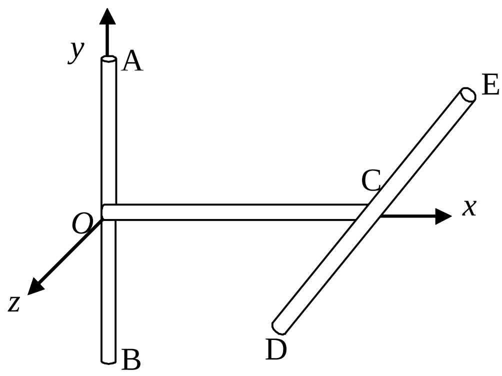
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS - PME2100 - MECÂNICA A DINÂMICA

LISTA DE EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES AO LIVRO TEXTO (FRANÇA, MATSUMURA)

1) Três barras uniformes de massa m são soldadas conforme mostra a figura. Determinar os momentos e produtos de inércia em relação aos eixos *Oxyz* e o momento de inércia em relação à reta que une a origem O ao ponto D. Desprezar as dimensões da seção transversal das barras. Dados: AO=OB=CD=CE=a/2; OC=a

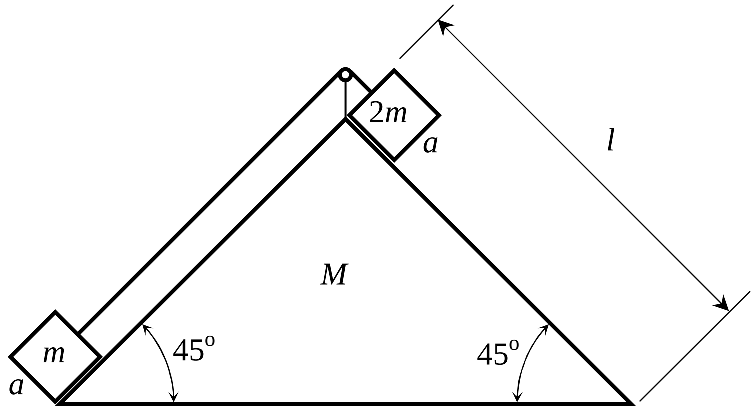


Resposta:

$$J_x = \frac{ma^2}{6} \qquad J_y = \frac{17ma^2}{12} \qquad J_z = \frac{17ma^2}{12}$$

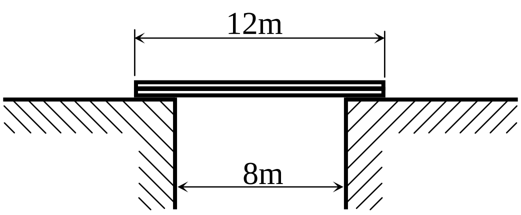
$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \qquad J_{OD} = \frac{5ma^2}{12}$$

2) A figura indica dois cubos, de massa *m* e 2*m* e aresta *a*, apoiados no prisma de massa *M*. Determinar o deslocamento do prisma quando o cubo de massa 2*m* atingir o plano horizontal. Desprezar o atrito entre o prisma e o solo. O fio é inextensível e de massa desprezível.



Resposta: $x = \dfrac{3m\sqrt{2}(a-l)}{2(3m+M)}$

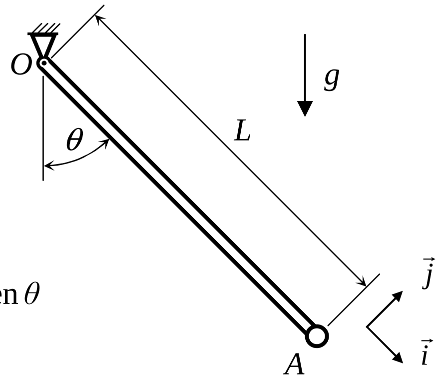
3) Um homem de 80 kg precisa atravessar um fosso de 8 m de largura e, para isso, dispõe de pranchas de 12 m de comprimento e massa de 20 kg cada uma. Entretanto, as bordas do fosso são lisas (sem atrito) e não há meio de calçar as pranchas. Sabendo que estas não escorregam entre si, qual o número mínimo de pranchas que ele deve empilhar para conseguir atravessar o fosso andando sobre a pilha?



Resposta: 8

4) A barra homogênea *OA* de comprimento *L* e peso *mg*, articulada em *O*, tem em sua extremidade um peso concentrado 2*mg*. O conjunto parte do repouso na posição horizontal. Pede-se:

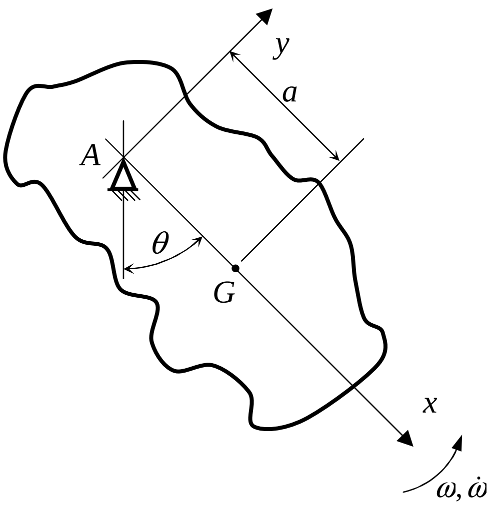
a) O baricentro *G* e o momento de inércia do conjunto em relação a *O*.
b) A velocidade angular e a aceleração angular em função de θ.
c) A aceleração do baricentro do conjunto.
d) As componentes da reação na articulação *O*.



Respostas:

a) $OG = \dfrac{5L}{6}$; $J_O = \dfrac{7}{3} mL^2$ b) $\omega^2 = \dfrac{15g}{7L}\cos\theta$; $\dot{\omega} = -\dfrac{15g}{14L}\operatorname{sen}\theta$

d) $R_x = -\dfrac{117}{14} mg\cos\theta$; $R_y = \dfrac{9}{28} mg \operatorname{sen}\theta$



5) O pêndulo composto da figura tem massa *m*, velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$ conhecidas. O seu centro de gravidade *G* está localizado a uma distância *a* da articulação *A*. Pede-se determinar as reações na articulação, para uma posição genérica θ.

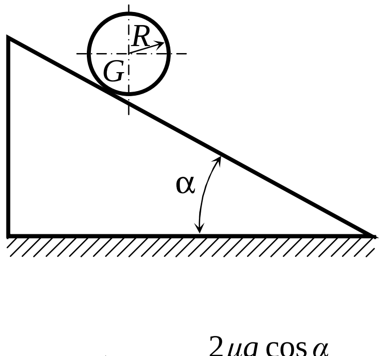
Respostas:

$Rx = -m(\omega^2 a + g\cos\theta)\vec{i}$

$Ry = m(\dot{\omega}a + g\operatorname{sen}\theta)\vec{j}$

6) Um cilindro de massa *m* e raio *R* desce um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal. Dados o coeficiente de atrito μ entre o cilindro e o plano e o momento de inércia $J_{z_G} = \dfrac{1}{2} mR^2$ do cilindro, pede-se:

a) A aceleração do baricentro e a aceleração angular do cilindro, supondo que não haja escorregamento.
b) Idem, supondo que haja escorregamento.
c) Determinar o ângulo α que delimita as condições dos itens (a) e (b).



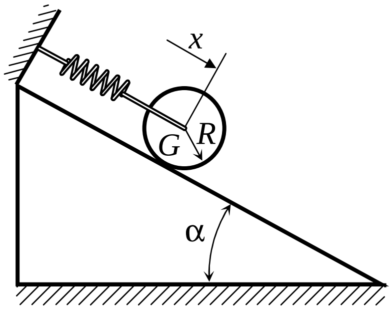
Respostas:

a) $a_G = \dfrac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha$; $\dot{\omega} = \dfrac{2g\operatorname{sen}\alpha}{3R}$ b) $a_G = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)$; $\dot{\omega} = \dfrac{2\mu g\cos\alpha}{R}$

c) $\tan\alpha = 3\mu$

7) Um disco de massa M e raio R tem seu centro G ligado a uma mola de constante k. O sistema é solto do repouso, na posição $x = 0$, para a qual a força da mola é nula, sobre um plano inclinado que faz um ângulo α com a horizontal. Não há escorregamento entre o disco e o plano. Pede-se

a) A aceleração do centro G do disco em função da distância percorrida x.
b) A força tangencial no ponto de contato entre o disco e o plano, em função de x.
c) A distância x percorrida até que a força tangencial se anule.
d) Explicar o que ocorre a partir do instante considerado no item (c).

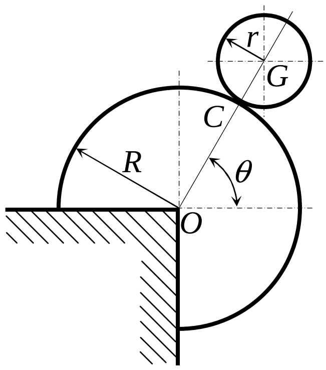


Respostas:

a) $a_G = \dfrac{2}{3M}\left(M g \operatorname{sen}\alpha - kx\right)$ b) $F = \dfrac{1}{3}\left(M g \operatorname{sen}\alpha - kx\right)$ c) $x = \dfrac{M g \operatorname{sen}\alpha}{k}$

8) Um cilindro homogêneo de raio r e peso mg rola sem escorregar sobre uma superfície cilíndrica fixa de raio R. No instante $t = 0$ o cilindro é abandonado do repouso na posição definida pelo ângulo θ_0. Pede-se:

a) A velocidade angular do cilindro em função de θ.
b) A componente normal da reação sobre o cilindro em função de θ.
c) O valor de θ para o qual o cilindro abandona a superfície fixa.



Resp.: a) $\omega^2 = \dfrac{4g(R+r)}{3r^2}(\operatorname{sen}\theta_0 - \operatorname{sen}\theta)$

b) $N = \dfrac{mg}{3}(7\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}\theta_0)$ c) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{7}\operatorname{sen}\theta_0$

9) Uma massa concentrada m está presa ao disco de raio R e massa m, no ponto A, conforme mostrado na figura. O disco, por sua vez, está ligado a uma mola de constante k através de um fio que se enrola no disco. O conjunto parte do repouso da posição $\theta = 0$, sendo nula a força da mola, nesta posição. Considerando $\theta \geq 0$, pede-se:

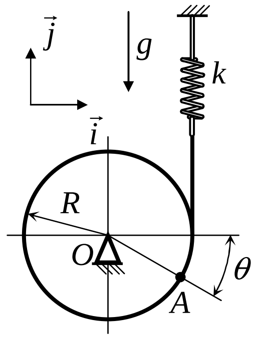
a) A velocidade angular ω e a aceleração angular $\dot{\omega}$ do conjunto em função de θ.
b) A aceleração do baricentro do conjunto G, em função de ω, $\dot{\omega}$ e θ.
c) As componentes da força reativa na articulação O, nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$, em função de ω, $\dot{\omega}$ e θ.

Resp.: a) $\omega^2 = -\dfrac{2}{3}\dfrac{k}{m}\theta^2 + \dfrac{4}{3}\dfrac{g}{R}\operatorname{sen}\theta$; $\dot{\omega} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{k}{m}\theta + \dfrac{2}{3}\dfrac{g}{R}\cos\theta$

b) $\vec{a}_B = \left(-\dot{\omega}\dfrac{R}{2}\operatorname{sen}\theta - \omega^2\dfrac{R}{2}\cos\theta\right)\vec{i} + \left(-\dot{\omega}\dfrac{R}{2}\cos\theta + \omega^2\dfrac{R}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\vec{j}$

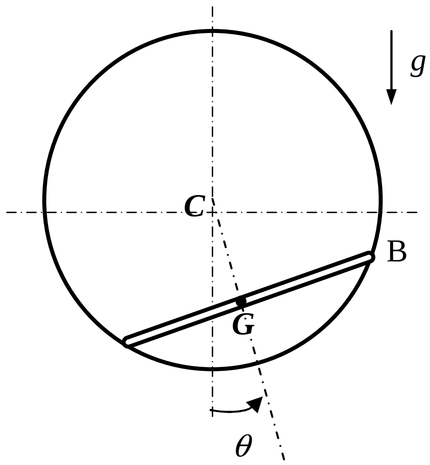
c) $X_O = -\dot{\omega}mR\operatorname{sen}\theta - \omega^2 mR\cos\theta$

$Y_O = 2mg - kR\theta - \dot{\omega}mR\cos\theta + \omega^2 mR\operatorname{sen}\theta$



10) A barra AB é homogênea, possui comprimento R√2 e peso m*g*. A barra escorrega sem atrito no interior da circunferência vertical fixa de centro C e raio R a partir do repouso na posição definida por $\Theta=45^o$. Dado $J_G=mR^2/6$, pede-se determinar:

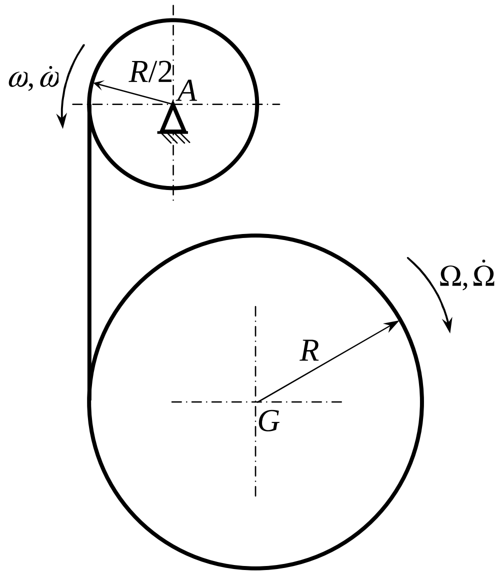
a) A energia cinética da barra em função de Θ;
b) A velocidade angular ω em função de Θ;
c) As reações em A e B para $\Theta=45^o$;
d) As reações em A e B para $\Theta=0^o$.



Resp:

$$b)\omega^2 = \frac{3\sqrt{2}g}{2R}(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad c)N_A = \frac{5}{8}mg; \quad N_B = \frac{3}{8}mg$$

$$d)N_A = N_B = \frac{5\sqrt{2}-3}{4}mg$$



11) O disco homogêneo *A* de massa *m* e raio *R*/2 está conectado ao disco *G* de massa *m* e raio *R* por meio de um cabo enrolado nos dois discos. Não ocorre escorregamento entre o cabo e os discos. Supondo que o sistema parte do repouso, pede-se determinar as acelerações angulares dos discos, a aceleração do ponto *G* e a tração no fio.

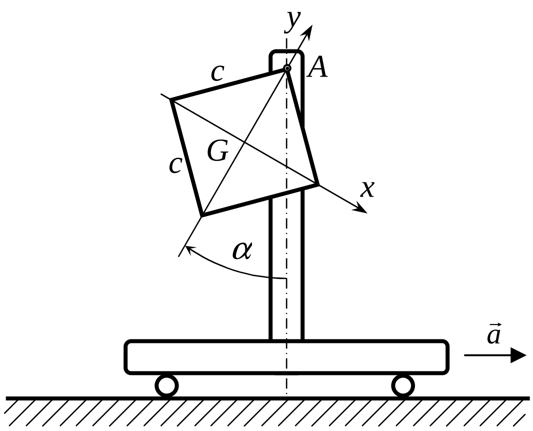
Respostas:

$$\dot{\omega} = \frac{4g}{5R} \qquad \dot{\Omega} = \frac{2g}{5R}$$

$$a_G = \frac{4}{5}g \qquad T = \frac{mg}{5}$$

12) No dispositivo da figura, o carrinho movimenta-se para a direita com aceleração $\vec{a}$ constante. A placa quadrada homogênea de lado *c* e massa *m* está articulada em *A*. Usando o sistema de coordenadas (*x*,*y*,*z*) solidário à placa, pede-se:

a) Calcular J_{Gz} e J_{Az}.
b) Determinar $\ddot{\alpha}$ em função de J_{Az}.
c) Determinar as reações na articulação em função de α, $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ e demais dados.

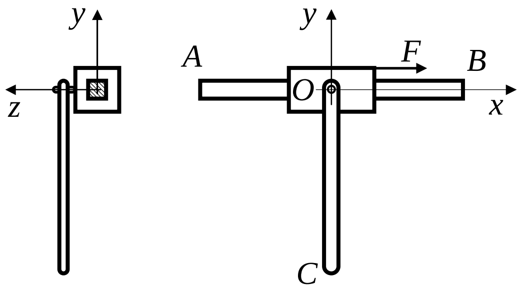


Respostas:

a) $J_{Gz} = \frac{1}{6}mc^2$; $\qquad J_{Az} = \frac{2}{3}mc^2$

b) $\ddot{\alpha} = \frac{mc\sqrt{2}}{2J_{Az}}\left(a\cos\alpha - g\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)$

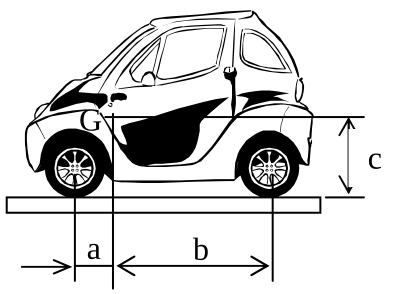
c) $R_x = m\left(a\cos\alpha - \ddot{\alpha}c\frac{\sqrt{2}}{2} - g\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)$; $\qquad R_y = m\left(a\,\mathrm{sen}\,\alpha + \dot{\alpha}^2 c\frac{\sqrt{2}}{2} + g\cos\alpha\right)$



13) O anel de seção retangular e massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB. A barra homogênea OC, de comprimento L e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em O. É aplicada ao anel uma força F horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar, para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em O.

Respostas: $\dot{\vec{\omega}} = -\dfrac{6F}{5mL}\vec{k}$ $\quad \vec{a}_o = \dfrac{4F}{5m}\vec{i}$ $\quad \vec{R} = \dfrac{F}{5}\vec{i} + mg\,\vec{j}$

14) A figura mostra a vista lateral de um automóvel de massa m. O coeficiente de atrito dinâmico entre os pneus e o solo é μ. Pede-se: (a) supondo tração nas rodas traseiras, determine as reações normais do solo nos pares de rodas dianteiro e traseiro, bem como a máxima aceleração do veículo para que não haja derrapagem; (b) repita o item (a) supondo apenas tração dianteira; (c) repita o item (a) para o caso de tração nas quatro rodas.

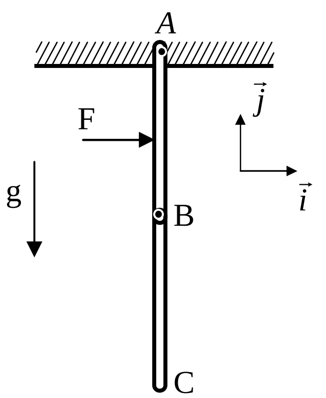


Resp.:

a) $N_D = mg\dfrac{(b-\mu c)}{(a+b-\mu c)}$ $\quad N_T = \dfrac{mga}{(a+b-\mu c)}$ $\quad a_x = \dfrac{\mu ga}{(a+b-\mu c)}$

b) $N_D = \dfrac{bmg}{(a+b+\mu c)}$ $\quad N_T = \dfrac{mg(a+\mu c)}{(a+b+\mu c)}$ $\quad a_x = \dfrac{\mu gb}{(a+b+\mu c)}$

b) $N_D = \dfrac{(b-\mu c)mg}{(a+b)}$ $\quad N_T = \dfrac{(a+\mu c)mg}{(a+b)}$ $\quad a_x = \mu g$

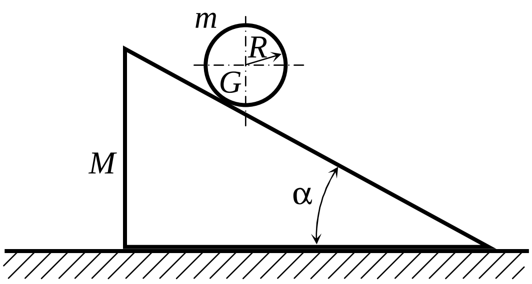


15) Duas barras idênticas, articuladas em A e B, cada uma com massa m e comprimento L estão inicialmente na vertical. Uma força F é aplicada no centro da barra superior AB. Sabe-se que o momento de inércia da barra em relação ao seu baricentro é dado por $J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$. Nestas condições, pedem-se as acelerações angulares das barras e a força horizontal no pino que une as barras AB e BC.

Resp: $\vec{\alpha}_{AB} = \dfrac{6F}{7mL}\vec{k}$ $\quad H_B = -\dfrac{3}{14}F\vec{i}$

$\vec{\alpha}_{BC} = -\dfrac{9F}{7mL}\vec{k}$

16) Um disco homogêneo, de massa m e raio r, rola sem escorregar sobre o prisma de massa M, que forma um ângulo α com o plano horizontal, como mostra a figura. Supondo que não existe atrito entre o prisma e o plano horizontal em que o prisma se apóia, determinar a aceleração do prisma e a força normal que o disco exerce sobre o prisma.



17) Um sistema possível para freiar o movimento de rotação de uma nave espacial de raio R consiste em colocar duas pequenas massas m nas extremidades de dois fios de comprimento L. Inicialmente as massas giram com todo o corpo da nave, conforme a figura A. No instante em que as massas alcançam sua máxima distância e seus fios estão radialmente para fora, conforme a figura B, os fios são soltos. Qual valor de L fará que a nave anule sua velocidade angular? Qual o valor da velocidade v de cada massa no instante em que os fios são soltos? Dados: m, R, ω e J_{Gz} (momento de inércia da nave em relação ao eixo Gz, perpendicular à figura).

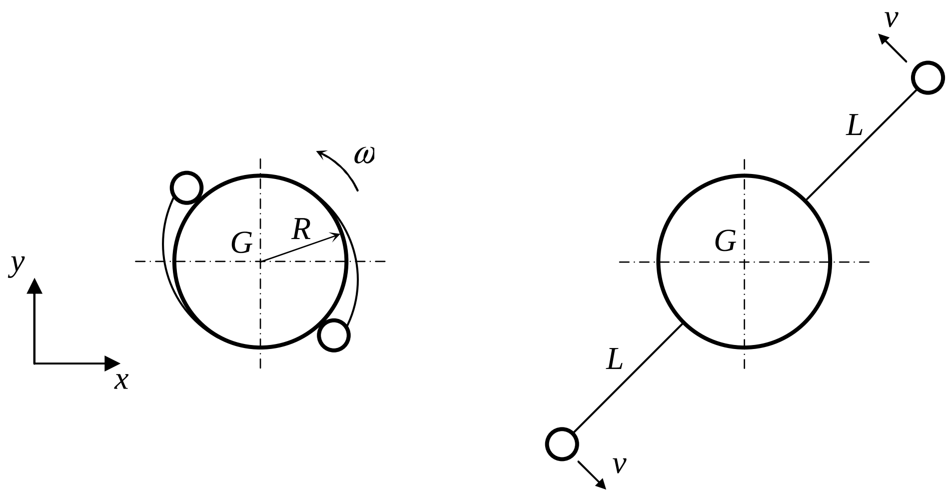


Figura A Figura B

Resposta:

$$L = \omega\sqrt{R^2 + \frac{J_{Gz}}{2m}} - R \qquad v = \omega\sqrt{R^2 + \frac{J_{Gz}}{2m}}$$

Problemas suplementares - Beer & Johnston

Cap. 9: exercícios 22, 25, 26, 52, 54, 72, 90.

Cap. 16: exercícios 8, 22, 58, 60, 62, 80, 84, 94, 100, 110, 120, 126, 132, 140, 150, 152, 164, 166.

Cap. 17: exercícios 12, 14, 16, 18, 22, 24, 30, 32, 34, 42, 48, 70, 76, 78, 94.

3,30 Lista de mecânica |P3|

01) MOMENTOS: $\sum_i m_i [(P_i - O) \wedge \vec{x}]$ $\int r^2 dm \rightarrow \rho = \frac{m}{a}$ (densidade linear) $\Rightarrow \int \rho r^2 dr$

$J_x = \int_{-a/2}^{a/2} \rho \, r^2 dr = \frac{r^3}{3}\rho \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{2 \cdot a^3}{2^3 \cdot 3} \cdot \frac{m}{a} = \frac{ma^2}{12} \times 2$ (Barra AB e Barra DE)

$\therefore \boxed{J_x = \frac{ma^2}{6}}$

$J_y = \rho_{CO} \int_0^a x^2 dx + \rho_{DE} \int_{-a/2}^{a/2} (x_{DE}^2 + z_{DE}^2) = \rho_{CO} \frac{a^3}{3} + \rho_{DE} x_{DE}^2 \cdot a + \rho_{DE} \cdot \frac{a^3 \cdot 2}{3 \cdot 2^3}$ → x é constante

$\therefore J_y = \frac{ma^2}{3} + m \cdot a^2 + \frac{ma^2}{12} = \boxed{\frac{17ma^2}{12}}$

$J_z = \rho_{AB} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy + \rho_{CO} \int_0^a x^2 dx + \rho_{DE} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx$ → cte!

$\frac{2 \cdot a^3}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{m}{a} + \frac{ma^3}{a \, 3} + \frac{m}{a} \cdot a^2 \cdot a = \boxed{\frac{17ma^2}{12}}$

Produtos de inércia

$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \rightarrow$ Em relação a placa AB → $x = 0$
" " " DE → $\cancel{z}$ $= 0$
" " " CO → $y = 0$

$\therefore \boxed{J_{xy} = 0}$

$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i \rightarrow$ " " " " AB → $\cancel{z} = 0$
" " " " CO → $z = 0$
" " " " DE → Simetria em relação ao eixo x → 0

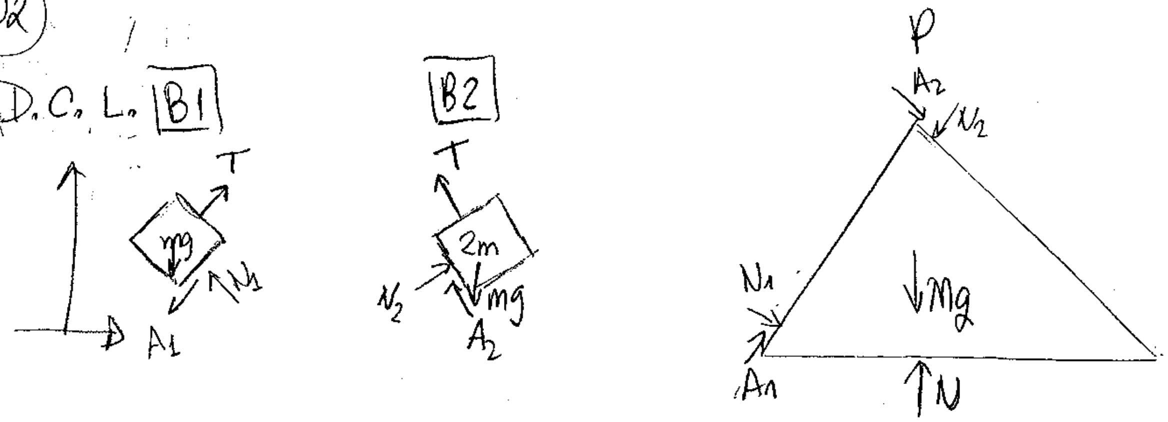
$J_{yz} = \sum m_i x_i z_i \rightarrow$ " " " " AB → $z = 0$
" " " " CO → $y = z = 0$
" " " " DE → $y = 0$

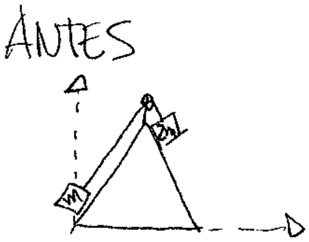
$J_{OD} = \rho_{AB} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy + \rho_{CO} \int_0^{a/2} z^2 dz + \rho_{DE} \int_{-a}^{+a} x^2 dx = \frac{a^3 \cdot 2}{3 \cdot 2^3} \frac{m}{a} + \frac{a^3}{3 \cdot 2^3} \cdot \frac{m}{a} - \frac{2a^3}{3} \frac{m}{a}$

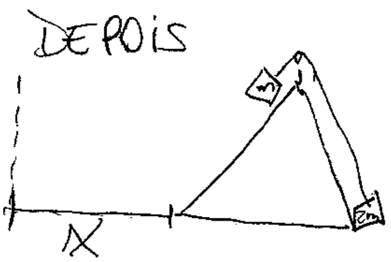
$\frac{ma^2}{12}$ $\quad \frac{ma^2}{24} + \frac{2ma^2}{3}$

$J_{0D} = \frac{(2+1+8)ma^2}{24} = \frac{11ma^2}{24}$?

(02)







TMB ⇒

B1 $\quad m a_{G_1} = \left(\frac{T\sqrt{2}}{2} - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - A_1\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\frac{T\sqrt{2}}{2} - P_1 + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - A_1\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j$

B2 $\quad m a_{G_2} = \left(-\frac{T\sqrt{2}}{2} - A_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\frac{T\sqrt{2}}{2} - P_2 + A_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j$

P $\quad m a_{G_P} = \left(A_1\frac{\sqrt{2}}{2} + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + A_2\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(-N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + A_1\frac{\sqrt{2}}{2} - A_2\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} - P_P + N\right)j$

prem, a_{G_P} é apenas na direção i, então:

$$\boxed{A_1\frac{\sqrt{2}}{2} + N = N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + A_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} + Mg}$$

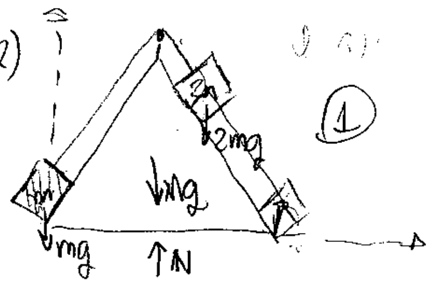
A aceleração causada pelo fio (polia) é a mesma para os dois blocos.

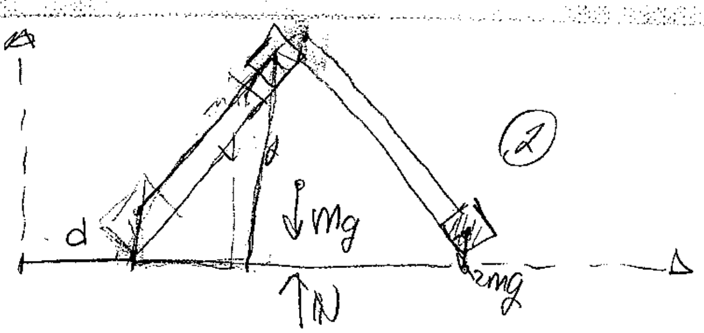
⊛ $a_{G_1}(j) = a_{G_2} j$ e $a_{G_1}(i) = a_{G_2} i$

$$\frac{\cancel{T\sqrt{2}}}{2} - mg + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - A_1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{T\sqrt{2}}}{2} - 2mg + A_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\sqrt{2}\, mg = A_2 + N_2 + A_1 - N_1}$$

02)





Como no sistema há apenas forças na vertical a $R(i)=0 \rightarrow a_G(i)=0$ e $v_{Gi}=cte$. Como a velocidade do baricentro é inicialmente nula, $v_{Gf}=0$ e $\underline{X_G = cte}$.

Calculando o X_G em ① temos que

$$X_G^1 = \underline{0.m} + \left[\frac{2\ell}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(a-\ell)\right] 2m + \frac{\ell}{2}M = 2\ell m - \sqrt{2}\ell m + a\sqrt{2}m + \frac{\ell}{2}M$$

Calculando o X_G em (2) temos que

$$X_G^2 = \left[(\ell-a)\frac{\sqrt{2}}{2} + d\right]m + (\ell+d)2m + M\left(\frac{\ell}{2}+d\right)$$

Como X_G é constante temos que $\boxed{X_G^1 = X_G^2}$

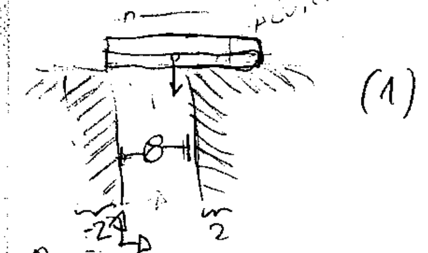
$$\cancel{2\ell m} - \sqrt{2}\ell m + a\sqrt{2}m + \cancel{\frac{\ell}{2}M} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}m + \frac{a\sqrt{2}}{-2}m + dm + \cancel{2\ell m} + 2dm + \cancel{M\frac{\ell}{2}} + Md$$

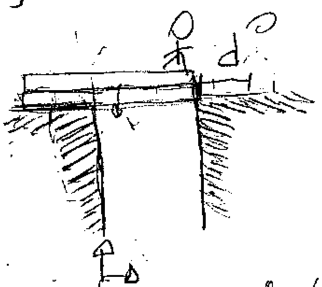
$$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell m + \frac{3a\sqrt{2}}{2}m = d(3m+M)$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{3\sqrt{2}m(a-\ell)}{2(3m+M)}}$$

(*) Detalhe nas coordenadas da posição dos baricentros.

(03) CONDIÇÃO PARA ATRAVESSAR O FOSSO:
limite (n mínimo)





(2)
situação limite d=2
$d \leq 2$

Para o SISTEMA (homem + pranchas) há apenas forças na vertical. Ainda, como o baricentro do sistema se encontra inicialmente parado em (i). X_G é constante, pois $a_G(\vec{i})=0$ e v_G inicial=0.

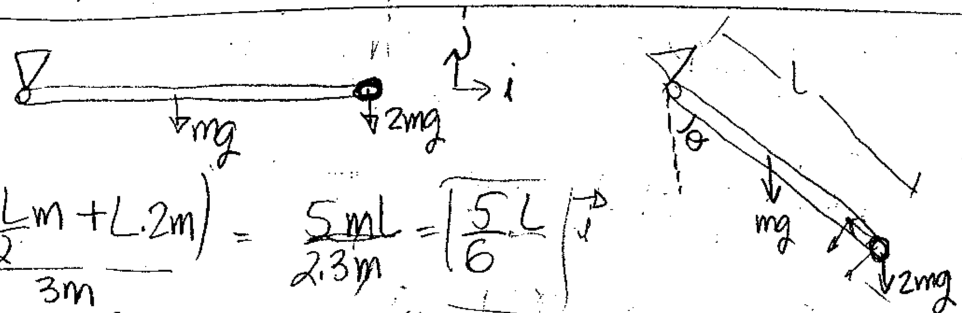
$$X_G^1 = \frac{0.80 + 6.20n}{80+20n} \qquad X_G^2 = \frac{8.80 + \overset{(6-d)}{(6-2)}\,20n}{80+20n}$$

$$\boxed{X_G^1 = X_G^2} \rightarrow \quad 120n = 640 + 40n$$

$$n = \frac{640}{80} = \underline{8 \text{ pranchas}}$$

OBS→ Essas condições são para encontrar o n MÍNIMO (D máximo)

(04)



$$\vec{X}_G = \frac{\left(\frac{L}{2}m + L.2m\right)}{3m} = \frac{5mL}{2.3m} = \boxed{\frac{5}{6}L}\,\vec{i}$$

$$\vec{J}_O = \rho_l\int_0^L r^2\,dr + \frac{2m\overset{\to rccL}{r^2}}{2} + 2mL^2 = \frac{mL^2}{3} + 2mL^2 = \frac{7mL^2}{3}$$

(Disco + translação de eixos)

T.M.B → $m\vec{a}_G = 3mg(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\vec{j})$

$(\vec{i})$ $a_G(\vec{i}) = 3g\cos\theta$ (1)

$(\vec{j})$ $a_G(\vec{j}) = -3g\,\text{sen}\theta$ (2)

O sistema deve ser só a barra (sem polia)

Da cinemática temos que:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (G-O))$$

$$\vec{a}_G = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(\frac{5}{6}L\vec{i}\right) + \omega\vec{k} \wedge \omega\vec{k} \wedge \left(\frac{5}{6}L\vec{i}\right)$$

$$\dot{\omega}\frac{5}{6}L\vec{j} \quad - \omega^2\frac{5}{6}L\vec{i}$$

$\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

→ Não dá certo?

Comparando (1), (2), (3)

$$3g\cos\theta = -\omega^2\frac{5}{6}L$$

$$-3g\,\text{sen}\,\theta = \frac{5}{6}L\dot{\omega}$$

T.M.A → $\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G}$

$$J_O\dot{\omega}_z = -2mg.L\,\text{sen}\,\theta - mg\frac{L}{2}\text{sen}\,\theta$$

T_g

$$\dot{\omega}_z = \frac{-\frac{5}{2}mgL\,\text{sen}\,\theta}{\frac{7}{3}\cdot mL^2} = \boxed{-\frac{15}{14}\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{L}}$$

A energia cinética do sistema é $T_O = \frac{1}{2}mv_G^2 + m\vec{v}_G \wedge (G-G) + \frac{1}{2}(\mathbb{J}_z)\omega_z^2$

$m\vec{v}_G \wedge (\omega \wedge (G-A))$

$$T = \frac{1}{2}(3m)\cdot V_G^2 + \left[\frac{7}{3}mL^2 - 3m\left(\frac{5L}{6}\right)^2\right]\frac{\omega^2}{2}$$

$$T = \frac{1}{2}3m\left(\frac{5}{6}L\omega\right)^2 + \frac{7mL^2\omega^2}{3.2} - \frac{3m}{2}\left(\frac{5L\omega}{6}\right)^2$$

$$T = \frac{7}{6}mL^2\omega^2$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G-O) = \vec{\omega} \wedge \left(\frac{5}{6}L(\text{sen}\,i - \cos j)\right)$$

$$\vec{V}_G = \frac{5L\omega}{6}\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \frac{5}{6}L\omega\cos\theta\,\vec{i}$$

$$V_G^2 = \left(\frac{5L\omega}{6}\right)^2$$

$$\boxed{\mathcal{T}_f - \mathcal{T}_i = \mathcal{C}}$$

$$\mathcal{C} = \frac{5}{6}L\cos\theta . 3mg$$

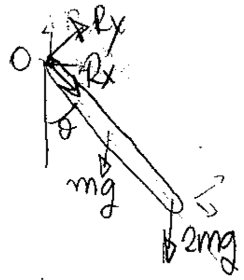
$$\frac{7}{6}mL^2\omega^2 = \frac{5L\cos\theta . 3mg}{6}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{15}{7}\frac{g\cos\theta}{L}}$$

eixo paralelo

$$J_x = J_y + mR^2$$

5



TMB

$$m a_G = (3mg\cos\theta + R_x)\,i + (-3mg\,\text{sen}\,\theta + R_y)\,j$$

$$\vec{a}_{TANGENTE} = \vec{\dot{\omega}} R = \vec{\dot{\omega}}\frac{5L}{6} \qquad \Big\| \qquad a_{CENTRIPETA} =$$

$$\vec{a}_T = \left(-\frac{15g}{14L}\,\text{sen}\,\theta\right)\frac{5L}{6} \qquad \vec{a}_{cp} = \omega^2 R = \pm\frac{15g\cos\theta}{7^2 L}\,\frac{5L}{6}$$

$$\boxed{\vec{a}_G = -\frac{75}{84}g\,\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \frac{75}{92}g\cos\theta\,\vec{i}}$$

$$R_y = -\frac{75}{84}3mg\,\text{sen}\,\theta + 3mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{R_y = \frac{27mg\,\text{sen}\,\theta}{84}}$$

$$R_x = \frac{3m\,75}{92}g\cos\theta - 3mg\cos\theta$$

$$-\frac{351\,g\cos\theta}{92} = \boxed{-\frac{117}{4}mg\cos\theta}$$

PLANO → $\dot{\vec{K}}^{o} = m\vec{v}_G \wedge v_0 + \overbrace{\sum[(P_i - O)\wedge F_i]}^{M_0}$ T.MA

momento angular $\left\{ \vec{K}_{O_1} = (P_i - O)\wedge m_i v_i = m(G-O)\wedge\vec{v}_0 + J_{0z}\omega_z\vec{k} \right.$

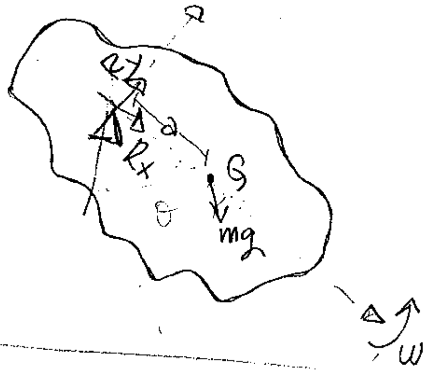
energia cinética $\left\{ \Delta T = \tau = \tau^{INT} + \tau^{EXT} \right.$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^{\,2} + m\vec{v}_0^{\,2}(\omega_z\vec{k}\wedge(G-O)) + \frac{1}{2}J_z\omega_z^2$$

forças ortogonais ao movimento não realizam trabalho
Para realizar trabalho a força deve provocar deslocamento (e portanto deve ser aplicada em un ponto P onde $v_P \neq 0$).

05)

D.C.L →



T.M.B → $\boxed{m\vec{a}_G = (R_x + mg\cos\theta)\vec{i} + (R_y - mg\sin\theta)\vec{j}}$ (1)

$a_G(\text{tangencial})\vec{i} = \dot{\vec{\omega}}.R$ e $a(\text{centripeta})\vec{i} = \vec{\omega}^2 R$ ⇒ Considerando que não há encurvatura?

$\boxed{a_{G_{tg}}\vec{i} = \dot{\omega}a}$ (2) $\boxed{a_G\vec{i} = \omega^2.a}$ (3)

Assim, comparando 1, 2, 3:

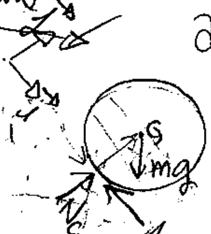
$\begin{cases} R_x + mg\cos\theta = \dot{\omega}a.m \\ R_y - mg\sin\theta = \omega^2 a.m \end{cases}$

$\begin{cases} R_x = m\dot{\omega}a - mg\cos\theta \\ R_y = m\omega^2 a + mg\sin\theta \end{cases}$

OBS →

06) D.C.L

$J_{G(z)} = \frac{1}{2}mR^2$ cilindro



a) Como não há escorregamento:

T.M.B → $m\vec{a}_G = (mg\sin\alpha - A_c)\vec{i} + (N_c - mg\cos\alpha)\vec{j}$ (1)

$a_{Tg}(\vec{i}) = \dot{\omega}R$ e $a_{cp}(\vec{j}) = 0$ (o baricentro não tem aceleração centrípeta)

Assim, $\boxed{N_c = mg\cos\alpha}$ (2) e $\boxed{\dot{\omega} = \frac{mg\sin\alpha - A_c}{mR}}$ (3)

T.M.A → $\boxed{\dot{\vec{K}}_G = M_G = -A_c.R}$ $\boxed{\vec{K}_G = J_G\dot{\vec{\omega}}_z\vec{k}}$ $\Big\}$ $\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}_z = -A_cR$ ←

$\boxed{A_c = +\frac{1}{2}mR\dot{\omega}}$ (4)

(4 → 3) $-mR\dot{\omega} = mg\sin\alpha + \frac{1}{2}mR\dot{\omega}$

$-\frac{3}{2}mR\dot{\omega} = mg\sin\alpha$

$\therefore \dot{\omega} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}$

$\vec{a}_G = \frac{mg\sin\alpha + \frac{1}{2}mR\frac{2g}{R}\frac{\sin\alpha}{3}}{}$

$\therefore \vec{a}_G = \frac{2}{3}g\sin\alpha$

b) Havendo escorregamento: $|A_C| = \mu |N_C|$ $\boxed{A_C = \mu mg\cos\alpha}$

TMB $\Rightarrow$ $m\vec{a}_G = (mg\,sen\alpha - \mu mg\cos\alpha)\vec{i} + \underbrace{(N_C - mg\cos\alpha)}_{\vec{0}}\vec{j}$

$$\boxed{a_G = g(sen\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

T.M.A $\Rightarrow$ $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$J_{zG}\cdot\dot{\omega}_z = \oplus A_C R$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}} = \dfrac{\oplus\mu mg\cos\alpha R \cdot 2}{\frac{1}{2}mR^2}$

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = \oplus\frac{2\mu g\cos\alpha}{R}}$$

Sim

c)

$g\,sen\alpha - g\mu\cos\alpha = \frac{2}{3}g\,sen\alpha$

$\frac{1}{3}sen\alpha = \mu\cos\alpha$

$\boxed{tg\alpha = 3\mu}$

~~* Com escorregamento ou sem a aceleração do baricentro não muda!~~

Quando tangente $\alpha = 3\mu$ a bolinha esta numa situação de transição entre o não escorregamento e o escorregamento (iminência)

Um mínimo que se aumente o ângulo α (e sua tg $\uparrow$) ela já passa para a situação de escorregamento.

$\vec{a}_G = a_G\vec{i}$

$\vec{\omega} = \dot{\omega}R$

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}\wedge(G-O) + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge(G-O)$

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k}\wedge R\vec{j} + \omega\vec{k}\wedge\omega\vec{k}\wedge(R\vec{j})$

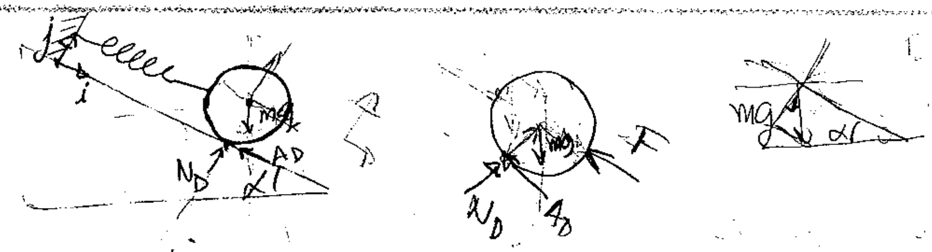
$\vec{a}_G = a_O\vec{j} - \dot{\omega}R\vec{i} - \omega^2 R\vec{j}$

$\vec{a}_O = \omega^2 R$

$a_G = -\dot{\omega}R$

Prob do Sinal.

07)



T.M.B para o disco:

$$\boxed{m a_G = (mg\,\text{sen}\alpha - F - A_D)\vec{i} + (N_D - mg\cos\alpha)\vec{j}} \quad (1)$$

A aceleração do baricentro na direção $\vec{j}$ é nula, então $\boxed{N_D = mg\cos\alpha} \quad (2)$

T.M.A → $\dot{\vec{K}}_O = m\dot{\vec{v}}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O$

$m\vec{V}_0 = m(G-O)\wedge \vec{v}_0 + J_O \omega_z \vec{k}$

Polo D $\quad M_D = mg\,\text{sen}\alpha$?

$\dot{\vec{K}}_D = \vec{0} + \vec{M}_o = \ominus \frac{3}{2} mR^2 \dot{\omega}_z$

$\dot{\omega} = \frac{2}{3Rm}(mg\,\text{sen}\alpha - Kx)$

$$\boxed{a_{tg} = \dot{\omega}.R = \frac{2}{3m}(mg\,\text{sen}\alpha - Kx)}$$

Porque o polo não pode ser G? Encontra ω!

$J_O = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \ominus \frac{3}{2} mR^2$

$A_D = -m\left(\frac{2}{3m}(mg\,\text{sen}\alpha - Kx)\right) - Kx + mg\,\text{sen}\alpha$

$$\boxed{A_D = +\frac{1}{3}(mg\,\text{sen}\alpha - Kx)}$$

Para $A_D = 0$, $\quad mg\,\text{sen}\alpha = Kx \quad$ e $\quad \boxed{x = \frac{mg\,\text{sen}\alpha}{K}}$

Nesse instante o movimento é travado pela força elástica. E sua tendência de mov (que era p/ direita) estará alterando p/ esquerda. (mas NESSE INSTANTE é nula e porisso A_D é nula)

também podemos escolher o polo G:

OBS: $\dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G$

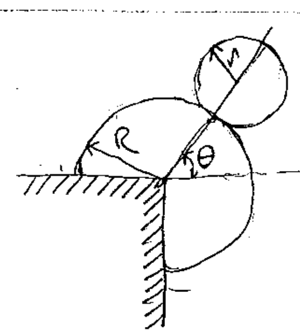
$-\frac{mR^2}{2}\dot{\omega} = -A_D R \quad \therefore \boxed{A_D = +\frac{mR\dot{\omega}}{2}}$

$a_G = \dot{\omega}R = \frac{mg\,\text{sen}\alpha - F - A_D}{m}$

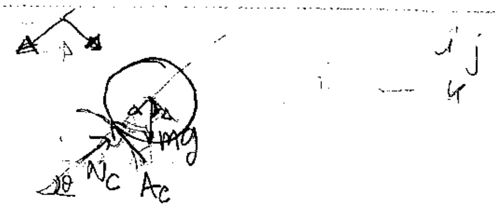
$\dot{\omega}R = g\,\text{sen}\alpha - \frac{Kx}{m} - \frac{R\dot{\omega}}{2}$

$\boxed{\dot{\omega} = \left(g\,\text{sen}\alpha - \frac{Kx}{m}\right)\frac{2}{3R}} \rightarrow \boxed{a_G = \frac{2}{3m}(mg\,\text{sen}\alpha - Kx)}$

08)



D. C. L →



TMB → $m a_G = (mg\cos\theta - A_C)\vec{i} + (N_C - mg\,\text{sen}\theta)\vec{j}$

$\begin{cases} a_{Tg}(\vec{i}) = mg\cos\theta - A_C & (1) \\ a_{cp}(\vec{j}) = mg\,\text{sen}\theta - N_C & (2) \end{cases}$ Agora sim TANGENCIAL E CENTRÍPETAS!

No TMA deve-se entender que o sinal da velocidade angular deve concordar com o sinal da sua derivada.

TEC → $\Delta T = \tau$

$T_{(\text{genérico})} = \frac{1}{2}mv^2 + mv \wedge (w \wedge G - O) + \frac{1}{2} J_z w_z^2$

$T_i = 0$ // $\tau = \tau_P + \tau_A + \tau_N = mg(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)$ (3) $\;\; 0\,(v_C = 0)$

Para o baricentro: movimento é sem escorregamento $v_G = \omega r$ | $J_G = \frac{mr^2}{2}$

$\Delta T = \frac{1}{2} m w^2 r^2 + \frac{1}{4} m r^2 w^2 = (3) = mg(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)$

$\frac{3}{4} m w^2 r^2 = mg(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta) \Rightarrow$ $\boxed{w^2 = \frac{4g(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)}{3r^2}}$ (I) até um ~~pto~~ aleatório

b) Há, nesse movimento, uma composição de rotações: rotação do cilindro por C e por O. ω é a rotação do cilindro por C e, considerando Ω a rotação do baricentro do cilindro por O, com raio $(R+r)$, temos adaptar (1) e (2) para que:

$m\dot{\Omega}(R+r) = mg\cos\theta - A_C$ (4) → Precisamos do Ω para encontrar N_C.

$m\Omega^2(R+r) = N_C - mg\,\text{sen}\theta$ (5)

Para isso usamos o mesmo procedimento usado para encontrar (I). Então $\Omega^2 = \frac{4g(R+r)^2(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)}{3(R+r)^2}$

em (5) → $\frac{m4g(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)}{3} = mg\,\text{sen}\theta - N_C$

$\therefore \quad N_C = \frac{mg}{3}(3\,\text{sen}\theta + 4\,\text{sen}\theta - 4\,\text{sen}\theta_0)$

$$\boxed{N_C = \frac{mg}{3}(7\,\text{sen}\theta - 4\,\text{sen}\theta_0)}$$

Cuidado na hora de colocar coordenadas → se $a_{cp} \neq 0$ então a coordenada $+j$ ou $+i$ deve ser $+a_{cp}$!

OBS θ_0 é dado

4/10

10

$$m a_G \vec{j} = KR\theta - 2mg + Y = \cancel{2}m\left(-\frac{\dot{\omega}_z R\cos\theta}{\cancel{2}} + \frac{\omega^2 R \,\mathrm{sen}\theta}{2}\right)$$

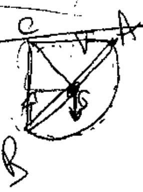
$$\therefore \boxed{Y = -\dot{\omega}_z R\cos\theta\, m + \omega^2 m R\,\mathrm{sen}\theta + 2mg - KR\theta}$$

e $$m a_G \vec{i} = X = m\left(-\dot{\omega}_z R\,\mathrm{sen}\theta - \omega^2 R\cos\theta\right)$$

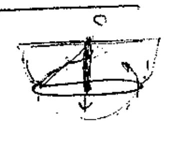
$$\therefore \boxed{X = -\dot{\omega} m R\,\mathrm{sen}\theta - \omega^2 R\cos\theta}$$

///

início (I)



fim (II)



EXERCÍCIO 10

a) Energia Cinética → TEC $\qquad \vec{V}_C = \vec{0}$ pois C é o CIR da barra

$$T = \frac{1}{2}m\cancel{V_C^2} + m\cancel{V_C}\,\dot{\theta}\wedge(G-C) + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

$J_C = J_G + md^2$ sendo que vale a relação $R^2 = d^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \therefore \boxed{d^2 = \frac{R^2}{2}}$

$\therefore J_C = \frac{mR^2}{6} + \frac{mR^2}{2} = \frac{4mR^2}{6} = \frac{2}{3}mR^2$, Finalmente $\boxed{\frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 = \tau_p}$

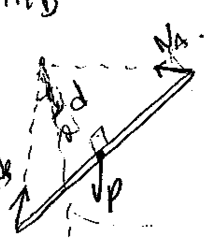
$$\tau_p = mg(-d\cos 45° + d\cos\theta) = \frac{mgR}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Assim: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}}$ (1) b

Derivando, $2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = \frac{-3g\,\mathrm{sen}\theta\,\cancel{\dot{\theta}}}{R\sqrt{2}} \qquad \therefore \boxed{\ddot{\theta} = \frac{-3g\,\mathrm{sen}\theta}{2\sqrt{2}R}}$ (2)

e $T = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}mR^2\left(\frac{\cancel{3}g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ (3)

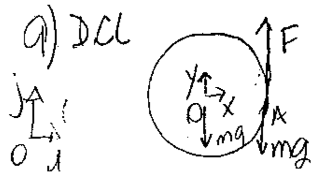
TMB



CASO (I) $\theta = 45° \longrightarrow m\vec{a}_G = -N_A\vec{i} + (N_B - mg)\vec{j}$ (4)

CASO II $\theta = 0° \longrightarrow m\vec{a}_G = \left((N_B - N_A)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left((N_A + N_B)\frac{\sqrt{2}}{2} - mg\right)\vec{j}$ (5)

a) DCL



T.E.C $\Rightarrow \boxed{\Delta T = \tau}$

$T = \frac{1}{2} m \cancel{V_O^2} + m\cancel{V_O}\,(\vec{\omega} \wedge (G-O)) + \frac{1}{2}\vec{\omega}_z^2 J_{Gz}$ $\quad \boxed{\vec{V_O} = 0}$

$T = \frac{1}{2}[\omega_z \vec{k}]^2 J_{Gz}$ $\quad J_{Gz\,(D+m)} = \frac{3mR^2}{2}$

OBS: $\begin{cases} \vec{\omega}_z = \omega(\vec{k}) \\ \dot{\omega}_z = \dot{\omega}_z(\vec{k}) \end{cases}$ $\quad \tau = \tau_P + \tau_F = mg(+R\,\text{sen}\theta) - \frac{K(R\theta)^2}{2}$ $\quad [O - (-R\,\text{sen}\theta)]$

Assim, como o "conjunto parte do REPOUSO da posição $\theta = 0$": $T_i = 0$

$\Delta T = \tau$, $\quad T_f - T_i = \tau$, $\quad \frac{1}{2}\omega_z^2 \frac{3mR^2}{2} = +mgR\,\text{sen}\theta - \frac{KR^2\theta^2}{2}$

$\therefore \boxed{\omega_z^2 = \frac{+4g\,\text{sen}\theta}{3R} - \frac{2K\theta^2}{3m}}$ (1) $\quad$ Derivando essa expressão:

$2\cancel{\omega_z}\dot{\omega}_z = +\frac{4g}{R}\,\text{sen}\theta \cdot \cancel{\omega_z} - \frac{4K\theta \cdot \cancel{\omega_z}}{m}$ $\quad \therefore \boxed{\dot{\omega}_z = +\frac{2g\,\text{sen}\theta}{3R} - \frac{2K\theta}{3m}}$ (2)

Agora, apliquemos o TMB para encontrar a aceleração do baricentro: $2m\vec{a}_G = (F - 2mg + Y)\vec{j} + X\vec{i}$ (3)

Sobre o baricentro, calculemos suas coordenadas:

$\begin{cases} x_G = \frac{m \cdot 0 + (R\cos\theta)m}{2m} = \frac{R\cos\theta}{2} \\ y_G = \frac{m \cdot 0 + (-R\,\text{sen}\theta)m}{2m} = \frac{-R\,\text{sen}\theta}{2} \end{cases}$ $\quad$ então $(G-O) = \left(\frac{R\cos\theta}{2}, \frac{-R\,\text{sen}\theta}{2}\right)$ $\quad \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

Com isso, vamos usar a relação cinemática de Poisson para encontrar o ~~sinal~~ $\vec{a}_G$:

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_z \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge \omega(\vec{k}) \wedge (G-O)$

$\vec{a}_G = -\frac{R\cos\theta}{2}\dot{\omega}_z\vec{j} - \frac{\dot{\omega}_z R\,\text{sen}\theta}{2}\vec{i} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\omega R\cos\theta}{2}(\vec{j}), -\frac{\omega R\,\text{sen}\theta}{2}\vec{i}\right)$

$\boxed{\vec{a}_G = \left(\frac{-R\cos\theta\,\dot{\omega}_z}{2} + \frac{\omega^2 R\,\text{sen}\theta}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{-\dot{\omega}_z R\,\text{sen}\theta}{2} - \frac{\omega^2 R\cos\theta}{2}\right)\vec{i}}$ (4)

Sabemos que $F = +KR\theta$ então, substituindo 4 em 3, temos que:

Para resolver o TMB, precisamos usar a relação cinética de Poisson

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \dot{\omega}_z \wedge (G-C) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (G-C)$$

$(G-C) = (+d\,\text{sen}\theta, +d\cos\theta)$

$\begin{cases} \vec{\omega}_z = \omega_z (-\vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}}_z = \dot{\omega}_z (-\vec{k}) \end{cases}$

$$\vec{a}_G = \dot{\omega}_z d\,\text{sen}\theta\,\vec{j} - \dot{\omega}_z d\cos\theta\,\vec{i} + \omega^2 d\,\text{sen}\theta\,\vec{i} - \omega^2 d\cos\theta\,\vec{j}, \quad d = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{a}_G = \left(-\frac{\dot{\omega}_z R\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^2 R\,\text{sen}\theta}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \left(\dot{\omega}_z \frac{R}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta + \omega^2 \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\vec{j} \quad (6)$$

Usando as expressões (1) e (2) em (6) igualando ao primeiro caso (4):

$$\vec{j}: \quad \frac{-N_A}{m} = \frac{3g\,\text{sen}\theta}{2\sqrt{2}R}\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{N_A}{m} = -\frac{3g}{2}\text{sen}\theta\left(\frac{\cos\theta}{2} + \cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3g\,\text{sen}\theta}{4}\left(3\cos\theta - \sqrt{2}\right)$$

Como num caso $\theta = 45$: $\quad N_A = \frac{-3g}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\frac{3mg}{8}} \quad (7)$

$$\text{e} \quad \frac{+N_B - mg}{m} = \frac{-3g\,\text{sen}\theta}{2\sqrt{2}R}\frac{R}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta - \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

$$\vec{i}: \quad \frac{N_B}{m} = -\frac{3g\,\text{sen}^2\theta}{4} - \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}\cos\theta + g, \quad \text{como } \theta = 45°$$

$$N_B = -\frac{3g}{8} + g = \frac{5g}{8}$$

Para o caso II $(\theta = 0°)$: $\quad (N_B - N_A)\frac{\sqrt{2}}{2m} = +\frac{3g\,\text{sen}\theta}{2\sqrt{2}R}\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}\frac{R\,\text{sen}\theta}{\sqrt{2}}$

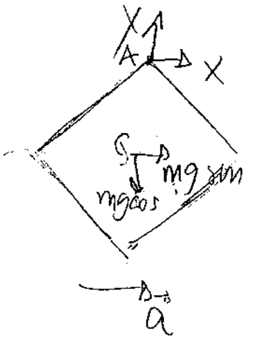
$$\therefore \boxed{N_B = N_A}$$

$$\text{e} \quad \left((N_A + N_B)\frac{\sqrt{2}}{2} - mg\right)\frac{1}{m} = -\frac{3g\,\text{sen}\theta}{2\sqrt{2}R}\frac{R}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta + \frac{3g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{R\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

$$\left(\frac{2N\sqrt{2}}{2} - mg\right)\frac{1}{m} = +\frac{3g}{2}\left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6mg - 3mg\sqrt{2}}{4} + \frac{4mg}{4}$$

$$N = \frac{10mg - 3\sqrt{2}mg}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{10\sqrt{2}mg - 6mg}{8} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}mg - 3mg}{4}}$$

12) . D.C.L.



TMB $\boxed{m\vec{a}_G = (X + mg\,sen\alpha)\vec{i} + (Y - mg\cos\alpha)\vec{j}}$ (1)

Determino que $\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}} = \vec{\omega}_z = \omega_z(-\vec{k}) \\ \ddot{\vec{\alpha}} = \dot{\vec{\omega}}_z = \dot{\omega}_z(-\vec{k}) \end{cases}$

$$\vec{K}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + \vec{\omega}_z J_O$$

$$\dot{\vec{K}}_O = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O + m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_z J_O$$

$i\ j\ k$

TMA no polo A ⇒ $\dot{\vec{K}}_A = \vec{M}_A^{EXT}$

($\vec{v}_A = 0$, mas $\vec{a}_A \neq 0$) $m\left(-\frac{c\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\wedge(a\cos\alpha\,\vec{i}, a\,sen\alpha\,\vec{j}) + \dot{\omega}_z(-\vec{k}).J_{Az} = mg\,sen\alpha\frac{c\sqrt{2}}{2}$

$$ma\frac{c\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\,\vec{k} - 2\dot{\omega}_z J_{Az} = mg\,sen\alpha\frac{c\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_z = \frac{mc\sqrt{2}(a\cos\alpha - g\,sen\alpha)}{2J_{Az}}} \quad (2)$$

Pela relação cinética de Poisson:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_z\wedge(G-A) + \vec{\omega}\wedge\omega(-\vec{k})\wedge(G-A)$$

$$\vec{a}_G = a\cos\alpha\,\vec{i} + a\,sen\alpha\,\vec{j} + \dot{\omega}(-\vec{k})\wedge\left(-\frac{c\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + \omega(-\vec{k})\wedge\omega(-\vec{k})\wedge\left(-\frac{c\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_G = a\cos\alpha\,\vec{i} + a\,sen\alpha\,\vec{j} - \dot{\omega}\frac{c\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \omega^2\frac{c\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_G = \left(a\cos\alpha - \dot{\omega}\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(a\,sen\alpha + \omega^2\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}} \quad (3)$$

Comparando (3) com (1)

$m\left(a\cos\alpha - \ddot{\alpha}\frac{c\sqrt{2}}{2}\right) = X + mg\,sen\alpha$ e $m\left(a\,sen\alpha + \dot{\alpha}^2\frac{c\sqrt{2}}{2}\right) = Y - mg$

∴ $\boxed{X = m\left(a\cos\alpha - \ddot{\alpha}\frac{c\sqrt{2}}{2} - g\,sen\alpha\right)}$, $\boxed{Y = ma\,sen\alpha + \frac{m\dot{\alpha}^2 c\sqrt{2}}{2} + mg\cos\alpha}$

D.L.C → COPIE a POSIÇÃO, DA figura, CERTA

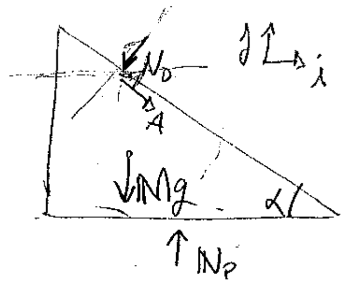
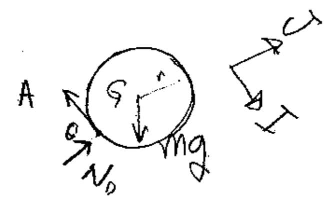
Confira se as forças estão sendo aplicadas nesses corpos mesmo.

Confira a massa total do sistema, o baricentro novo (conjunto)

Substituindo X_B em (3) e (5) temos as acelerações angulares das barras $\Rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}}_{AB} = \frac{3F}{2mL} - \frac{3.3F}{mL.14} \Rightarrow$ $\boxed{\dot{\vec{\omega}}_{AB} = \frac{6F}{7mL}\vec{k}}$

e $\dot{\vec{\omega}}_{BC} = \frac{6X_B}{mL} = \frac{6.3F}{14mL}$ $\therefore$ $\boxed{\dot{\vec{\omega}}_{BC} = -\frac{9F}{7mL}\vec{k}}$

---

16)  

a_{GP}? N_D?

TMB $\rightarrow$ Prisma $\rightarrow$ $M\vec{a}_{GP} = (A\cos\alpha - N_D \operatorname{sen}\alpha)\vec{i} + (N_P - Mg - A\operatorname{sen}\alpha - N_D\cos\alpha)\vec{j}$

$(\vec{i})$ $a_{GP}\vec{i} = \frac{A\cos\alpha - N_D\operatorname{sen}\alpha}{m}$ (1)

Usando o sistema $\vec{I},\vec{J}$ para o disco:

$(\vec{j})$ $a_{GP}\vec{j} = 0 = \frac{N_P - Mg - A\operatorname{sen}\alpha - N_D\cos\alpha}{m}$ (2)

Disco $\rightarrow$ $m\vec{a}_{GD} = (mg\operatorname{sen}\alpha - A)\vec{I} + (N_D - mg\cos\alpha)\vec{J}$

Determino $\begin{cases} \vec{\omega}_D = \omega_D(-\vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}}_D = \dot{\omega}_D(-\vec{k}) \end{cases}$

$(\vec{I})$ $a_{GD}\vec{I} = \frac{mg\operatorname{sen}\alpha - A}{m}$ (3)

$(\vec{J})$ $a_{GD}\vec{J} = \frac{N_D - mg\cos\alpha}{m}$ (4)

TMA para o disco $\rightarrow$ $\boxed{\dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G^{EXT}}$ $\dot{\omega}_{Disco}(-\vec{k}).\frac{mR^2}{2} = -AR$

$\boxed{\dot{\omega}_{DISCO} = +\frac{2A}{mR}}$ (5) $\quad \vec{I}\ \vec{J}\ \vec{k}$

cinemática para o disco

$\vec{a}_{GD} = \vec{a}_C + \dot{\omega}_{Disco}(-\vec{k})\wedge(+R\vec{J}) + \omega_D(-\vec{k})\wedge\omega_D(-\vec{k})\wedge(R\vec{J})$

$a_C(\vec{J}) + \underbrace{\dot{\omega}_D R\vec{I}}_{\text{aceleração tangencial}} - \omega_D^2 R\vec{J}$ (6)

Com (3), (5) e (6) chegamos que $\dot{\omega}_D R = \frac{2A}{m} = \frac{mg\operatorname{sen}\alpha}{m} - A$

$\therefore$ $\boxed{A = \frac{mg\operatorname{sen}\alpha}{3}}$ (7)

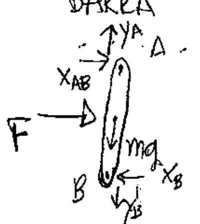
Ainda, sabemos que o disco não se move na direção $\vec{J}$ então:

$a_{GD}\vec{J} = 0 \Rightarrow \boxed{N_D = mg\cos\alpha}(-\vec{J})$ e finalmente em (1)

$\vec{a}_{G\,prisma} = \frac{mg\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}{3} - mg\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha = \frac{-2\,mg\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{3M} \Rightarrow -\frac{mg\operatorname{sen}(2\alpha)}{6M}\vec{i}$

NS

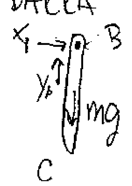
15) BARRA AB   TMB's



(I) $\rightarrow m\vec{a}_{G_{AB}} = (X_A - X_B + F)\vec{i} + (Y_A - Y_B - mg)\vec{j}$ (1)

OBS, determino que $\begin{cases}\vec{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\vec{k}\\ \dot{\vec{\omega}}_{AB} = \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\end{cases}$

BARRA BC



(II) $\rightarrow m\vec{a}_{G_{BC}} = X_B\vec{i} + (Y_B - mg)\vec{j}$ (2)

e determino que $\begin{cases}\vec{\omega}_{BC} = \omega_{BC}(-\vec{k})\\ \dot{\vec{\omega}}_{BC} = \dot{\omega}_{BC}(-\vec{k})\end{cases}$

Defino momento angular, tal que: $\vec{K}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_G + \vec{\omega}_z J_O$ (PLANO)

então, aplicando o TMA em (I) $\quad \dot{\vec{K}}_O = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O + m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \dot{\omega}_z J_O$

$\dot{\vec{K}}_A = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_A + \vec{M}_A^{EXT} \longrightarrow \cancel{m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_A} + m(G-O)\wedge\overset{0}{\vec{a}_A} + \dot{\vec{\omega}}_{AB}J_A = \cancel{m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_A} + \vec{M}_A^{EXT}$

$J_{Az} = J_{Gz} + md^2 \rightarrow J_{Az} = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$

$\dot{\vec{\omega}}_{AB}\cdot\frac{mL^2}{3} = \vec{M}_A^{EXT} = +F\frac{L}{2} - X_B L \rightarrow \boxed{\dot{\omega}_{AB}(\vec{k}) = \frac{3}{2}\frac{(F-2X_B)}{mL}}$ (3)

Pela relação cinemática de Poisson, temos: (ainda sobre a barra AB)

$\vec{a}_{G_{AB}} = \overset{0}{\vec{a}_A} + \dot{\vec{\omega}}_{AB}\wedge(B-G_{AB}) + \vec{\omega}_{AB}\wedge\underbrace{\vec{\omega}_{AB}\wedge(B-G_{AB})}_{\omega_{AB}\vec{k}\wedge(-\frac{L}{2}j)}$ $\qquad (B-G_{AB}) = (-\frac{L}{2}j)$

$\vec{a}_{G_{AB}} = \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\wedge(-\frac{L}{2}\vec{j}) + \omega_{AB}\vec{k}\wedge(\omega_{AB}\frac{L}{2}\vec{i})$

$\boxed{\vec{a}_{G_{AB}} = \dot{\omega}_{AB}\frac{L}{2}\vec{i} + \omega_{AB}^2\frac{L}{2}\vec{j}}$ (4)

TMB
TMA
porém restrito

TMA para a barra BC: $\dot{\vec{K}}_{G_{BC}} = \vec{M}_{G_{BC}}^{EXT} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{BC}J_{G_{BC}} = -X_B\frac{L}{2} \Rightarrow \dot{\omega}_{BC}(-\vec{k}) = \frac{-X_B\frac{L}{2}}{\frac{mL^2}{12}}$

$\therefore \boxed{\dot{\omega}_{BC} = +\frac{X_B\cdot 6}{mL}}$ (5) / Agora pela relação cinemática de Poisson

$\vec{a}_{G_{BC}} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{BC}\wedge(G_{BC}-B) + \vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{\omega}_{BC}\wedge(G_{BC}-B)$ $\quad (G_{BC}-B) = (-\frac{L}{2}\vec{j})$, mas

$\vec{a}_B = \overset{0}{\vec{a}_A} + \dot{\vec{\omega}}_{AB}\wedge(-L\vec{j}) + \vec{\omega}_{AB}\wedge\vec{\omega}_{AB}\wedge(-L\vec{j}) \Rightarrow \dot{\omega}_{AB}L\vec{i} + \omega_{AB}^2L\vec{j}$

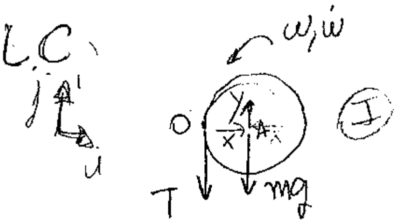
então $\vec{a}_{G_{BC}} = \dot{\omega}_{AB}L\vec{i} + \omega_{AB}^2L\vec{j} + \dot{\omega}_{BC}(-\vec{k})\wedge(-\frac{L}{2}j) + \omega_{BC}(-\vec{k})\wedge\omega_{BC}(-\vec{k})\wedge(-\frac{L}{2}\vec{j})$

$\vec{a}_{G_{BC}} = \dot{\omega}_{AB}L\vec{i} + \omega_{AB}^2L\vec{j} - \dot{\omega}_{BC}\frac{L}{2}\vec{i} + \omega_{BC}^2\frac{L}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{G_{BC}} = (\dot{\omega}_{AB}L - \dot{\omega}_{BC}\frac{L}{2})\vec{i} + (\omega_{AB}^2L + \omega_{BC}^2\frac{L}{2})\vec{j}$ (6)

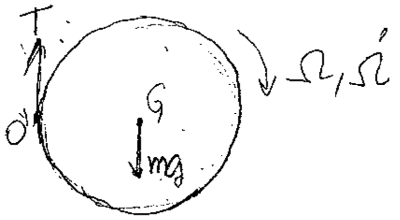
Para encontrar X_B usamos as relações (3), (5) e (6)$\vec{i}$ em (2)$\vec{i}$:

$\frac{3}{2}\frac{(F-2X_B)}{m\cancel{L}}\cancel{L} - \frac{X_B 6}{m\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{2} = \frac{X_B}{m}$; $\frac{3F}{2m} - \frac{3X_B}{m} - \frac{3X_B}{m} = \frac{X_B}{m}$ $\therefore \boxed{X_B = \frac{3F}{14}}$ na direção indicada no DCL.

11) D.L.C



(I)



(II) $T_1 = 0$

TMB $\rightarrow$ (I) $m\vec{a}_A = X\vec{i} + (Y - T - mg)\vec{j}$ (1) $\rightarrow \begin{cases} X = 0 \text{ e} \\ Y = T - mg \end{cases}$

(II) $m\vec{a}_G = 0\vec{i} + (T - mg)\vec{j}$ (2)

TMA $\rightarrow$ (I) $\vec{K}_{G_A} = \vec{M}_G$

$J_z \dot{\vec{\omega}}(+k) = \oplus T\frac{R}{2} \rightarrow \frac{mR^2}{2\cdot 4}\dot\omega = T\frac{R}{2} \therefore \dot\omega = \frac{4T}{mR}$ (3)

$\left\{ \boxed{\dot\omega = 2\dot\Omega} \right.$

(II) $\dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G$

$J_z \dot\Omega(-k) = -TR \rightarrow \frac{mR^2}{2}\dot\Omega = -TR \therefore \dot\Omega = +\frac{2T}{mR}$ (4)

$\vec{a}_O = \vec{a}_A^{\,\nearrow 0} + \dot{\vec{\omega}}(k) \wedge (O - A) + \omega \wedge \omega \wedge (O - A) \qquad (O - A) = -\frac{R}{2}i$

$\vec{a}_O = -\frac{\dot\omega R}{2}j + \frac{\omega^2 R}{2}i$ $\rightarrow$ na direção $j \rightarrow$ aceleração do fio
$\rightarrow$ na direção $i \rightarrow$ centrípeta

$\vec{a}_{G(II)} = \vec{a}_O(\text{fio}) + \dot\Omega(k) \wedge (G - O) + \Omega \wedge \Omega \wedge (G - O) \qquad (G - O) = +Ri$

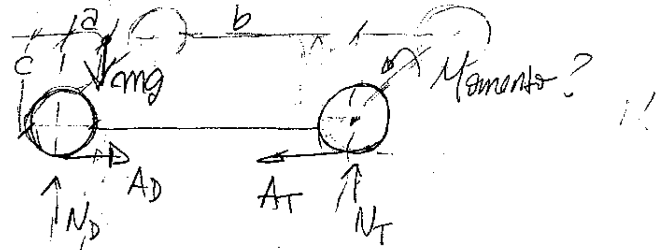
$\boxed{\vec{a}_G = -\frac{\dot\omega R}{2}j - \dot\Omega R j - \Omega^2 R i}$ (5) Agora comparando com (2)

$\frac{T - mg}{m} = -\frac{\dot\omega R}{2} - \dot\Omega R \xrightarrow{(3 \text{ e } 4)} \frac{4T}{mR}\frac{R}{2} + \frac{2T}{mR} = \frac{mg - T}{m}$

$4T + T = mg \therefore \boxed{T = \frac{mg}{5}}$

$a_G = T - mg = -\frac{4}{5}mg$ $\boxed{\dot\omega = \frac{4g}{5R}}$ e $\boxed{\dot\Omega = \frac{2}{5}\frac{g}{R}}$

14) a)



T.M.B → $(N_D + N_T - mg)\vec{j} + (A_T - A_D)\vec{i} = m.\vec{a}_G$

Porem $\vec{a}_{G(y)} = 0$ então $\boxed{N_D + N_T = mg}$ (1)

Para $a_{Gx}(\vec{i})$ ser máxima ⇒ $A_T = \mu N_T$ e $A_D = 0$

então $\boxed{ma_G = A_T = \mu N_T}$ (2)

T.M.A → $\dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G^{EXT}$ ⇒ $m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_G + m(G-O)\wedge \vec{a}_G + [i\,j\,k][J_G][\dot{\omega}]^T = 0$ ∴ $\boxed{M_G^{EXT} = 0}$

$M_G^{EXT} = \cancel{A_D c} - A_T c - N_D a + N_T b = 0$

$\boxed{N_D a + A_T c = N_T b}$ (3)

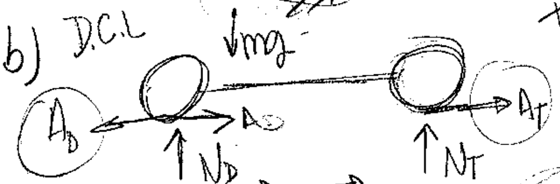
Com (1), (2) e (3) chegamos a: $a(mg - N_T) + \mu N_T c = N_T b$

$\boxed{N_T = \dfrac{a mg}{a - \mu c + b}}$

$\boxed{N_D = mg - \dfrac{a mg}{(a - \mu c + b)} = \dfrac{mg(b - \mu c)}{(a - \mu c + b)}}$

$\boxed{\cancel{m}a_G = A_T = \dfrac{\mu . a mg}{a - \mu c + b}}$

b) D.C.L



TMB $\begin{cases} N_T + N_D = mg \\ A_D - A_T = ma_G \end{cases}$ → $a_{G\,max}$ → $\begin{cases} A_T = 0 \\ A_D = \mu N_D \end{cases}$

TMA → $\dot{\vec{K}}_G = \vec{M}_G$ ⇒

$0 = -A_D c - N_D a + \cancel{A_T c} + N_T b$

$0 = -\mu N_D c + (mg - N_T)b - N_D a$

$N_D(\mu c + a + b) = mg b$ ∴ $\boxed{N_D = \dfrac{mgb}{\mu c + a + b}}$

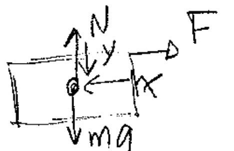
$N_T = \dfrac{mg(\mu c + a + b) - mgb}{\mu c + a + b}$

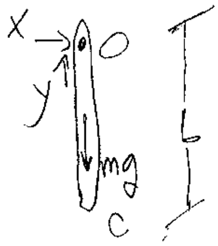
$\boxed{N_T = \dfrac{mg(\mu c + a)}{\mu c + a + b}}$

e $\boxed{a_{G\,MAX} = \dfrac{A_D}{m} = \dfrac{\mu \cancel{m} g b}{\cancel{m}(\mu c + a + b)}}$

13)

D.C.L





TMB $\vec{R} = m\vec{a}$

ANEL $(F-X)\vec{i} + (N - Y - mg)\vec{j} = m\vec{a}_{G\,ANEL}$ (1)

BARRA $X\vec{i} + (Y - mg)\vec{j} = m\vec{a}_{G\,BARRA}$ (2)

$\dot{\vec{\omega}}$? $\vec{a}_{O\,(ANEL)}$? X, Y?

Determino que $\begin{cases} \vec{\omega}_z = \omega_z(-\vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}}_z = \dot{\omega}_z(-\vec{k}) \end{cases}$

$\vec{K}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + \vec{\omega}_z J_O$

$\dot{\vec{K}}_O = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O + m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_z J_O$

TMA BARRA $\Rightarrow$ $\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O^{EXT} + m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O$

$\cancel{m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O} + m(-\frac{L}{2}\vec{j})\wedge a_O(\vec{i}) + \dot{\omega}_z(-\vec{k})\frac{mL^2}{3} = M_O^{EXT} + \cancel{m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O}$

$\frac{mL}{2}a_O\vec{k} - \frac{mL^2}{3}\dot{\omega}_z\vec{k} = 0 \therefore \boxed{\dot{\omega}_z = \frac{3a_O}{2L}}$ (3)

$J_G^{BARRA} = \frac{mL^2}{12}$

$J_O = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$

i j
k

Com a relação cinemática de Poisson, na barra:

$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}_z(-\vec{k})\wedge(-\frac{L}{2}\vec{j}) + \omega(-\vec{k})\wedge\omega(-\vec{k})\wedge(-\frac{L}{2}\vec{j})$

$\boxed{\vec{a}_G = a_O(\vec{i}) - \dot{\omega}_z\frac{L}{2}\vec{i} + \omega^2\frac{L}{2}\vec{j}}$ (4)

sendo $\vec{a}_O$ a aceleração do ponto O, e portanto a aceleração do anel na direção $\vec{i}$, temos em (1) que

$\begin{cases} (\vec{i}) & m\vec{a}_O = F - X \\ (\vec{j}) & N - Y - mg = 0 \end{cases}$ (5)

[Para o instante inicial $\omega_z = 0$ e portanto, comparando (4 e 2)]

$\begin{cases} \frac{X}{m} = a_O - \dot{\omega}_z\frac{L}{2} \xrightarrow{(3)} \frac{2}{3}L\dot{\omega}_z - \frac{\dot{\omega}_z L}{2} = \boxed{X = \frac{\dot{\omega}_z mL}{6}} \text{ (6)} \\ Y = mg \end{cases}$

$(6 \to 5)$ e $(3 \to 5)$ $m\left(\frac{2L\dot{\omega}_z}{3}\right) + \frac{m\dot{\omega}_z L}{6} = F \therefore \boxed{\dot{\omega}_z = \frac{6F}{5Lm}}$

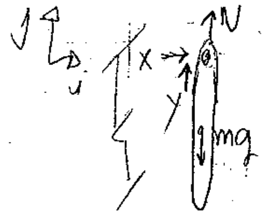
$a_{O\,(ANEL)} \xrightarrow{(3)} \frac{2L}{3}\left(\frac{6F}{5Lm}\right) = \boxed{\frac{4F}{5m}}$

$\boxed{X = \frac{F}{5}\vec{i} \text{ e } Y = mg\vec{j}}$

$\dot{K}_O = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_O + M_O^{EXT}$

$K_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + \vec{\omega}_z J_{Oz}$

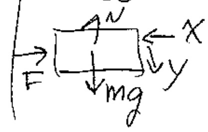
13) $\uparrow j$ $\rightarrow i$



BARRA - TMB: $\vec{R} = m\vec{a}$

$$\boxed{m\,\vec{a}_G = (F - X)\vec{i} + (Y - mg)\vec{j}} \quad (1)$$

ANEL



$(F-X)\vec{i}$ $(N - Y - mg)\vec{j}$

Sendo $\vec{K}_0$ o momento angular no pólo $O \Rightarrow \vec{K}_0 = m(G-O)\wedge\vec{v}_0 + \frac{1}{2} J_0 \vec{\omega}_z$

deriv. $\dot{\vec{K}}_0 = m(\vec{v}_G - \vec{v}_0)\wedge\vec{v}_0 + m(G-O)\wedge\vec{a}_0 + \frac{1}{2}J_0\dot{\vec{\omega}}_z = m\vec{v}_G\wedge\vec{v}_0 + m(G-O)\wedge\vec{a}_0 + \frac{1}{2}J_0\dot{\vec{\omega}}_z$

(derivada do momento angular, pelo TMA) sabendo que no instante inicial $\vec{v}_0 = 0$ mas $\vec{a}_0 \neq 0$, então

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_0 = m(G-O)\wedge\vec{a}_0 + \frac{1}{2}J_0\dot{\vec{\omega}}_z = \vec{M}_0^{EXT} = 0} \quad (2)$$

$J_0 = \rho\int_0^L r^2 dr \rightarrow \frac{mL^2}{3}$

$J_G = \frac{mL^2}{3} - \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{12}$

$i \; j \; k$

Determino que: $\begin{cases} \vec{\omega}_z = \omega_z(-\vec{k}) \\ \dot{\vec{\omega}}_z = \dot{\omega}_z(-\vec{k}) \end{cases}$ então pela relação cinemática de Poisson:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_0 + \dot{\omega}_z(-\vec{k})\wedge(G-O) + \omega(-\vec{k})\wedge\omega(-\vec{k})\wedge(G-O) \quad , (G-O) = (0, -\tfrac{L}{2}\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_G = a_0\vec{i} - \dot{\omega}_z\frac{L}{2}\vec{i} + \omega^2\frac{L}{2}\vec{j}} \quad (3)$$

Em (2): $m(0, -\frac{L}{2}\vec{j})\wedge a_0(\vec{i}) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\omega}_z(-\vec{k}) = 0$

$$\frac{mL}{2}a_0\vec{k} = \frac{1}{6}mL^2\dot{\omega}_z\vec{k} \rightarrow \boxed{a_0 = \frac{\dot{\omega}_z L}{3}} \quad (4)$$

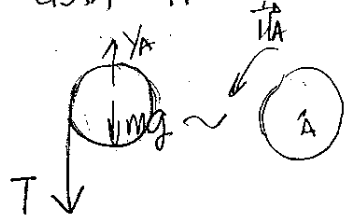
Aplicando o TMA para o polo G (baricentro) temos que:

$\dot{\vec{K}}_G = \frac{1}{2}J_G\dot{\omega}_z(-\vec{k}) = \vec{M}_G$ $\qquad J_G = J_0 - md^2 = \frac{mL^2}{3} - \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{12}$

$\dot{\vec{K}}_G = -\frac{mL^2}{24}\dot{\omega}_z = -F\frac{L}{2} - X\frac{L}{2}$ $\quad \therefore \quad \boxed{\dot{\omega}_z = \frac{(-F-X)12}{-mL} = \frac{12(F+X)}{mL}} \quad (5)$

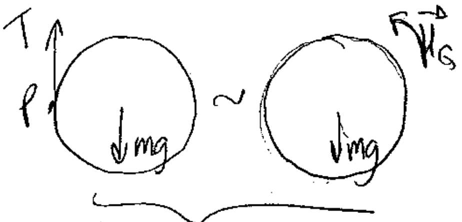
Como não há atrito na articulação, não há reação horizontal (tangencial) $\therefore$

LISTA 11 $\qquad H \to$ torque $\approx I\alpha$.



$$\vec{M}_A = \frac{TR}{2}\vec{k} \Rightarrow \vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_A = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\dot{\omega}\vec{k}$$

$\therefore \; TR = \frac{mR^2}{4}\dot{\omega}$ (1) equação para o primeiro disco (A)



(não usamos TMB porque não estamos interessados na reação do vínculo)

$$\begin{cases} \vec{R} = (T - mg)\vec{j} \\ \vec{R} = -ma_G\vec{j} \end{cases} \Rightarrow T - mg = -ma_G$$

$$\boxed{m(g - a_G) = T} \; (2)$$

$$\begin{cases} \vec{M}_G = -TR\vec{k} \\ \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G = \frac{1}{2}mR^2(-\dot{\Omega})\vec{k} \end{cases} \Rightarrow -TR = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\Omega}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mR\dot{\Omega}} \; (3)$$

mas, $(\vec{a}_G = ?)$ · sabemos que v_G pode ser calculado a partir de v_P:

OBS: Em P a aceleração do fio não é a aceleração do disco G!

$$\vec{v}_G = \vec{v}_P + \Omega(-\vec{k}) \wedge (G - P)$$

$$\vec{v}_G = -\frac{\omega R}{2}\vec{j} - \Omega R\vec{j} \;\; \therefore \;\; \vec{v}_G = -\left(\frac{\omega}{2} + \Omega\right)R\vec{j}$$

Então: $\vec{a}_G$ = derivada de $\vec{v}_G$ $(\dot{\vec{v}}_G)$ = $\boxed{-\left(\frac{\dot{\omega}}{2} + \dot{\Omega}\right)R\vec{j}}$ (*)

Agora temos 3 equações para 3 incógnitas.

$$\begin{cases} (2) \; m(g) + m\left(\frac{\dot{\omega}}{2} + \dot{\Omega}\right)R = T \\ (1) \; T = \frac{mR\dot{\omega}}{4} \\ (3) \; T = \frac{1}{2}mR\dot{\Omega} \end{cases}$$

$$\frac{mR\dot{\omega}}{4} = \frac{1}{2}mR\dot{\Omega}$$

(1) = (3) e (2)

$$T = mg + \frac{m\dot{\omega}R}{2} + m\dot{\Omega}R \Rightarrow \boxed{T = mg + 2m\dot{\Omega}R}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = 2\dot{\Omega}} \; (*)$$

$$T + m2\dot{\Omega}R = mg$$

$$\frac{mR}{2}\dot{\Omega} + 2mR\dot{\Omega} = mg$$

$$R\dot{\Omega}\left[\frac{5}{2}\right] = g \Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{2g}{5R} \;\; \therefore \;\; \dot{\vec{\omega}} = \frac{4g}{5R}$$