



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

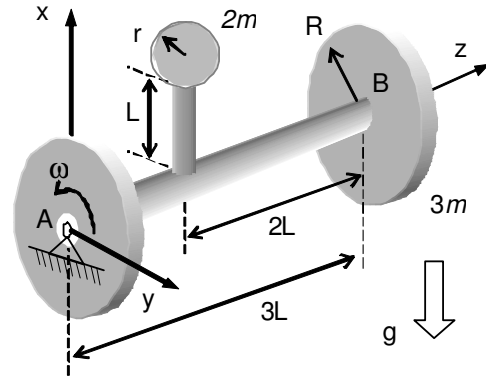
**PME 2200 – Mecânica B – 1ª Prova – 31/3/2009**

Duração: 100 minutos (Não é permitido o uso de calculadoras)

**1ª Questão (3,0 pontos)**

O eixo esbelto de comprimento  $3L$  e massa  $m$  é apoiado na articulação  $A$  e no anel  $B$  e possui discos de raio  $R$  e massa  $3m$  em cada uma de suas extremidades. A esfera de raio  $r = L/4$  e massa  $2m$  está unida ao eixo por um segmento esbelto reto vertical de comprimento  $L$  e massa  $m$ . O conjunto gira em torno do eixo  $z$  com velocidade angular constante  $\omega$ . Considerando o sistema de coordenadas  $Axyz$  solidário ao eixo, pede-se determinar:

- a) a posição do baricentro do conjunto;
- b) o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo  $z$  e os seus produtos de inércia;
- c) a localização e os valores de duas massas compensadoras  $m_1$  e  $m_2$  fixadas na parte externa dos discos, suficientes para balancear o sistema.

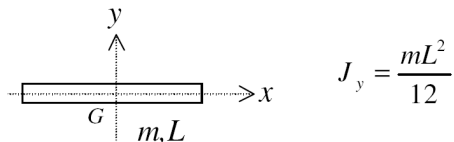


Dados:

- momento de inércia de uma esfera de massa  $m$  e raio  $r$  em relação a um eixo que passa pelo seu baricentro:

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

- 



**Resolução:**

- massa total:  $M = 10m$

$$x_G = (m(L/2) + 2m(L+r))/10m = L/4 + r/5 = 3L/10;$$

$$y_G = 0$$

$$z_G = (3m(0) + m(3L/2) + m(L) + 2m(L) + 3m(3L))/10m = \frac{27}{20}L$$

$$\boxed{(G - A) = (3L/10, 0, 27L/20)} \quad (0,5)$$

- $J_z = 3mR^2/2 + mL^2/3 + (4mr^2/5 + 2m(L+r)^2) + 3mR^2/2 = m(3R^2 + 7L^2/3 + 14r^2/5 + 4Lr)$

$$\boxed{J_z = m(3R^2 + 421L^2/120)} \quad (0,5)$$

$$J_{xz} = m(L)(L/2) + 2m(L)(L+r) = \frac{5}{2}mL^2 + 2mLr \Rightarrow \boxed{J_{xz} = 3mL^2}; \quad \boxed{J_{xy} = 0} \quad \boxed{J_{yz} = 0} \quad (0,5)$$



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

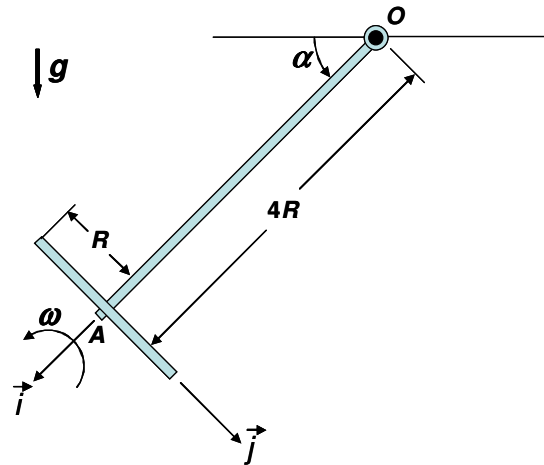
c) Posições das massas:  $m_1 (-R, 0, 0)$ ;  $m_2 (-R, 0, 3L)$ ;

$$J_{xz} = J_{xz} + m_1 (-R)(0) + m_2 (-R)(3L) = 0 \quad (0,5) \rightarrow \boxed{m_2 = \frac{mL}{R}} \text{ em } (-R, 0, 3L);$$

$$M x_G + m_1 (-R) + m_2 (-R) = 0 \quad (0,5) \rightarrow \boxed{m_1 = \frac{2mL}{R}} \text{ em } (-R, 0, 0). \quad (0,5)$$

**2ª Questão (3,5 pontos)**

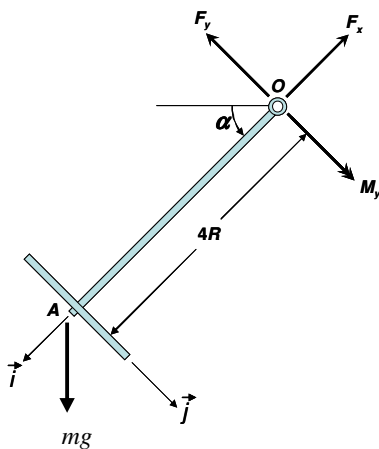
No mecanismo da figura, o disco de massa  $m$  e raio  $R$  gira com vetor de rotação  $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$  constante relativo ao eixo  $AO$  de comprimento  $4R$  e massa desprezível. O eixo  $AO$ , por sua vez, está ligado a um pino em  $O$  que permite apenas a sua rotação em torno de  $\vec{k}$ . Pede-se determinar:



- a) a aceleração angular  $\ddot{\alpha}$ ;
- b) a velocidade angular  $\dot{\alpha}$ , sabendo que  $\alpha=0 \Rightarrow \dot{\alpha}=0$ ;
- c) a aceleração do ponto A;
- d) as reações vinculares em  $O$ .

**Resolução:**

DCL



a) TMA adotando  $O$  como pólo:

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt} (J_x \omega \vec{i} + J_z \dot{\alpha} \vec{k}) = J_x \omega \dot{\alpha} \vec{j} + J_z \ddot{\alpha} \vec{k} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow M_y \vec{j} + 4R \cos \alpha mg \vec{k} = \frac{1}{2} m R^2 \omega \dot{\alpha} \vec{j} + \left( \frac{1}{4} m R^2 + m (4R)^2 \right) \ddot{\alpha} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = \frac{16}{65} \frac{g}{R} \cos \alpha} \quad (0,5)$$

b) Integrando a expressão de  $\ddot{\alpha}$  em relação ao tempo e considerando que  $\alpha=0 \Rightarrow \dot{\alpha}=0$ :

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{32}{65} \frac{g}{R} \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{32}{65} \frac{g}{R} \sin \alpha}} \quad (0,5)$$

(o mesmo resultado pode ser obtido usando o TEC)

c)  $\vec{a}_A = -\dot{\alpha}^2 4R \vec{i} + \ddot{\alpha} 4R \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = -\frac{128}{65} g \sin \alpha \vec{i} + \frac{64}{65} g \cos \alpha \vec{j}} \quad (0,5)$



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

---

$$\text{d) TR: } \vec{R}^{ext} = m\vec{a}_A \Rightarrow (mg \sin \alpha - F_x)\vec{i} + (mg \cos \alpha - F_y)\vec{j} = -\frac{128}{65}mg \sin \alpha \vec{i} + \frac{64}{65}mg \cos \alpha \vec{j} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = \frac{193}{65}mg \sin \alpha}$$

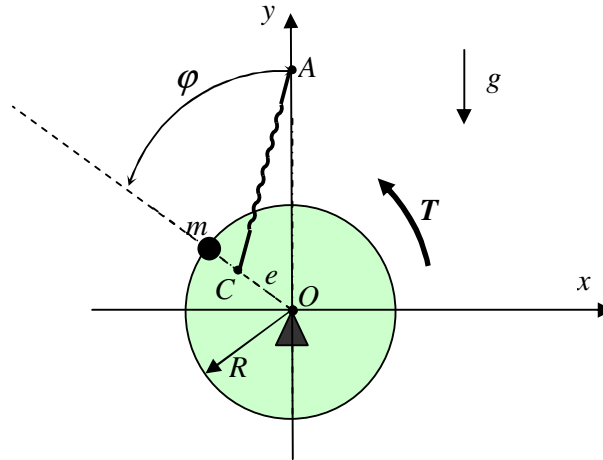
$$\Rightarrow \boxed{F_y = \frac{1}{65}mg \cos \alpha} \quad (0,5)$$

$$\text{de (a) } M_y = \frac{1}{2}mR^2\omega\dot{\alpha} \Rightarrow \boxed{M_y = \frac{1}{2}mR^2\omega\sqrt{\frac{32}{65}\frac{g}{R}} \sin \alpha} \quad (0,5)$$



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Questão 3 (3,5 pontos)** A figura mostra um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  suportado por um mancal em  $O$ ; uma pequena esfera de massa  $m$  está presa na periferia do disco. Uma mola linear de constante elástica  $K$  e comprimento natural  $L_0$  está articulada ao ponto  $C$  do disco e ao ponto  $A$  situado sobre o eixo  $y$ , de modo que  $|(A - O)| = D$  e  $|(C - O)| = e$ . O sistema pode ser acionado por um motor que aplica um torque que varia em função da velocidade angular do disco



segundo a expressão  $T = T_0 \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{\omega_{op}}\right)$ , onde  $T_0$  é o torque de partida do motor e  $\omega_{op}$  é a sua velocidade de operação quando desconectado do disco. Pede-se:

a) Deduza a expressão da força que a mola aplica no disco. (1.0)

A força elástica é calculada pela expressão

$$\vec{F}^{el} = -K(L - L_0)\vec{u}$$

onde  $L = |(C - A)|$ ,  $(C - A) = -e \sin \phi \vec{i} + (e \cos \phi - D) \vec{j}$  e  $\vec{u} = \frac{(C - A)}{|(C - A)|}$ .

Como  $|(C - A)| = \sqrt{e^2 + D^2 - 2eD \cos \phi}$ , resulta

$$\vec{F}^{el} = K \frac{\left[ \left( e^2 + D^2 - 2eD \cos \phi \right)^{1/2} - L_0 \right] \left( e \sin \phi \vec{i} - (e \cos \phi - D) \vec{j} \right)}{\left( e^2 + D^2 - 2eD \cos \phi \right)^{1/2}}$$

b1) Foram feitas simulações nas quais se adotou  $e = 0.05R$  e  $g = 0$ ; esboce um gráfico descrevendo como variou a frequência de oscilação do disco em função do valor de  $\phi(0)$ .

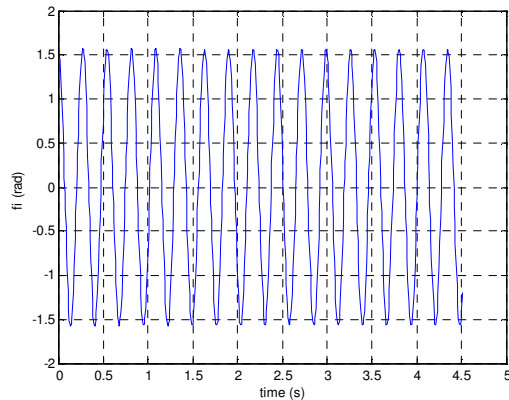
O gráfico solicitado é construído a partir dos resultados obtidos do item 2b do Exercício de Modelagem e Simulação Computacional #1: sistema sem acionamento, com  $\phi(0)$  variando desde



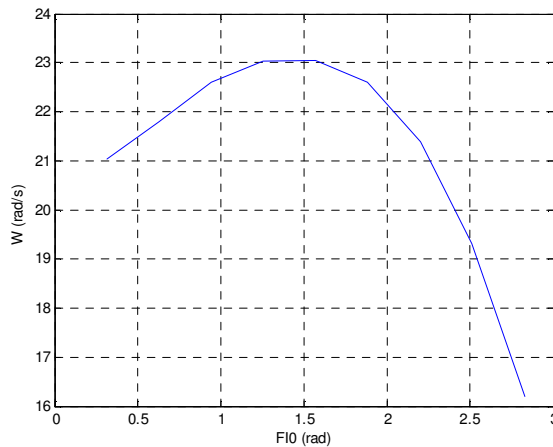
**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

$\varphi(0) = \frac{\pi}{10}$  até  $\varphi(0) = \frac{9\pi}{10}$ . Por exemplo, a figura a seguir mostra o gráfico de  $\varphi(t)$

correspondente a  $\varphi(0) = \frac{5\pi}{10}$ :



O gráfico mostra que o disco executa 11 oscilações em aproximadamente 3 segundos, de modo que a sua frequência de oscilação é  $\omega \approx 23 \text{ rad/s}$ . Procedendo de modo análogo para os demais valores de  $\varphi(0)$ , obtém-se o gráfico mostrado abaixo: (0.5)

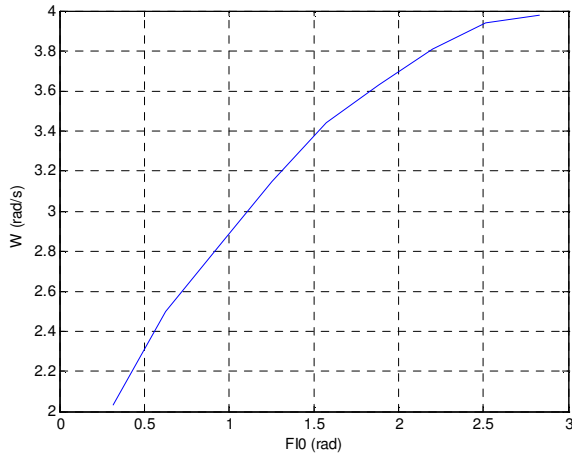


b2) Foram feitas simulações nas quais se adotou  $e=0$  e  $g=9.815 \text{ m/s}^2$ ; esboce um gráfico descrevendo como variou a frequência de oscilação do disco em função do valor de  $\varphi(0)$ .

Procedendo de modo análogo ao anterior, obtém-se o gráfico a seguir: (0.5)



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**



b3) Identifique a situação na qual foram obtidos os gráficos de  $\varphi(t)$  e de  $\dot{\varphi}(t)$  mostrados a seguir:

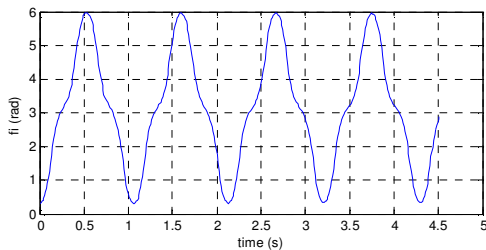


Gráfico de  $\varphi(t)$

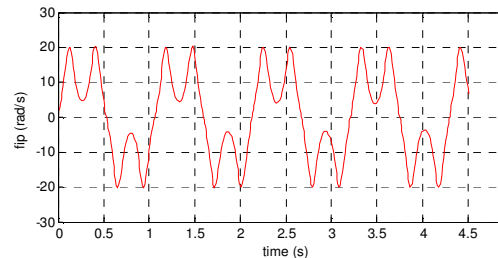


Gráfico de  $\dot{\varphi}(t)$

Os gráficos mostram resultados típicos dos casos correspondentes a  $0.05R \leq e < 0.07R$ , com  $g = 9.815 \text{ m/s}^2$  e  $\varphi(0) = \frac{\pi}{10}$ ; os demais dados são fornecidos no item 2e do EMSC1. (0.5)

c) Sistema **com** acionamento: faça gráficos de  $\varphi(t)$  e de  $\dot{\varphi}(t)$  que descrevam os casos considerados nas simulações e interprete os resultados

Ocorrem duas situações distintas: em uma delas, o torque acionador não é suficiente para que o disco parta com um determinado valor de  $\varphi(0)$  e acelere até atingir  $\omega_{op}$ ; na outra situação, o disco acelera, atinge  $\omega_{op}$  e a partir daí mantém uma velocidade de rotação praticamente constante. Os gráficos abaixo ilustram os resultados correspondentes a essas situações.



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

((0.5) para cada par de gráficos)

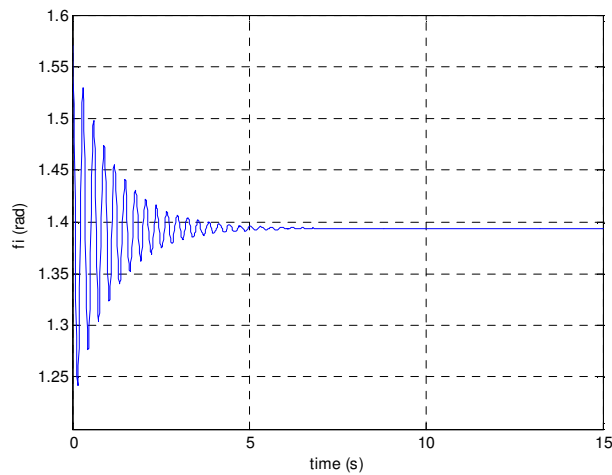
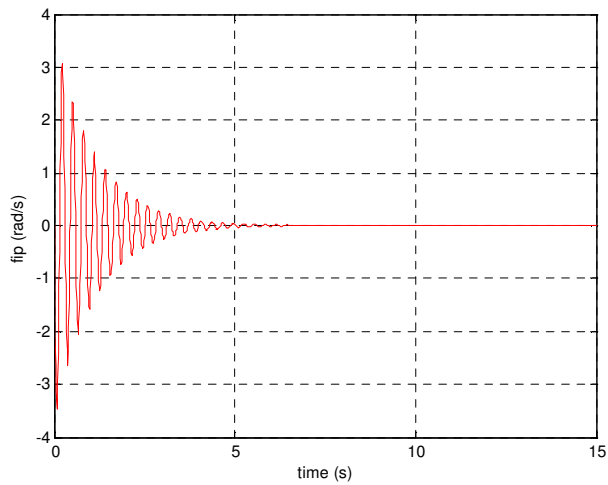


Gráfico de  $\varphi(t)$  na situação em que o torque é insuficiente; o disco partiu com  $\varphi(0) = \frac{5\pi}{10}$  e estabilizou em um valor próximo de 1.4 rad. O gráfico de  $\dot{\varphi}(t)$  correspondente é



A seguir são mostrados os gráficos correspondentes à 2ª situação descrita.



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

---

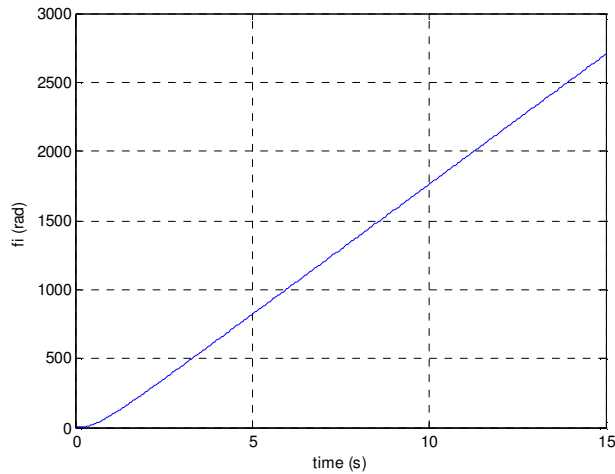


Gráfico de  $\phi(t)$  , mostrando que o disco gira sempre no mesmo sentido.

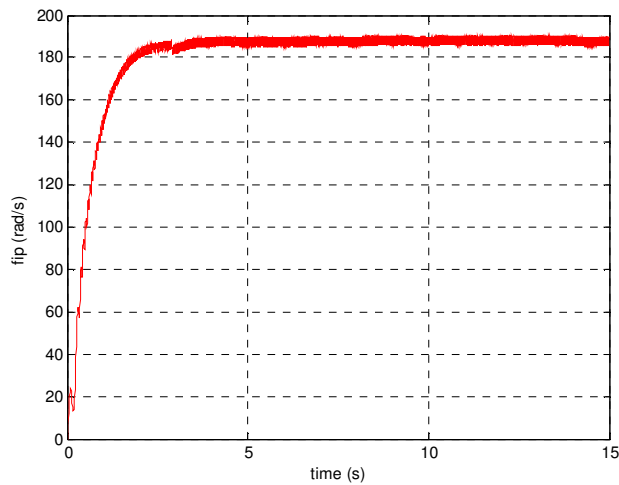


Gráfico de  $\dot{\phi}(t)$  , mostrando que a velocidade angular do disco aumenta até estabilizar com valores muito próximos de  $\omega_{op}$  .