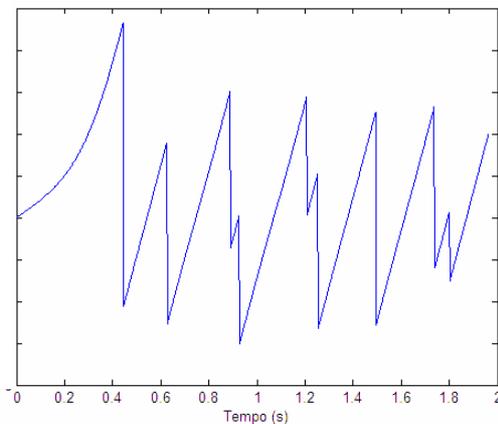


Figura (c)

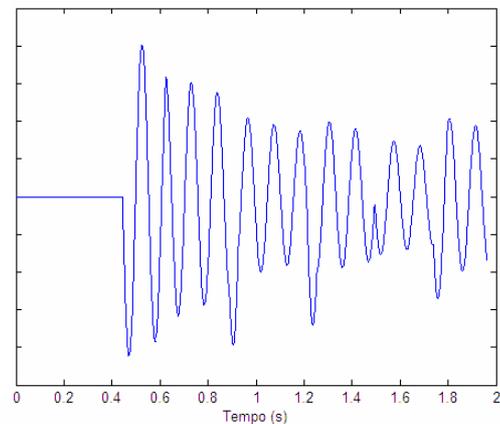


Figura (d)



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

(a) Determinação do ângulo de equilíbrio

Para determinar o ângulo de equilíbrio do sistema utilizamos a metodologia descrita nos itens a-1 a-5, abaixo:

a-1) Notamos que o mecanismo tem um único grau de liberdade e que, portanto, quaisquer de suas configurações podem ser obtidas mediante variações de uma única coordenada generalizada como, por exemplo, o ângulo θ .

a-2) Utilizando θ escrevemos as equações vinculares que restringem o movimento do mecanismo:

$$x_A = L \sin \theta \quad y_B = 2L \cos \theta$$

a-3) Dentre os possíveis deslocamentos virtuais, adotamos deslocamentos infinitesimais compatíveis com os vínculos, a saber:

$$\delta x_A = L \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta y_B = -2L \sin \theta \delta \theta$$

a-4) Fazemos o diagrama de forças de corpo livre do sistema (figura ao lado) e explicitamos aquelas que realizam trabalho não nulo – no caso, a força aplicada F e a força elástica F_m dada por:

$$F_m = -kx_A = -kL \sin \theta$$

a-5) Determinamos o trabalho virtual realizado por essas forças em um deslocamento virtual $\delta \theta$:

$$\delta W = F_m \cdot \delta x_A + F \cdot \delta y_B = -kL \sin \theta \cdot L \cos \theta \delta \theta - F(-2L \sin \theta \delta \theta)$$

$$\Rightarrow \delta W = -kL^2 \sin \theta \cos \theta \delta \theta + 2FL \sin \theta \delta \theta$$

$$\Rightarrow \delta W = (-kL^2 \cos \theta + 2FL) \sin \theta \delta \theta$$

a-6) Aplicamos o Princípio dos Trabalhos Virtuais ao sistema em foco: para que ele esteja em equilíbrio é necessário que o trabalho virtual seja nulo para qualquer deslocamento virtual arbitrário $\delta \theta$.

$$\delta W = (-kL^2 \cos \theta \delta \theta + 2FL) \sin \theta \delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ -kL^2 \cos \theta + 2FL = 0 \end{cases}$$

Dessa forma, determinamos os valores de θ compatíveis com o equilíbrio do mecanismo, a saber:

$$\theta = 0 \text{ e } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{2F}{kL} \right)$$

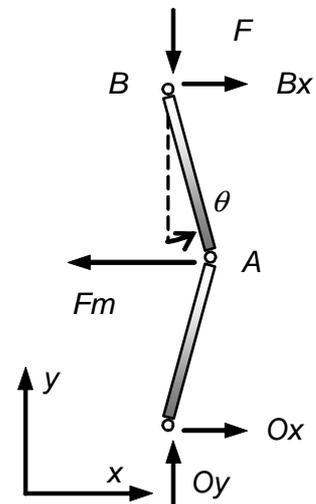
Observemos que a função \cos^{-1} fornece duas soluções possíveis para θ – uma positiva, outra negativa.

(2,5)

(b) Papel da força peso na determinação das configurações de equilíbrio do mecanismo

Como o mecanismo plano opera perpendicularmente à direção do campo gravitacional, a força peso não realiza trabalho para quaisquer deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos; logo, não se faz necessário conhecer as massas de seus componentes.

(0,5)





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

Sendo desprezível a espessura da placa, os seus momentos de inércia em relação aos eixos Gx , Gy e Gz são dados, respectivamente, por:

$$J_{Gx} = \frac{M}{12} [(2a)^2 + (2a)^2] = \frac{2}{3} Ma^2,$$

$$J_{Gy} = \frac{M}{12} [0^2 + (2a)^2] = \frac{M}{3} a^2,$$

$$J_{Gz} = \frac{M}{12} [(2a)^2 + 0^2] = \frac{M}{3} a^2$$

Logo, os momentos de inércia da placa, em relação aos eixos Ox , Oy e Oz são:

$$J_{Ox} = J_{Gx} + Md_{Gx.Ox}^2 = \frac{2}{3} Ma^2 + Ma^2 = \frac{5}{3} Ma^2$$

$$J_{Oy} = J_{Gy} + Md_{Gy.Oy}^2 = \frac{M}{3} a^2 + Ma^2 = \frac{4}{3} Ma^2$$

$$J_{Oz} = J_{Gz} + Md_{Gz.Oz}^2 = \frac{M}{3} a^2 + M \cdot 0^2 = \frac{M}{3} a^2$$

A matriz de inércia da placa fina, referida ao pólo O é:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{3} a^2 \end{bmatrix}$$

(0,5)

O momento impulsivo em relação ao pólo O , devido ao choque do projétil contra a placa, é:

$$\vec{M}_O = (\vec{P} - O) \wedge I(-\vec{i}) = \left(\frac{a}{2} \vec{j} - a\vec{k} \right) \wedge I(-\vec{i}) = I \left(a\vec{j} + \frac{a}{2} \vec{k} \right)$$

Aplicando-se o teorema da resultante dos impulsos, com relação ao pólo O , resulta:

$$[J_O][\Delta\omega] = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{3} Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{3} a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Ia \\ \frac{Ia}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{5}{3} Ma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{4}{3} Ma^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\frac{M}{3} a^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -Ia \\ \frac{Ia}{2} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3I}{4Ma} \\ \frac{3I}{2Ma} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega} + \Delta\vec{\omega} = \vec{0} + \Delta\vec{\omega} = \frac{3I}{4Ma} \vec{j} + \frac{3I}{2Ma} \vec{k}$$

A variação da velocidade do ponto P da placa em contacto com o projétil, ao longo da normal de choque, é:

$$\Delta u_P = \Delta \vec{v}_P \cdot \vec{n}_{placa} = \Delta \vec{v}_P \cdot (-\vec{i}) = [-\Delta\vec{\omega} \wedge (P-O)] \cdot \vec{i}$$

$$\Rightarrow \Delta u_P = \left\{ - \left[\frac{3I}{4Ma} \vec{j} + \frac{3I}{2Ma} \vec{k} \right] \wedge \left(\frac{a}{2} \vec{j} + a\vec{k} \right) \right\} \cdot \vec{i}$$

$$\Rightarrow \Delta u_P = \frac{3I}{4M} + \frac{3I}{4M} = \frac{3I}{2M}$$

Aplicando-se o teorema da resultante dos impulsos ao movimento do projétil (assimilável a um ponto P'), tem-se:

$$m\Delta \vec{v}_{P'} = \vec{I}_{projétil} \Rightarrow \Delta \vec{v}_{P'} = \frac{\vec{I}}{m}$$

A variação da velocidade do projétil ao longo da normal de choque, é:

$$\Delta u_{P'} = \Delta \vec{v}_{P'} \cdot \vec{n}_{projétil} = \Delta \vec{v}_{P'} \cdot \vec{i} = \frac{I}{m}$$

Portanto, a velocidade relativa de afastamento dos corpos, imediatamente após o choque, é:

$$\Delta u = \Delta u_P + \Delta u_{P'} = I \cdot \left[\frac{1}{m} + \frac{3}{2M} \right] = I \cdot \left(\frac{3}{M} + \frac{3}{2M} \right) = \frac{9}{2} \frac{I}{M}$$

Como a velocidade de aproximação dos corpos é

$$u = \vec{v}_P \cdot \vec{n}_{placa} + \vec{v}_{P'} \cdot \vec{n}_{projétil} = \vec{0} \cdot (-\vec{i}) + (-v\vec{i}) \cdot \vec{i} = -v$$

e o choque é perfeitamente, elástico, de modo que

$$u' = -e \cdot u = -u = v,$$

a velocidade relativa de afastamento entre os corpos é:

$$\Delta u = u' - u = v - (-v) = 2v$$

Com isso, ficam determinados o momento impulsivo e o vetor rotação instantânea da placa imediatamente após o choque, a saber:

$$I = \frac{2}{9} Mv$$

$$\vec{\omega}' = \frac{2}{9} Mv \cdot \left[\frac{3}{4Ma} \vec{j} + \frac{3}{2Ma} \vec{k} \right] = \frac{1}{3} \frac{v}{a} \left(\frac{1}{2} \vec{j} + \vec{k} \right)$$

(1,5)

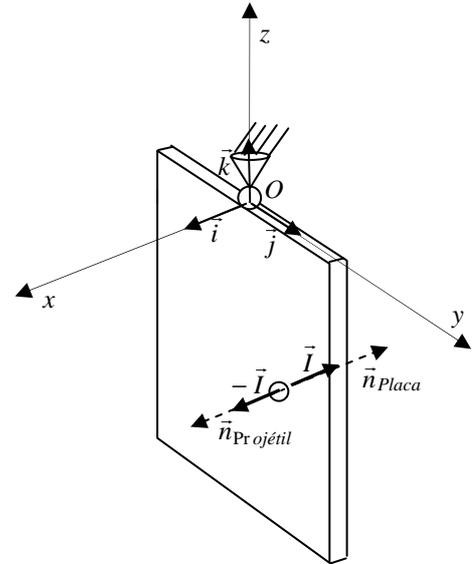
A teoria de choque e percussões admite como hipóteses fundamentais as seguintes:

1ª) durante eventos de choque, de duração $\Delta t \rightarrow 0$, as forças de contacto entre os corpos assumem valores $F(t) \rightarrow \infty$ não determinados, porém o valor limite da integral

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t) dt, \text{ para } \Delta t \text{ tendendo a zero, é limitado, ou seja:}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t) dt = I$$

2ª) durante o curto intervalo de tempo Δt em que ocorre o choque, a velocidade \vec{v}_i de qualquer ponto P_i pertencente a quaisquer dos corpos que se chocam sofre variação limitada $\Delta \vec{v}_i$, de modo que a variação de sua posição, para Δt tendendo a 0, é nula, ou seja:



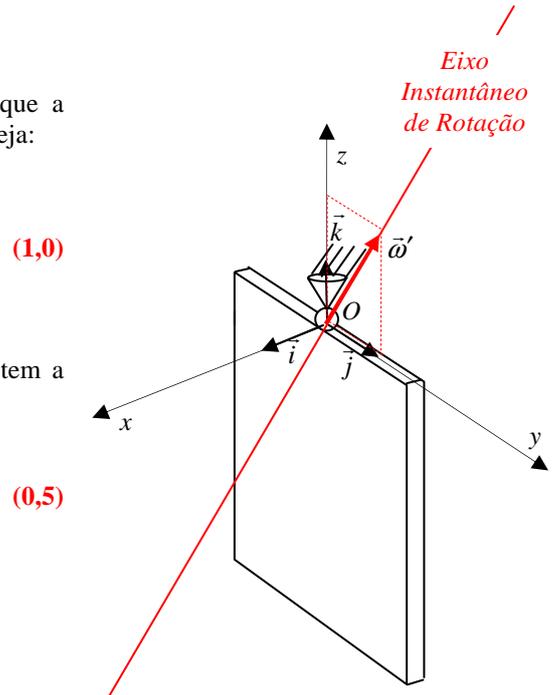


$$\Delta \vec{P}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{v}_i \Delta t = 0.$$

Portanto, tomando por referência a segunda hipótese acima, conclui-se que a posição do ponto P se mantém inalterada imediatamente após o choque, ou seja:

$$P' = P = \left(0, \frac{a}{2}, -a \right)$$

O novo eixo instantâneo de rotação da placa passa pelo ponto fixo O e tem a direção de $\vec{\omega}'$, conforme representado na figura ao lado:



(1,0)

(0,5)

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

OBS: Embora não tenha sido solicitado na prova que se reproduzisse a metodologia de modelagem matemática do problema enunciado no EMSC#2, considerou-se oportuno apresentá-la neste documento, de modo a facilitar a sua compreensão.

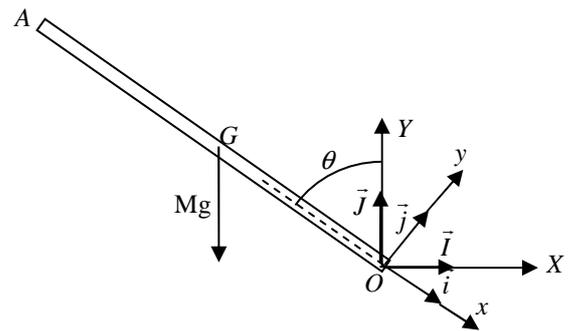
A) Modelagem do problema

O movimento da barra entre dois choques sucessivos é determinado a partir da integração da equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, a saber:

$$[J_O] \cdot [\dot{\omega}] = \vec{M}_O^{ext} \quad (1)$$

Sendo a barra delgada, a sua matriz de inércia referida ao pólo O e descrita no sistema $Oxyz$, é:

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ML^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$



O momento das forças externas em relação ao pólo O , é:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{ext} &= (G - O) \wedge (-Mg\vec{j}) = -\frac{L}{2}\vec{i} \wedge (-Mg\vec{j}) = \frac{MLg}{2}\vec{i} \wedge [(\vec{j}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{j}\cdot\vec{j})\vec{j}] = \frac{MLg}{2}\vec{i} \wedge [\cos(180 - \theta)\vec{i} + \cos(90 - \theta)\vec{j}] \\ \Rightarrow \vec{M}_O^{ext} &= \frac{MLg}{2}\vec{i} \wedge [-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] = \frac{MLg \sin\theta}{2}\vec{k} \quad (3) \end{aligned}$$

Dessa forma, a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento fica:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

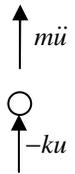
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ML^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \frac{MLg \sin \theta}{2} \vec{k} \Rightarrow \frac{ML^2}{3} \dot{\omega}_z \vec{k} = \frac{MLg \sin \theta}{2} \vec{k} \quad (4)$$

Logo, a equação diferencial que governa o movimento da barra entre dois choques sucessivos, é:

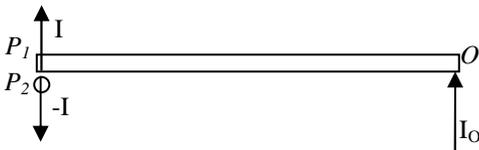
$$\ddot{\theta} = \frac{3g \sin \theta}{2L} \quad (5)$$

O movimento da partícula entre dois choques sucessivos é obtido a partir da integração da equação do Teorema do Movimento do Baricentro, a saber:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (6)$$



A cada evento de choque o sistema barra-partícula fica sujeito aos impulsos indicados na figura abaixo



Nesses eventos, as velocidades do ponto P_1 pertencente à barra e do ponto P_2 , representando a partícula, são, respectivamente:

$$\vec{v}_{P_1} = \omega \vec{k} \wedge (-L\vec{i}) = -\omega L \vec{j} \quad (7)$$

$$\vec{v}_{P_2} = \dot{u} \vec{j} \quad (8)$$

Projetando essas velocidades na direção da normal de choque, obtém-se a velocidade U de P_1 relativa a P_2 , imediatamente antes do choque, ou seja:

$$U = -\omega L + \dot{u} \quad (9)$$

Aplicando-se à barra o Teorema do Momento dos Impulsos, resulta:

$$J_{O_z} \Delta \bar{\omega} = (P_1 - O) \wedge \vec{I} \vec{j} = (-L\vec{i}) \wedge \vec{I} \vec{j} = -LI \vec{k} \Rightarrow \Delta \bar{\omega} = -\frac{L}{J_{O_z}} I \vec{k} \quad (10)$$

Portanto, a projeção da variação da velocidade de P_1 segundo a normal de choque da barra é dada por:

$$\Delta u_1 = \Delta \bar{\omega} \wedge (P_1 - O) \cdot \vec{j} = -\frac{L}{J_{O_z}} I \vec{k} \wedge (-L\vec{i}) \cdot \vec{j} = \frac{L^2}{J_{O_z}} I \quad (11)$$

Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos à partícula, tem-se:

$$\Delta \vec{v}_{P_2} = -\frac{\vec{I} \vec{j}}{m} \quad (12)$$

Portanto, a projeção da variação da velocidade de P_2 segundo a normal de choque da partícula é dada por:

$$\Delta u_2 = -\frac{\vec{I} \vec{j} \cdot (-\vec{j})}{m} = \frac{I}{m} \quad (13)$$

Logo, a projeção da variação da velocidade de aproximação dos pontos de contacto P_1 e P_2 , é:

$$\Delta U = \Delta u_1 + \Delta u_2 = \left(\frac{1}{m} + \frac{L^2}{J_{O_z}} \right) \cdot I \quad (14)$$

A velocidade de afastamento entre os pontos de contacto P_1 e P_2 imediatamente após o choque é:

$$U' = -eU \quad (15)$$



Logo, a variação da velocidade relativa dos pontos de contacto entre os corpos, durante o choque, é dada por:

$$\Delta U = U' - U = -eU - U = -(1+e)U \quad (16)$$

O impulso aplicado aos corpos que se chocam é dado por:

$$I = -\frac{1+e}{\frac{1}{m} + \frac{L^2}{J_{O_z}}} U = -\frac{1+e}{\frac{1}{m} + \frac{L^2}{J_{O_z}}} (-\omega L + \dot{u}) \quad (17)$$

Substituindo-se “I” nas equações (10) e (12) obtêm-se, finalmente, as expressões da velocidade angular da barra e da velocidade da partícula imediatamente após o choque:

$$\omega' = \omega + \frac{1+e}{\frac{1}{m} + \frac{L^2}{J_{O_z}}} (-\omega L + \dot{u}) \cdot \frac{L}{J_{O_z}} \quad (18)$$

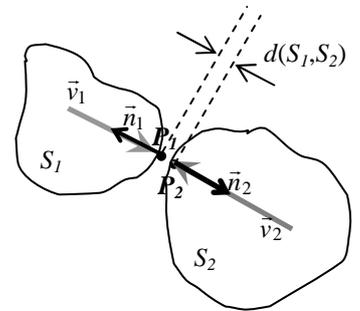
$$v'_{P_2} = v_{P_2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1+e}{\frac{1}{m} + \frac{L^2}{J_{O_z}}} (-\omega L + \dot{u}) \quad (19)$$

B) Resolução das questões propostas

Choques entre dois corpos S_1 e S_2 são eventos caracterizados pela tentativa de violação recíproca de vínculos de corpo rígido. Se P_1 e P_2 são pontos de S_1 e S_2 animados de velocidades \vec{v}_{P_1} e \vec{v}_{P_2} que, na iminência do choque, medem a menor distância entre esses corpos, deve-se verificar se as seguintes condições são satisfeitas:

1ª $d = d(S_1, S_2) = |L \cos \theta(t) - u(t)| < \varepsilon$ (onde ε é um número tão pequeno quanto se queira), ou seja, ambos os corpos devem estar suficientemente próximos;

2ª $\vec{v}_{P_1} \cdot \vec{n}_1 < 0$ e $\vec{v}_{P_2} \cdot \vec{n}_2 < 0$, ou seja, ambos os corpos devem estar se aproximando.



(1,5)

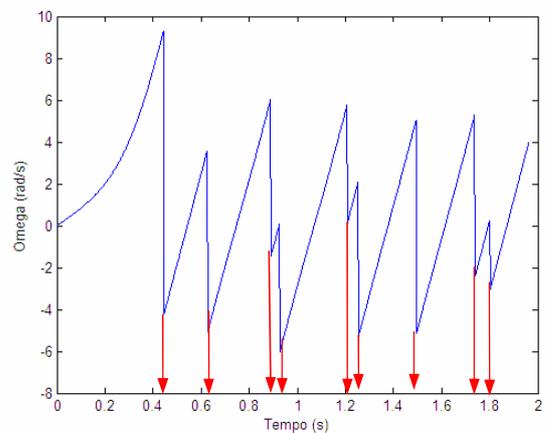
Os gráficos apresentados nas figuras (a), (b), (c) e (d) correspondem, respectivamente, a:

- $\dot{u} = \dot{u}(t)$
- $\theta = \theta(t)$
- $\omega = \omega(t)$
- $u = u(t)$

(1,0)

Nos eventos de choque ocorrem abruptas variações de velocidade sem as correspondentes variações de posição e/ou orientação dos corpos. Esses eventos são indicados por meio de setas no gráfico de $\omega = \omega(t)$, reproduzido ao lado.

(0,5)





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Os eventos referidos no item (d) e destacados no gráfico de $\dot{u} = \dot{u}(t)$, ao lado, correspondem a choques sucessivos entre um objeto que oscila a alta frequência (partícula) e outro que oscila a baixa frequência (barra). A probabilidade de ocorrência desses eventos é maior quando as velocidades dos pontos da barra e da partícula que entrarão em contacto têm mesma direção e sentido, pois em tais circunstâncias a velocidade de afastamento de ambas é inferior à que se observa nos casos em que os sentidos das respectivas velocidades são opostos. É importante realçar que a lei temporal de ocorrência desses choques sucessivos não apresenta periodicidade, pois, em geral, o quociente entre as frequências fundamentais dos movimentos oscilatórios da partícula e da barra não é um número inteiro.

(0,5)

