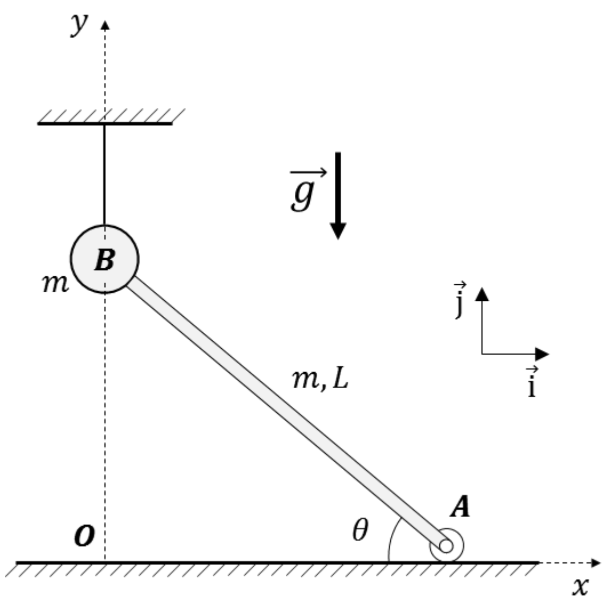
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 06 de dezembro de 2016 –
Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

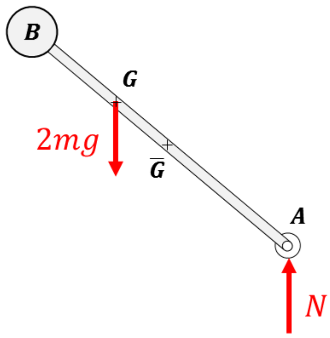
QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Considere o corpo constituído por uma barra delgada homogênea *AB*, de massa *m* e comprimento *L*, rigidamente ligada em *B* a uma massa pontual *m* e vinculada em *A* a um rolete que pode escorregar sem atrito sobre o plano horizontal. O corpo é mantido suspenso e em repouso por meio de um fio preso à extremidade *B*, conforme mostrado na figura. Repentinamente, esse fio se rompe e o corpo passa a mover-se livremente no plano *xy*. Para o instante imediatamente posterior ao rompimento do fio, pede-se:



(a) o diagrama de corpo livre do corpo *AB* ;
(b) o centro de massa e o momento de inércia J_{Gz} do corpo *AB*;
(c) a aceleração do centro de massa *G* do corpo *AB*;
(d) A aceleração angular $\dot{\omega}$ do corpo *AB*;
(e) A reação no rolete *A*.

a) Diagrama de corpo livre:

(0,5)



b) Da definição de baricentro:

$(G-O)=\frac{\sum m_i(P_i-O)}{\sum m_i}$, tem-se para o corpo (barra + esfera):

$$\boxed{(G-O)=\frac{L}{4}\left(cos\theta\vec{\mathbf{i}}+3sen\theta\vec{\mathbf{j}}\right)} \quad \text{(b1)} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Já o momento de inércia do corpo (barra + esfera) é dado por:

$$J_z^G=J_{z\ barra}^G+J_{z\ esfera}^G=\left(J_{z\ barra}^{\bar{G}}+md_{G\bar{G}}{}^2\right)+md_{GB}{}^2$$

$$\boxed{J_z^G=\frac{5mL^2}{24}} \quad \text{(b2)} \qquad \textbf{(0,5)}$$

c) Utilizando a expressão geral do campo de acelerações de um corpo rígido, tem-se:

$$\vec{a}_G=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}\wedge(G-A)+\underbrace{\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]}_{=\vec{0},\ \text{pois parte do repouso}}$$

Sendo $\vec{a}_A=a_A\vec{\mathbf{i}}$, $\dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\vec{\mathbf{k}}$ e $(G-A)=\frac{3L}{4}\left(-cos\theta\vec{\mathbf{i}}+sen\theta\vec{\mathbf{j}}\right)$, tem-se:

$$\boxed{\vec{a}_G=\left(a_A-\frac{3Lsen\theta}{4}\dot{\omega}\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(-\frac{3Lcos\theta}{4}\dot{\omega}\right)\vec{\mathbf{j}}} \quad \text{(c1)} \qquad \textbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 06 de dezembro de 2016 –
Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

d) Aplicando o TQMA ao corpo em relação ao baricentro G, tem-se:

$$\underbrace{2m(G-G)\wedge\vec{A}_G}_{=\vec{0}}+\frac{d}{dt}([I_G]\vec{\omega})=\vec{M}_G^{ext} \quad ; \quad \text{Movimento plano: } \frac{d}{dt}([I_G]\vec{\omega})=(J_z^G\dot{\omega})\vec{\mathbf{k}}$$

$$(J_z^G\dot{\omega})\vec{\mathbf{k}}=\left(\frac{3L\cos\theta}{4}N\right)\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{Utilizando (b2), obtém-se:} \qquad \dot{\omega}=\frac{18\cos\theta N}{5mL} \quad \text{(d1)}$$

Aplicando o TQM ao sistema, tem-se:

$$(2m)\vec{a}_G=\vec{R}^{ext}=(N-2mg)\vec{\mathbf{j}} \quad ; \quad \text{Utilizando (c1) e separando as componentes:}$$

$$\begin{cases} 2m\left(a_A-\frac{3L\,sen\theta}{4}\dot{\omega}\right)=0, \; a_A=\frac{3L\,sen\theta}{4}\dot{\omega} \\ -\frac{3mL\cos\theta}{2}\dot{\omega}=N-2mg, \; N=-\frac{3mL\cos\theta}{2}\dot{\omega}+2mg \end{cases} \quad \text{(d2)}$$

Substituindo N da segunda expressão de (d2) em (d1) e isolando $\dot{\omega}$, obtém-se:

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}}=\left[\frac{36g\cos\theta}{(5+27\cos^2\theta)L}\right]\vec{\mathbf{k}}} \qquad \text{(d3)} \qquad \mathbf{(1,0)}$$

e) Substituindo (d3) nas expressões de (d2), tem-se:

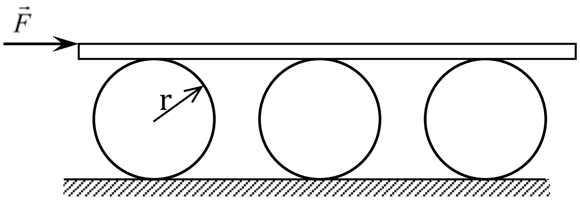
$$N=\frac{10mg}{(5+27\cos^2\theta)} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

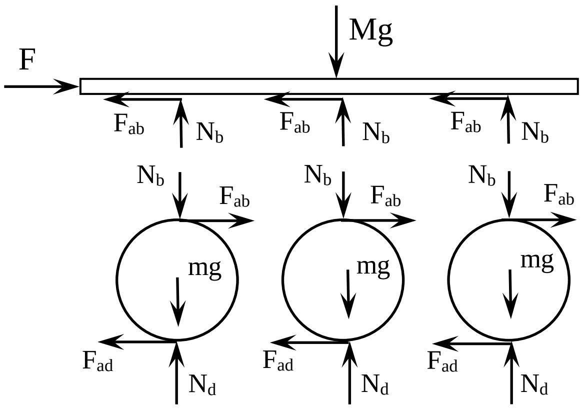
PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 06 de dezembro de 2016 –
Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)



QUESTÃO 2 (3,0 pontos). Uma barra de massa M apoia-se sobre três cilindros homogêneos de raio r e massa m. Uma força horizontal F atua na barra colocando o sistema em movimento. Admitindo-se que não ocorra escorregamento em nenhum contato, pede-se:

(a) os diagramas de corpo livre da barra e dos cilindros;
(b) a expressão da energia cinética do sistema;
(b) aceleração da barra.

a) Diagrama de corpo livre: **(1,0)**



b) A velocidade e aceleração da barra são:

$$v_B = 2\omega r$$
$$a_B = 2\dot{\omega} r$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T = \frac{1}{2} M v_B + 3\frac{1}{2} m(\omega r)^2 + 3\frac{1}{2} J_G \omega^2$$

$$\boxed{T = \left(\frac{8M + 9m}{4}\right)\omega^2 r^2}$$ **(1,0)**

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$\Delta T = \tau$, $T_0 = 0$ Do item b) e $\tau = Fx$ **(0,5)** , tem-se $\left(\frac{8M + 9m}{4}\right)\omega^2 r^2 = Fx$

Derivando com relação ao tempo:

$$\frac{8M + 9m}{4} 2\omega\dot{\omega} r^2 = F v_B \qquad \frac{8M + 9m}{4} 2\omega\dot{\omega} r^2 = F 2\omega r \qquad \dot{\omega} = \frac{4F}{(8M + 9m) r}$$

Logo, a aceleração da barra será:

$$\boxed{a_B = \frac{8F}{8M + 9m}}$$ **(0,5)**

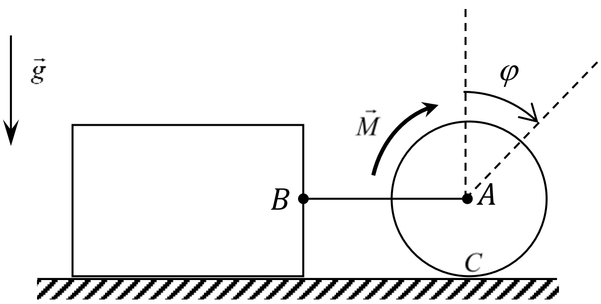
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 06 de dezembro de 2016 –
Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). Um disco A de massa m_A e raio R é ligado a um bloco B de massa m_B através de uma barra AB, de massa desprezível. O sistema parte do repouso ($\varphi(0)=0$ e $\dot\varphi(0)=0$) sob a ação de um binário de momento M constante. Sabendo que o coeficiente de atrito nos contatos é μ e que o disco rola sem escorregar, pede-se:



(a) a expressão da energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot\varphi$ do disco;
(b) o trabalho realizado pelos esforços atuantes no sistema, em função de φ;
(c) a velocidade e a aceleração angulares do disco;
(d) a força na barra e as componentes da força de contato em C.

a) As velocidades de A e B são:

$$v_A=\dot\varphi R \quad \text{e} \quad v_B=v_A$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T=T_{disco}+T_{bloco}=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}J_A\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2$$

$$\boxed{T=\frac{(3m_A+2m_B)}{4}(\dot\varphi R)^2} \quad \textbf{(1,5)}$$

b) Apenas a força de atrito e o momento realizam trabalho no sistema, logo:

$$\boxed{\tau=M\varphi-F_{atB}R\varphi=(M-\mu m_BgR)\varphi} \quad \textbf{(1,0)}$$

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$$\Delta T=\tau \quad , \quad T_0=0$$

A partir dos itens a) e b), tem-se:

$$\left(\frac{3}{4}m_A+\frac{1}{2}m_B\right)(\dot\varphi R)^2=(M-\mu m_BgR)\varphi$$

$$\boxed{\dot\varphi=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{(M-\mu m_BgR)\varphi}{(3m_A+2m_B)}}} \quad \textbf{(0,25)}$$

Derivando com relação ao tempo:

$$\boxed{\ddot\varphi=\frac{2(M-\mu m_BgR)}{(3m_A+2m_B)R^2}} \quad \textbf{(0,25)}$$

d) Aplicando o TQMA ao disco em relação ao pólo A (movimento plano):

$$(J_A\ddot\varphi)=(M-F_{atC}R) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}m_AR^2\right)\ddot\varphi=(M-F_{atC}R) \quad , \quad \boxed{F_{atC}=\frac{M}{R}-\frac{m_A}{2}R\ddot\varphi} \quad \textbf{(0,25)}$$

Aplicando o TMB ao disco na direção horizontal, tem-se:

$$(m_Aa_A)=(F_{atC}-F_{AB}) \quad , \quad F_{AB}=F_{atC}-m_Aa_A=\frac{M}{R}-\frac{m_A}{2}R\ddot\varphi-m_AR\ddot\varphi \quad , \quad \boxed{F_{AB}=\frac{M}{R}-\frac{3m_A}{2}R\ddot\varphi} \quad \textbf{(0,25)}$$