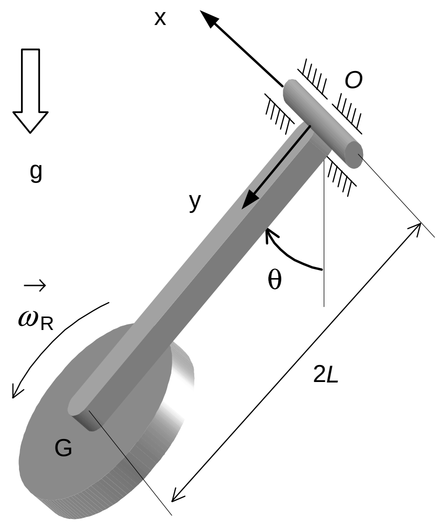
Mecânica – B – PME 2200 –1ª. Prova – 01/4/2014
Duração da Prova: 110 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets* e demais equipamentos eletrônicos similares)

1ª Questão (3,5 pontos). Um avião, que acaba de decolar, está em translação retilínea com velocidade constante. A roda permanece em movimento com velocidade angular constante $\vec{\omega}_R = \omega_R \vec{k}$ relativamente à barra *OG*. O trem de pouso é recolhido com velocidade angular de arrastamento constante $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{i} = \dot{\theta}\vec{i}$, conforme mostrado na figura. Considere a roda como um disco delgado de raio *R*, massa *m* e momentos de inércia $J_{Gx} = J_{Gy} = J$, $J_{Gz} = 2J$. A barra *OG* tem massa desprezível e comprimento 2*L*. Pede-se, para a configuração correspondente a esse instante, em função dos parâmetros dados e expressos na base tri-ortogonal $O\,\vec{i}\;\vec{j}\;\vec{k}$, solidária à barra *OG*:

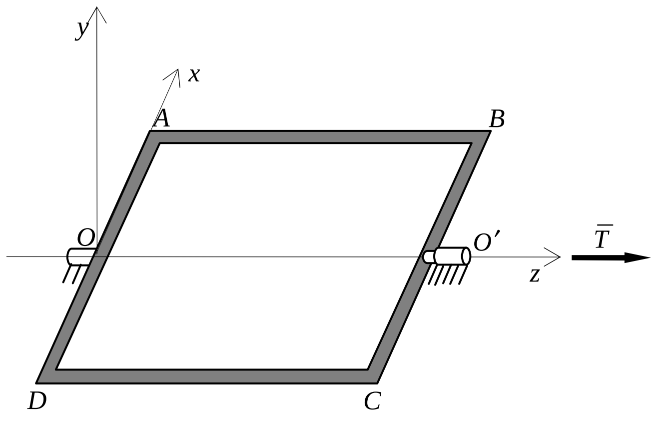


a) o vetor rotação absoluta da roda;

b) o vetor momento da quantidade de movimento $\vec{H}_G$ da roda relativo ao pólo *G*;

c) o momento aplicado pela roda à barra *OG;*

2ª QUESTÃO (3,5 pontos). Um aro quadrado constituído por 4 barras delgadas de comprimento 2ℓ e massas $m_{AD} = m_1$, $m_{BC} = m_2$, $m_{AB} = M_1$ e $m_{CD} = M_2$, é posto a girar com velocidade angular ω constante em torno do eixo Oz, sob a ação de um momento externo $T(t)\vec{k}$, conforme indicado na figura. Utilizando o sistema de eixos $Oxyz$ ligados ao aro, determinar:



(a) as coordenadas do centro de massa do aro;
(b) a aceleração do centro de massa do aro;
(c) a matriz de inércia do aro relativa ao pólo *O* e descrita no sistema de eixos $Oxyz$;
(d) os valores de duas massas m e m' que, localizadas sobre dois vértices convenientes do aro (indicá-los), mantenham-no em equilíbrio dinâmico.

3ª Questão (1,0 ponto)

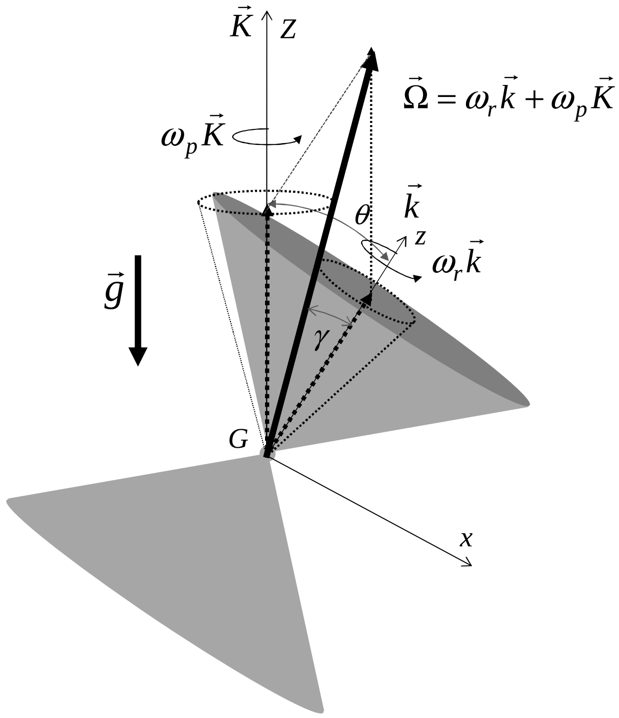
Seja $[\mathbf{B}] = \lfloor \cos\alpha_{ij} \rfloor$, $i, j = 1,2,3,$ a matriz de mudança entre duas bases canônicas, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, que orientam dois sistemas cartesianos (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3), ambos com mesma origem em *O*. Os elementos desta matriz, $\cos\alpha_{ij}$, são os cossenos diretores, ou seja, o cosseno dos ângulos formados entre os correspondentes eixos cartesianos. Seja também um corpo rígido, cuja matriz de inércia é designada $[\mathbf{J}_O]$ e $[\mathbf{J}'_O]$ nos respectivos sistemas cartesianos. Pede-se:

(a) Qual é a relação matemática que permite calcular $[\mathbf{J}'_O]$, uma vez conhecida $[\mathbf{J}_O]$?

Seja, agora, $[\mathbf{P}]$ a matriz de mudança de base que diagonaliza $[\mathbf{J}_O]$. Pergunta-se:

(b) Como pode ser construída a matriz de diagonalização ?

4ª Questão (3,0 pontos). A figura ao lado mostra um corpo rígido de revolução formado por dois cones idênticos, soldados pelos vértices, em contraposição. Os cones são perfeitamente simétricos, sólidos e de material homogêneo. O centro de massa *G* do corpo coincide com a articulação que o sustenta, sob ação do campo gravitacional. Os eixos *Gz* e *GZ*, mostrados na figura, são orientados pelos versores $\vec{k}$ e $\vec{K}$. Os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos *Gx* e *Gz* são indicados por *I* e *J*, respectivamente.



Sabe-se que o conjunto executa *movimento de precessão livre e estacionária*, com ângulo de nutação θ, taxa de precessão ω_p e de rotação própria ω_r; com $\omega_p > 0$, $\omega_r > 0$, $0 < \theta < \pi/2$, conforme indicado. As superfícies demarcadas com linhas tracejadas ilustram os denominados cones ‘espacial’ e ‘do corpo’, ou seja, a base e a rolante. Pede-se:

(a) Identificar os cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
(b) Descrever como pode ser interpretada a cinemática do corpo, à luz dos significados dos cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
(c) Determinar ω_r, expresso em função de ω_p, θ e dos momentos de inércia *I* e *J*.
(d) Para que o estado de precessão livre, estacionária e direta, mostrado na figura, seja possível, qual dos momentos de inércia deve ter maior valor, *I* ou *J*? Justifique.

Note que, *em um movimento geral*, sendo $(\dot\phi, \dot\theta, \dot\psi)$ as taxas de precessão, nutação e rotação própria, o momento da quantidade de movimento do corpo, calculado em relação ao centro de massa e expresso na base de versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ que o acompanha, mas não é a ele solidário, é dado por $\vec{H}_G = -I\dot\phi \operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + I\dot\theta\, \vec{j} + J(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\vec{k}$.

Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)

Resolução:

a) compor o vetor de rotação absoluto da roda;

$\boxed{\vec\omega = \omega_B \vec{i} + \omega_R \vec{k}}$ (1,0)

b) determinar o vetor momento da quantidade de movimento $\vec{H}_G$ da roda com respeito ao pólo *G*;

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} [J]_{Gxyz} \begin{Bmatrix} \omega_B \\ 0 \\ \omega_R \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{H}_G = J\omega_B \vec{i} + 2J\omega_R \vec{k}} \qquad (1,0)$$

c) calcular o momento aplicado pela roda à barra *OG;*

Aplicando o *TQMA* na roda e lembrando que $\dot{\vec\omega}_R = 0 \, e \, \dot{\vec\omega}_B = 0$ e $\dot{\vec{i}} = 0$: $\rightarrow$ $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$\dot{\vec{H}}_G = 2J\omega_R \dot{\vec{k}} = 2J\omega_R \left(\omega_B \vec{i} \wedge \vec{k}\right) = -2J\omega_R\omega_B \vec{j} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{H}}_G = -2J\omega_R\omega_B \vec{j}} \qquad (1,0)$$

Assim, o momento giroscópico aplicado pela roda na barra é igual a:

$$\boxed{\vec{M}_{Gir} = 2J\omega_R\omega_B\vec{j}} \qquad (0,5)$$

Resolução da 2ª Questão

As coordenadas do centro de massa do aro são obtidas por meio da composição de centros de massas das 4 barras delgadas, conforme mostrado a seguir:

$$x_G = \frac{m_1\cdot 0 + m_2\cdot 0 + M_1\cdot\ell - M_2\cdot\ell}{m_1+m_2+M_1+M_2} = \frac{M_1-M_2}{m_1+m_2+M_1+M_2}\ell$$

$$y_G = 0$$

$$z_G = \frac{m_1\cdot 0 + m_2\cdot 2\ell + M_1\cdot\ell + M_2\cdot\ell}{m_1+m_2+M_1+M_2} = \frac{2m_2+M_1+M_2}{m_1+m_2+M_1+M_2}\ell$$

Portanto, o centro de massa do aro se situa em:

$$G = \left(\frac{M_1-M_2}{m_1+m_2+M_1+M_2}\ell, 0, \frac{2m_2+M_1+M_2}{m_1+m_2+M_1+M_2}\ell\right)$$

(1,0)

A aceleração do centro de massa do aro é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}\wedge(G-O) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-O)] = \vec{0} + \vec{0}\wedge(G-O) + \omega\vec{k}\wedge\left[\omega\vec{k}\wedge\left(x_G\vec{i}+z_G\vec{k}\right)\right] = -\omega^2 x_G\vec{i}$$

$$\therefore \vec{a}_G = \frac{M_2-M_1}{m_1+m_2+M_1+M_2}\omega^2\ell\vec{i}$$

(0,5)

Considerando-se que o aro se situa no plano xz, seus produtos de inércia J_{Oxy} e J_{Oyz} são ambos nulos. Os demais componentes da matriz de inércia são obtidos mediante aplicação da técnica de composição de momentos e produtos de inércia, conforme indicado a seguir:

$$J_{Ox} = (J_{Ox})_{AD} + (J_{Ox})_{BC} + (J_{Ox})_{AB} + (J_{Ox})_{CD} = 0 + \left(0 + m_2 4\ell^2\right) + \frac{M_1 4\ell^2}{3} + \frac{M_2 4\ell^2}{3} = 4\cdot\left(m_2 + \frac{M_1+M_2}{3}\right)\ell^2$$

$$J_{Oy} = (J_{Oy})_{AD} + (J_{Oy})_{BC} + (J_{Oy})_{AB} + (J_{Oy})_{CD} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \left(\frac{m_2 4\ell^2}{12} + m_2 4\ell^2\right) + \left(\frac{M_1 4\ell^2}{12} + M_1 2\ell^2\right) + \left(\frac{M_2 4\ell^2}{12} + M_2 2\ell^2\right)$$

$$\therefore J_{Oy} = \left[\frac{m_1+m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1+M_2}{3} + 2\cdot(M_1+M_2)\right]\ell^2$$

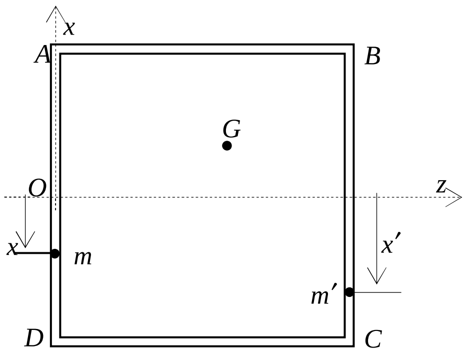
$$J_{Oz} = (J_{Oz})_{AD} + (J_{Oz})_{BC} + (J_{Oz})_{AB} + (J_{Oz})_{CD} = \frac{m_1 4\ell^2}{12} + \frac{m_2 4\ell^2}{12} + M_1\ell^2 + M_2\ell^2 = \left(\frac{m_1+m_2}{3} + M_1 + M_2\right)\ell^2$$

$$J_{Oxz} = (J_{Oxz})_{AD} + (J_{Oxz})_{BC} + (J_{Oxz})_{AB} + (J_{Oxz})_{CD} = 0 + (0 + m_2\cdot 0\cdot 2\ell) + M_1\ell\cdot\ell + M_2(-\ell)\cdot\ell = (M_1-M_2)\ell^2$$

Portanto, a matriz de inércia do aro, relativa ao pólo O, é :

$$[J_O] = \begin{bmatrix} 4\cdot\left(m_2 + \frac{M_1+M_2}{3}\right)\ell^2 & 0 & -(M_1-M_2)\ell^2 \\ 0 & \left[\frac{m_1+m_2}{3} + 4m_2 + \frac{M_1+M_2}{3} + 2(M_1+M_2)\right]\ell^2 & 0 \\ -(M_1-M_2)\ell^2 & 0 & \left(\frac{m_1+m_2}{3} + M_1 + M_2\right)\ell^2 \end{bmatrix}$$

(1,0)



Considerando-se que a velocidade angular do aro é constante, o seu equilíbrio dinâmico pode ser atingido desde que se acrescentem ou se removam duas massas m e m' localizadas sobre planos paralelos ao eixo de rotação z (vide figura abaixo), de modo tal a fazê-lo coincidir com o eixo central de inércia do aro. Como o corpo já está balanceado em relação ao eixo y, é suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$(m_1+m_2+M_1+M_2)x_G+mx+m'x'=0 \qquad (18)$$

$$J_{Oxz}+mxz+m'x'z'=0 \qquad (19)$$

Desenvolvendo-se as equações acima, resultam:

$$(M_1-M_2)\ell+mx+m'x'=0 \qquad (20)$$

$$(M_1-M_2)\ell^2+mxz+m'x'z'=0 \qquad (21)$$

Situando-se as massas m e m', respectivamente, nos planos $z=0$ e $z=2\ell$, a equação (21) se transforma em:

$$(M_1-M_2)\ell^2+2\ell m'x'=0 \qquad (22)$$

Supondo que $M_2>M_1$ e utilizando o sistema de duas equações (20, 22) a 4 incógnitas (m, m', x, x'), identificaremos as duas massas m, m' requeridas ao equilíbrio dinâmico do aro considerando os 4 casos seguintes:

1º) $x=x'=\ell$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell+m\ell+m'\ell=0 \Rightarrow m+m'=M_2-M_1$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell^2+2\ell m'\ell=0$

Resolvendo-se o sistema acima, obtêm-se:

$m=m'=\dfrac{M_2-M_1}{2}$, massas a serem adicionadas ao aro nos vértices *A* e *B*.

2º) $x=x'=-\ell$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell-m\ell-m'\ell=0 \Rightarrow m+m'=M_1-M_2$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell^2-2\ell m'\ell=0$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtêm-se:

$m=m'=\dfrac{M_1-M_2}{2}$, massas a serem removidas do aro nos vértices *C* e *D*.

3º) $x=\ell, x'=-\ell$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell+m\ell-m'\ell=0 \Rightarrow m-m'=M_2-M_1$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell^2-2\ell m'\ell=0$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtêm-se:

$m=\dfrac{M_1-M_2}{2}$, massa a ser removida do vértice *A*;

$m'=\dfrac{M_2-M_1}{2}$, massa a ser adicionada ao vértice *C*

4º) $x=-\ell, x'=\ell$

$\Rightarrow (M_1-M_2)\ell-m\ell+m'\ell=0 \Rightarrow m'-m=M_2-M_1$

$\Rightarrow (M_1 - M_2)\ell^2 + 2\ell m'\ell = 0$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior, obtêm-se:

$m = \dfrac{M_1 - M_2}{2}$, massa a ser removida do vértice *D;*

$m' = \dfrac{M_2 - M_1}{2}$, massa a ser adicionada ao vértice *B*.

(1,0)

Resolução da 3ª questão (ref: Pesce, C.P., Dinâmica dos Corpos Rígidos, p. 26-29)**:**

(a) Qual é a relação matemática que permite calcular $[\mathbf{J}'_O]$, uma vez conhecida $[\mathbf{J}_O]$?

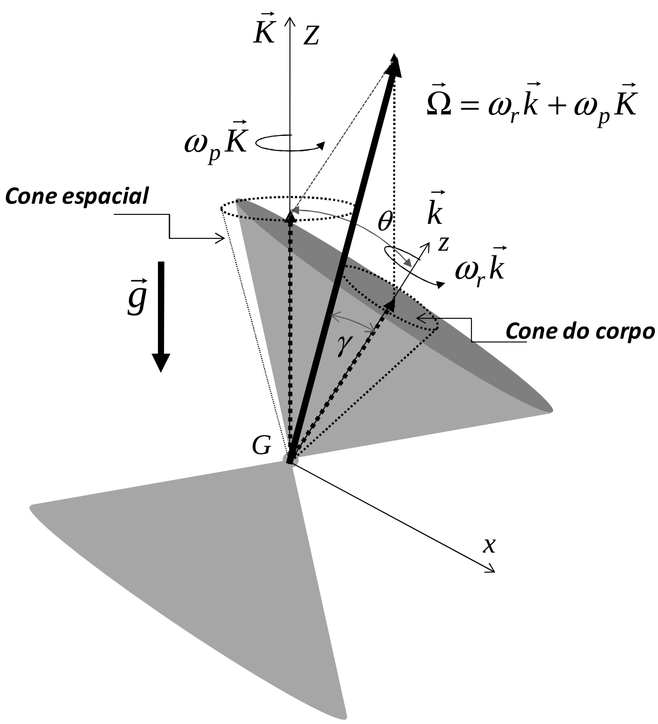
R: A relação matemática que transforma a matriz de inércia $[\mathbf{J}_O]$ para o novo sistema coordenado é: $\boxed{[\mathbf{J}'_O] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_O][\mathbf{B}]^{-1}}$. Como $\boxed{[\mathbf{B}]}$ é ortogonal, posto que relaciona duas bases ortogonais, sua inversa é a própria transporta, o que permite também escrever $\boxed{[\mathbf{J}'_O] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_O][\mathbf{B}]^T}$. (0,5)

(c) Como pode ser construída a matriz de diagonalização?

R: A matriz $[\mathbf{P}]$ que diagonaliza $[\mathbf{J}_O]$ pode ser construída a partir da solução do problema de auto-valor (ou valor próprio) associado à matriz de inércia, e será composta pelos respectivos auto-vetores (ou vetores próprios). (0,5)

Resolução da 4ª questão (ref: Pesce, C.P., Dinâmica dos Corpos Rígidos, pp. 123 e 139)**:**

(a) Identificar os cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
R: O cone espacial é o lugar geométrico do vetor de rotação do corpo, visto do referencial fixo. O cone do corpo é o lugar geométrico do vetor de rotação do corpo visto do referencial do corpo.



(0,5)

(b) Descrever como pode ser interpretada a cinemática do corpo, à luz dos significados dos cones ‘espacial’ e ‘do corpo’.
R: Tudo se passa como se o ‘cone do corpo’, a ele solidário, rolasse sem escorregar sobre o ‘cone espacial’, suposto fixo. (0,5)

(c) Determinar ω_r, expresso em função de ω_p, θ e dos momentos de inércia I e J.
R: Sabe-se que o momento da quantidade de movimento do corpo ou quantidade de movimento angular, calculado em relação ao centro de massa, é $\vec{H}_G = -I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + I\dot{\theta}\,\vec{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$. Portanto, sua derivada em relação ao tempo é dada por, $\dot{\vec{H}}_G = -\frac{d}{dt}\left(I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\vec{i} + \frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right)\vec{j} + \frac{d}{dt}\left(J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right)\vec{k} - I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\vec{i}} + I\dot{\theta}\,\dot{\vec{j}} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\dot{\vec{k}}$.

A condição de precessão estacionária é caracterizada pelo estado $\left(\dot{\theta} = 0; \dot{\phi} = \omega_p; \dot{\psi} = \omega_r\right)$, com ω_p e ω_r invariantes, de tal forma que os três primeiros termos da expressão acima se anulam. Ainda, como:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{i} = \omega_p \cos\theta\vec{j}$$
$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{j} = \vec{0}$$
$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \omega_p \vec{K} \wedge \vec{k} = \omega_p\,\mathrm{sen}\,\theta\vec{j}$$

então, $\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \left[J\left(\omega_r + \omega_p\cos\theta\right) - I\omega_p\cos\theta\right]\omega_p\,\mathrm{sen}\,\theta\vec{j}}$. (0,5)

No caso em estudo, o centro de massa coincide com a articulação ideal e, portanto, na ausência de outras forças externas que não as de origem gravitacional, o momento de forças em relação a este polo é nulo. O teorema da quantidade de movimento angular, $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$, fica então reduzido à equação algébrica:

$$\boxed{\left[J\left(\omega_r + \omega_p\cos\theta\right) - I\omega_p\cos\theta\right]\omega_p\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}. \quad (0,5)$$

Há três soluções possíveis, duas das quais, devem ser descartadas, a partir do enunciado:
(i) $\omega_p \equiv 0, \forall\theta$ e ω_r; (ii) $\mathrm{sen}\,\theta \equiv 0, \forall\omega_r$, quando a definição de precessão é perdida. Estas duas soluções são, na realidade, equivalentes e podem ser resumidas pela condição $\boxed{\omega_p\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$. Dizem, essencialmente, que poderá existir equilíbrio na ausência de precessão, unicamente sob rotação própria e de valor arbitrário, para qualquer orientação do eixo de axissimetria do corpo; nesta situação a quantidade de movimento angular, invariante, será dada por: $\vec{H}_G = J\omega_r\vec{k}$.

A terceira solução possível é a procurada, (iii): $\boxed{\omega_r = \frac{I - J}{J}\omega_p\cos\theta}$ (0,5)

Note que neste terceiro e último caso, o momento angular, invariante, tem agora a direção do versor $\vec{K}$. De fato, se substituirmos a relação acima naquela que expressa a quantidade de movimento angular, i.e., $\vec{H}_G = -I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + I\dot{\theta}\,\vec{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{k}$, com $\dot{\phi} = \omega_p$ e $\dot{\psi} = \omega_r$, teremos (verifique):

$$\vec{H}_G = I\omega_p(-\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\vec{k}) = I\omega_p\vec{K}$$

Como a articulação coincide com o centro de massa do corpo, na ausência de forças outras externas, podemos generalizar e concluir que se houver precessão livre ela se dará em torno do eixo que orienta o vetor da quantidade de movimento angular, qualquer que seja ele.

A estabilidade das referidas condições de equilíbrio não é aqui investigada.

(d) Para que o estado de precessão livre, estacionária e direta, mostrado na figura, seja possível, qual dos momentos de inércia deve ter maior valor, *I* ou *J*? Justifique.
R: Para a situação estudada, em que $\omega_p > 0$, $\omega_r > 0$, $0 < \theta < \pi/2$, segue da expressão acima que $\boxed{I > J}$. (0,5)
Note que, nesta situação, o cone do corpo é externo ao cone espacial. Caso a precessão fosse retrógrada, situação em que $I < J$, o cone do corpo seria interno ao cone espacial.