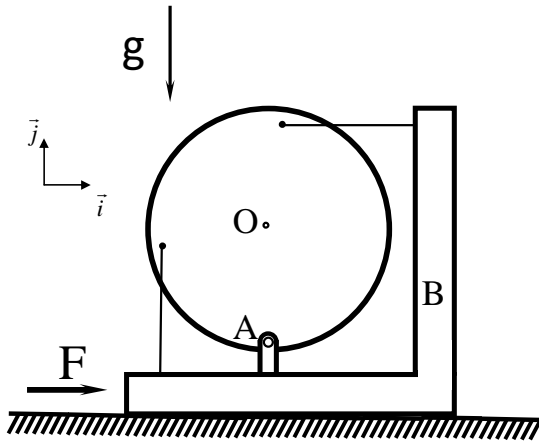




PME 3100 Mecânica A

Prova substitutiva - 3 de julho de 2015 – Duração 110 minutos

Não é permitido o uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos eletrônicos similares

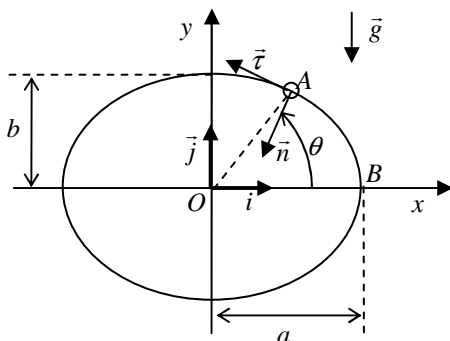
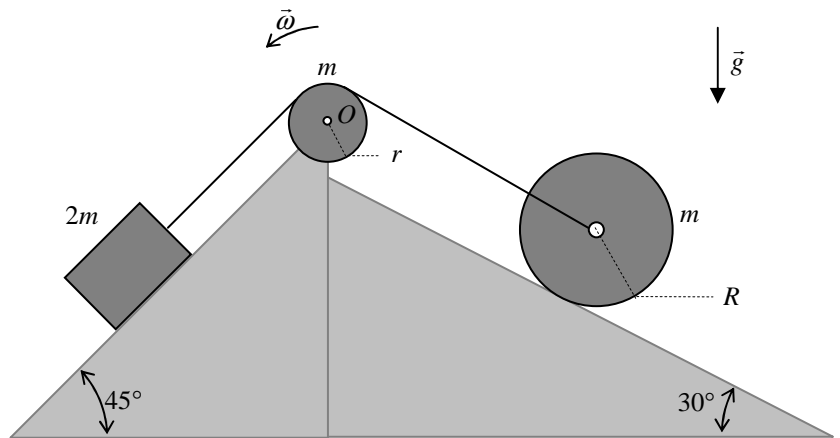


QUESTÃO 1 (4,0 pontos). O sistema mostrado na figura está inicialmente em repouso sobre superfície horizontal sem atrito. O bloco B tem massa m e o disco de centro O tem massa m e raio R . Uma força F é aplicada sobre o bloco no mesmo instante em que os dois fios se rompem. Para esse instante, pedem-se:

- (a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;
- (b) a aceleração do ponto A;
- (c) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco;
- (d) as componentes da reação na articulação A.

QUESTÃO 2 (4,0 pontos). Um cabo inextensível passante por uma polia articulada em O , de massa m e raio r , é ligado em uma de suas extremidades a um bloco de massa $2m$ e à outra a um disco de massa m e raio R . Sabe-se que o coeficiente de atrito entre a superfície do plano inclinado e a superfície de contato do bloco vale μ , que não há atrito na articulação O e que o disco rola sem escorregar. Admitindo-se que o sistema parta do repouso, pede-se:

- (a) esboçar os diagramas de corpo livre do bloco, do disco e da polia em um instante t arbitrário;
- (b) escrever a expressão da energia cinética do sistema para esse instante ;
- (c) indicar as forças que realizam trabalho não nulo;
- (d) determinar a velocidade angular da polia no instante em que o bloco tiver percorrido a distância ℓ



QUESTÃO 3. (2,0 pontos). Um pequeno anel A de massa m é vinculado a um arame circular descrito pela curva $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$

Admitindo-se que não exista atrito entre o arame e o anel e que este seja abandonado em repouso na posição $P = \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}, b \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, sujeito à ação da gravidade, pede-se, para o instante em que atingir o ponto $B = (a, 0)$:

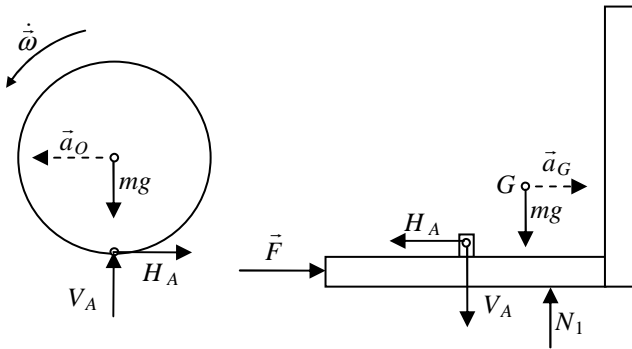
- (a) determinar os versores do triedro de Frenet em função dos versores da base $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$;
- (b) determinar a magnitude da velocidade do anel;
- (c) determinar a componente normal da aceleração do anel;
- (d) esboçar o diagrama de corpo livre do anel;
- (e) determinar a componente tangencial da aceleração do anel;
- (f) determinar a reação de contato exercida pelo arame sobre o anel.



RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1

Na figura abaixo apresentam-se os diagramas de corpo livre do disco e do bloco no instante em que ocorre a ruptura dos cabos:



(a) 1,0 ponto

Considerando-se o diagrama de corpo livre do disco, tem-se:

$$H_A = -ma_O \quad (1)$$

$$V_A - mg = 0 \quad (2)$$

$$(O-A) \wedge (m\vec{a}_A) + J_{Az} \dot{\omega} \vec{k} = 0 \Rightarrow R\vec{j} \wedge (ma_A \vec{i}) + \frac{3}{2} mR^2 \dot{\omega} \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow a_A = \frac{2}{3} R\dot{\omega} \quad (3)$$

Considerando-se o diagrama de corpo livre do bloco, tem-se:

$$F - H_A = ma_G \Rightarrow a_G = \frac{F - H_A}{m} \quad (4)$$

$$-V_A - mg + N_1 = 0 \quad (5)$$

Os vínculos cinemáticos que ligam os movimentos do bloco e do disco, são descritos por:

$$a_A = a_G \quad (6)$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}_A + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (O-A) + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (O-A)]$$

Como, no instante em que ocorre a ruptura dos cabos, a velocidade angular do disco é nula, tem-se:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_A + \dot{\omega} \vec{k} \wedge R\vec{j} = (a_G - \dot{\omega}R)\vec{i} \quad (7)$$

Resolvendo-se o sistema de equações 1-7, obtêm-se:

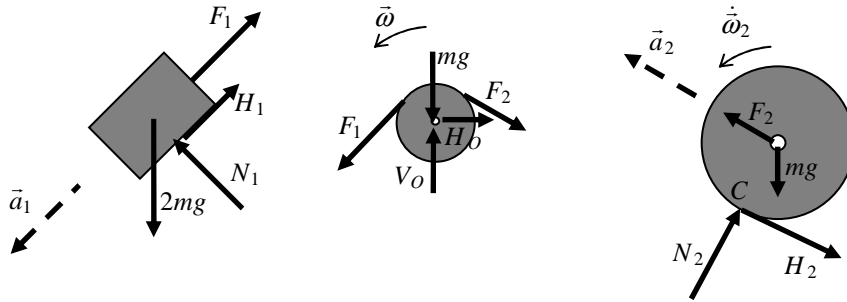
$$\vec{a}_A = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \vec{i}, \quad \dot{\omega} = \frac{F}{mR} \vec{k}, \quad H_A = -\frac{1}{3} F, \quad V_A = mg$$

(b,c,d) 3,0 pontos



QUESTÃO 2

Os diagramas de corpo livre solicitados são apresentados nas figuras abaixo:



(a) 1,0 ponto

A expressão da energia cinética do sistema, para um instante t arbitrário, é:

$$T = T_{bloco} + T_{polia} + T_{disco} = \frac{1}{2}(2mv_1^2) + \frac{1}{2}J_{O_z}^{Polia}\omega^2 + \frac{1}{2}J_{C_z}^{Disco}\omega_2^2$$

$$\Rightarrow T = mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{3mR^2}{2}\omega_2^2 = mv_1^2 + \frac{mr^2}{4}\omega^2 + \frac{3mR^2}{4}\omega_2^2 \quad (1)$$

Como o cabo é inextensível e não há deslizamento no contato com a polia, pode-se escrever:

$$v_1 = \omega r \quad (2)$$

Além disso, como o disco rola sem deslizar sobre o plano inclinado, tem-se:

$$v_2 = \omega_2 R = \omega r \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{R}\omega \quad (3)$$

Substituindo-se (2) e (3) em (1), resulta:

$$T = m\omega^2 r^2 + \frac{mr^2}{4}\omega^2 + \frac{3mR^2}{4}\frac{r^2}{R^2}\omega^2 = 2m\omega^2 r^2 \quad (4)$$

(b) 1,0 ponto

As forças que realizam trabalho não nulo são as seguintes:

- peso do bloco: $\vec{P}_{bloco} = -2mg\vec{j}$
- peso do disco: $\vec{P}_{Disco} = -mg\vec{j}$
- força de atrito no contato entre o bloco e a rampa: $H_1 = \mu N_1 = 2\mu mg \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu mg\sqrt{2}$.

(c) 1,0 ponto

Aplicando-se o Teorema de Energia Cinética ao sistema, tem-se:

$$T - T_0 = 2m\omega^2 r^2 = 2mg\ell \cos 45^\circ - 2mg\ell \cos 30^\circ - \sqrt{2}\mu mg\ell$$

$$\Rightarrow 2\omega^2 r^2 = 2g\ell \frac{\sqrt{2}}{2} - 2g\ell \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\mu g\ell$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\ell}{r^2} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}\mu}{2} \right)}$$

(d) 1,0 ponto



QUESTÃO 3

Em coordenadas cartesianas, o raio vetor $(P-O) = \vec{r}$ é dado por:

$$\vec{r} = a \cos \theta \vec{i} + b \sin \theta \vec{j}$$

O versor tangente à curva vincular é:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}/d\theta}{|d\vec{r}/d\theta|} = \frac{-a \sin \theta \vec{i} + b \cos \theta \vec{j}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$$

Portanto, no instante em que $A \equiv B$, ou seja, em que $\theta = 0$, tem-se:

$$\vec{\tau}(t)|_{A \equiv B} = \vec{j}$$

Sendo $\vec{b} = \vec{k}$ o versor binormal, obtém-se o versor norma a partir de:

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} = -\frac{a \sin \theta \vec{i} + b \cos \theta \vec{j}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

Portanto, no instante em que o anel atinge o ponto B tem-se:

$$\Rightarrow \vec{n}(t)|_{A \equiv B} = -\vec{i}$$

(a) 0,5 ponto

Aplicando-se o Teorema da Energia cinética entre os pontos P e B , tem-se:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = m g (y_A - y_B) = m g \left(b \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right)$$

$$\Rightarrow v(t)|_{A \equiv B} = \sqrt{b g \sqrt{2}} \Rightarrow \vec{v}(t)|_{A \equiv B} = -\sqrt{b g \sqrt{2}} \vec{j}$$

(b) 0,5 ponto

A componente normal da aceleração do anel, nesse instante, será:

$$a_n(t)|_{A \equiv B} = \frac{v^2|_{A \equiv B}}{\rho|_{A \equiv B}} = \frac{b}{a} g \sqrt{2}$$

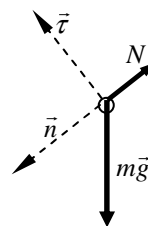
(c) 0,5 ponto

Tomando-se como referência o diagrama de corpo livre do anel, esboçado abaixo, e aplicando-se a equação fundamental da Dinâmica, tem-se:

$$-m g \vec{j} - N \vec{n} = m(a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n})$$

$$\Rightarrow -m g \cos \theta \vec{\tau} + m g \sin \theta \vec{n} - N \vec{n} = m(a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m g \cos \theta = m a_t \\ m g \sin \theta - N = m a_n \end{cases}$$



Das equações acima conclui-se que:

$$\begin{cases} a_t = -g \cos \theta \\ N = m(g \sin \theta - a_n) \end{cases}$$

Portanto, no instante em que o anel se localiza no ponto B , a aceleração tangencial é:

$$a_t = -g \cos 0 = -g$$

e a força normal é:

$$N = -m \frac{b}{a} g \sqrt{2}$$

(d,e,f) 0,5 ponto