ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

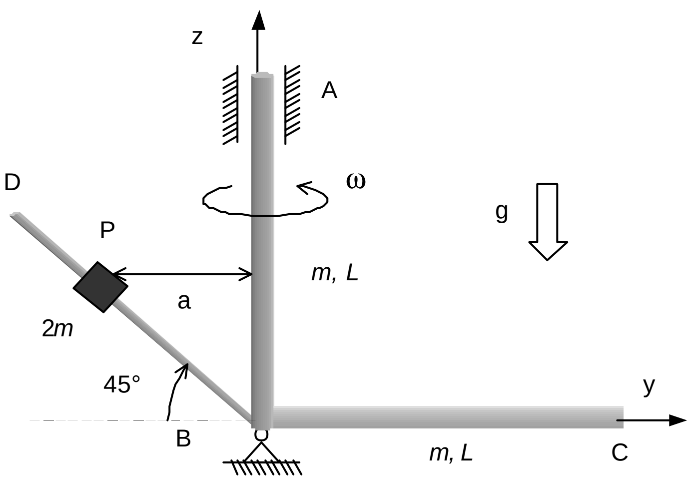
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – 06 de abril de 2010

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura ao lado, a barra **ABC** tem diâmetro desprezível e os trechos **AB** e **BC** têm massa ***m*** e comprimento ***L***. Ao longo da barra **BD** de massa desprezível, pode-se ajustar a posição **a** de uma partícula de massa concentrada de valor 2***m***. O sistema gira com vetor de rotação $\vec{w} = w\,\vec{k}$ constante. Pede-se:

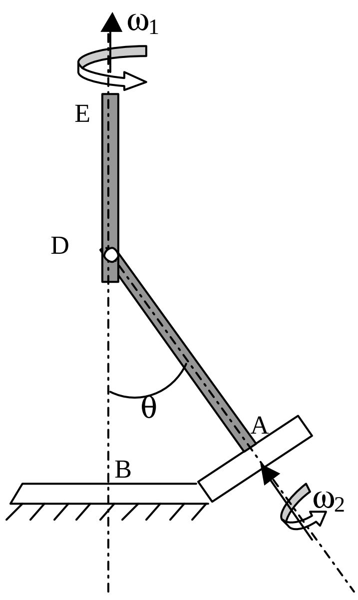


a) uma expressão que correlacione a posição da partícula **a** e o valor de w, tal que a reação em **A** seja nula;

b) a reação na articulação **B**, em função de **a**, para a condição do item anterior.

2ª Questão (3,5 pontos)

O disco ***A*** rola sem escorregar sobre o disco fixo ***B*** em torno do eixo ***AD***, de comprimento ***L***, o qual está articulado em ***D*** (por meio de um pino) a um eixo vertical ***DE*** que gira com velocidade angular ω_1 constante. A haste ***AD*** tem peso desprezível, o disco ***A*** tem massa ***m*** e raio ***r*** e o disco ***B*** tem raio ***R***. Sugere-se a adoção de um sistema de eixos passantes pelo ponto ***A***, mas não solidário ao corpo do disco. Nestas condições, pede-se:



(a) o vetor de rotação do disco ***A***;

(b) a quantidade de movimento angular do disco ***A*** em relação ao pólo ***D***;

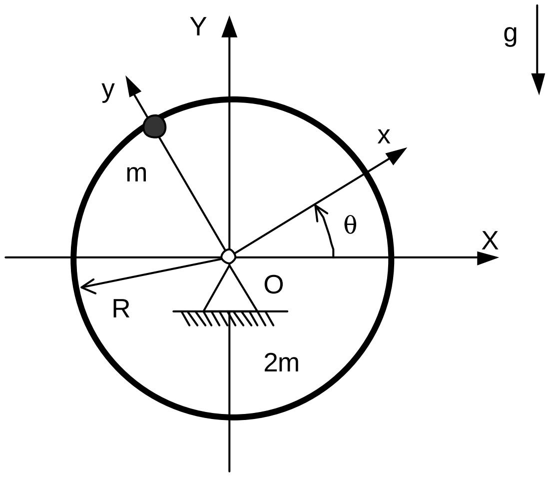
(c) utilizando o TMA, determine o valor de ω_1 para que a reação normal no contato entre os discos ***A*** e ***B*** seja nula.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)



No primeiro Exercício de Modelagem e Simulação Computacional foi considerado um disco de raio ***R*** e massa 2***m***, que gira em torno do mancal ***O***. Na extremidade do disco está fixada uma partícula de massa ***m***, conforme mostrado na figura 1. Pede-se:

a) faça o diagrama de forças sobre o corpo livre;

b) Considerando o sistema **Oxyz**, solidário ao disco, obtenha novamente a **equação de movimento** dinâmico do sistema em função da coordenada angular q; que você utilizou na simulação de movimentos.

c) Esboce os gráficos obtidos para posição e velocidade angular durante a simulação numérica para condições iniciais de posição para $q_{\boldsymbol{o}} = -0.001$ *rad* e de velocidade angular para $w_{\boldsymbol{o}} = 0.0$ *rad/s*.

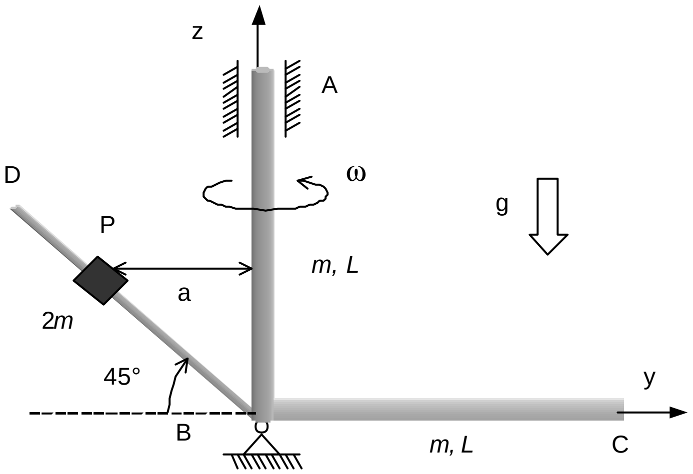
PME 2200 – MECÂNICA B – Primeira Prova – Resolução - 06/04/2010

Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura ao lado, a barra **ABC** tem diâmetro desprezível e os trechos **AB** e **BC** têm massa ***m*** e comprimento ***L***. Ao longo da barra **BD** de massa desprezível, pode-se ajustar a posição **a** de uma partícula de massa concentrada de valor 2***m***. O sistema gira com vetor de rotação $\vec{w} = w\,\vec{k}$ constante. Pede-se:

a) uma expressão que correlacione a posição da partícula **a** e o valor de w, tal que a reação em **A** seja nula;

b) a reação na articulação **B**, em função de **a**, para a condição do item anterior.



Baricentro:

$$(G-B) = (x_G, y_G, z_G) \qquad x_G = 0\ ; \quad y_G = \frac{m\,L/2 - 2ma}{4m} = \frac{L}{8} - \frac{a}{2}\ ; \ z_G = \frac{m\,L/2 + 2ma}{4m} = \frac{L}{8} + \frac{a}{2} \quad (0{,}5)$$

TMB: $4m\vec{a}_G = (X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_B - 4mg)\vec{k}$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-B)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}\right)\right]$$

$$\vec{a}_G = -\left(\frac{L}{8} - \frac{a}{2}\right)\omega^2\vec{j} \quad (0{,}5)$$

Para $X_A = Y_A = 0$: $\boxed{X_B = 0}$; $\boxed{Y_B = -4m\left(\frac{L}{8} - \frac{a}{2}\right)\omega^2}$; $\boxed{Z_B = 4mg}$ (0,5)

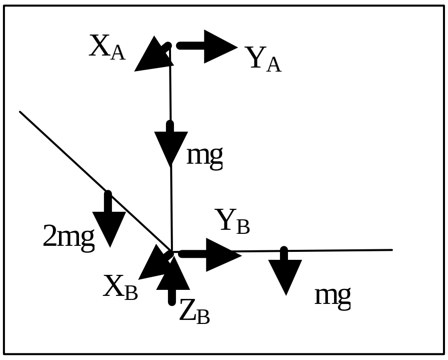
TMA em relação ao pólo B (ponto fixo): $\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B$

$$\vec{H}_B = \left[\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\right][J]_{Bxyz}\begin{Bmatrix}0\\0\\\omega\end{Bmatrix} = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k} \quad (0{,}5)$$

sendo $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 2m(-a)(a) = -2ma^2$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{0}$, têm-se:

$$\dot{\vec{H}}_B = 2ma^2\omega\dot{\vec{j}} = 2ma^2\omega\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{j}\right) = -2ma^2\omega^2\vec{i}$$

$\vec{M}_B = \left(2mga - mg\,L/2\right)\vec{i}$ (0,5) $\boxed{2a^2\omega^2 + 2ga - g\frac{L}{2} = 0}$ (0,5)

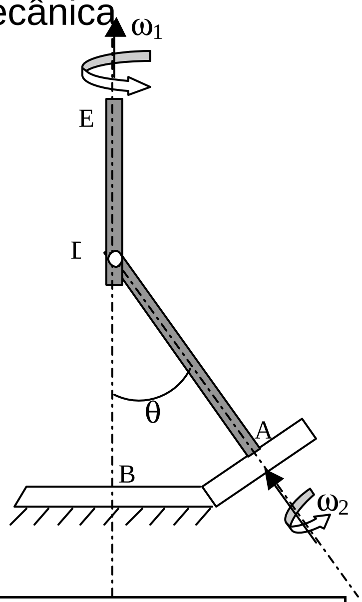


(0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos)

O disco ***A*** rola sem escorregar sobre o disco fixo ***B*** em torno do eixo ***AD***, de comprimento ***L***, o qual está articulado em ***D*** (por meio de um pino) a um eixo vertical ***DE*** que gira com velocidade angular ω_1 constante. A haste ***AD*** tem peso desprezível, o disco ***A*** tem massa ***m*** e raio ***r*** e o disco ***B*** tem raio ***R***. Sugere-se a adoção de um sistema de eixos passantes pelo ponto ***A***, mas não solidário ao corpo do disco. Nestas condições, pede-se:

(a) o vetor de rotação do disco ***A***;

(b) a quantidade de movimento angular do disco ***A*** em relação ao pólo ***D***;

(c) utilizando o TMA, determine o valor de ω_1 para que a reação normal no contato entre os discos ***A*** e ***B*** seja nula.

Sendo o referencial móvel a barra AD e C o ponto de contato entre os discos:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C,arr} + \vec{v}_{C,rel} = -\omega_1 R\,\vec{i} + \omega_2 r\,\vec{i} = \vec{0} \Rightarrow \omega_2 = \frac{R}{r}\omega_1 \quad (0{,}5)$$

O vetor de rotação do disco fica então: $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1\left(\mathrm{sen}\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right) + \omega_2\vec{k} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \omega_1\left[\mathrm{sen}\theta\,\vec{j} + \left(\cos\theta + \frac{R}{r}\right)\vec{k}\right]} \quad (0{,}5)$$

$$\text{Sendo } J_A = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} \text{ e assim } J_D = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} + mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (0{,}5)$$

Sendo D ponto fixo:

$$\vec{H}_D = \left[\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\right][J]_{Dxyz}\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \mathrm{sen}\theta \\ \omega_1\left(\cos\theta + R/r\right) \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_D = \left(\frac{mr^2}{4} + mL^2\right)\omega_1 \mathrm{sen}\theta\,\vec{j} + \frac{mr^2}{2}\omega_1\left(\cos\theta + R/r\right)\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

Pelo TMA: $\dot{\vec{H}}_D = \vec{M}_D$.

Sendo a normal nula, a única força que resta causando momento em relação ao pólo D é o peso do disco. Assim: $\vec{M}_D = -mgL\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i}$. (0,5)

$$\dot{\vec{H}}_D = \left(\frac{mr^2}{4} + mL^2\right)\omega_1 \mathrm{sen}\theta\left(\omega_1 \mathrm{sen}\theta\,\vec{j} + \omega_1\cos\theta\,\vec{k}\right)\wedge\vec{j} + \frac{mr^2}{2}\omega_1\left(\cos\theta + R/r\right)\left(\omega_1 \mathrm{sen}\theta\,\vec{j} + \omega_1\cos\theta\,\vec{k}\right)\wedge\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_D = \left[-\left(\frac{mr^2}{4} + mL^2\right)\omega_1^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta + \frac{mr^2}{2}\omega_1^2 \mathrm{sen}\theta\left(\cos\theta + R/r\right)\right]\vec{i} \quad (0{,}5)$$

Substituindo no TMA, resulta em: $\boxed{\omega_1 = \pm\sqrt{\dfrac{mgL}{\left(mL^2 - \dfrac{mr^2}{4}\right)\cos\theta - \dfrac{mrR}{2}}}}$ (0,5)

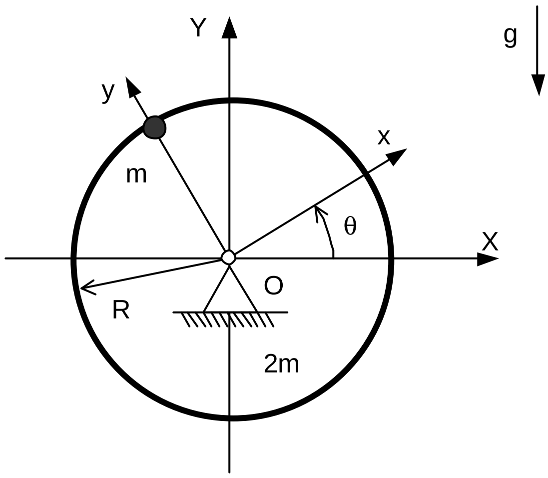
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

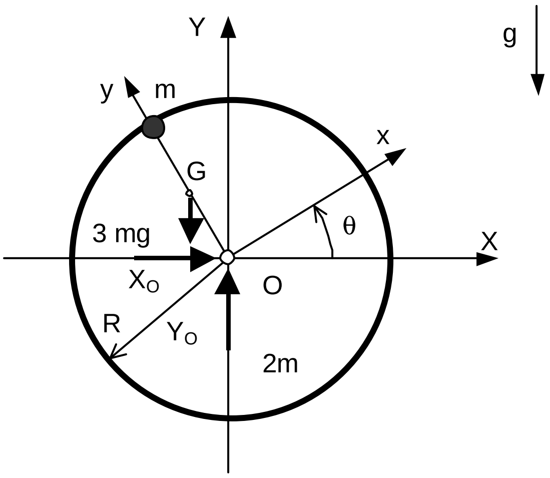
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)

No primeiro Exercício de Modelagem e Simulação Computacional foi considerado um disco de raio ***R*** e massa 2***m***, que gira em torno do mancal ***O***. Na extremidade do disco está fixada uma partícula de massa ***m***, conforme mostrado na figura 1. Pede-se:





a) faça o diagrama de forças sobre o corpo livre:

forças externa: na articulação O e peso próprio; (0,5)

b) Considerando o sistema **Oxyz**, solidário ao disco, obtenha novamente a **equação de movimento** dinâmico do sistema em função da coordenada angular *q*; que você utilizou na simulação de movimentos. Tomando o pólo O:

$$J_z\dot{w} = M_{oz}^{ext} \quad \rightarrow \quad (mR^2 + 2mR^2/2)\dot{w} = (G-O)\wedge 3m\vec{g} \quad \rightarrow \quad \dot{w} = \frac{g}{2R}\,\mathrm{sen}\,q \qquad (1,5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

c) Esboce os gráficos obtidos para posição e velocidade angular durante a simulação numérica para condições iniciais de posição para $q\boldsymbol{o}$ = -0.001 *rad* e de velocidade angular para $w_{\boldsymbol{o}}$ = 0.0 *rad/s*. (1,0)

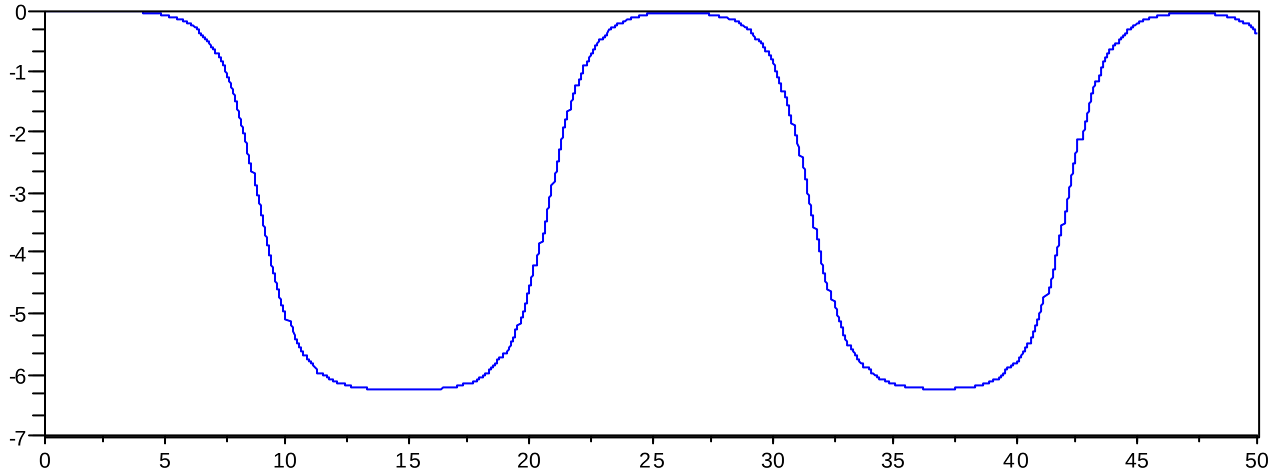


Figura 1 – Posição angular em função do tempo

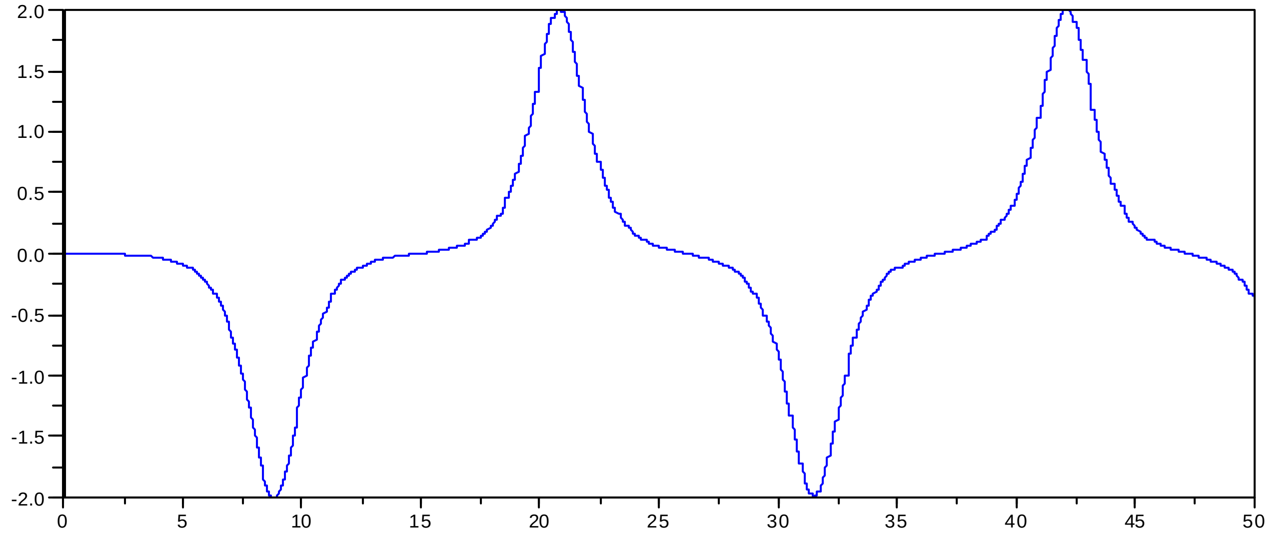


Figura 2 – Velocidade angular em função do tempo