Mecânica A- P3 R$ 7,50

Resumo Teórico

Fuja do Nabo

2014

Arthur Salles

matéria: Mecânica A - P3 - resumo + exercícios

Por: Arthur Sallio

I - Baricentro

$$\boxed{m\,(G-O) = \sum_i m_i\,(P_i - O)}$$

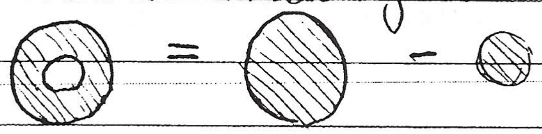
Para achar o baricentro, dividimos o corpo em partes como discos e retângulos. Sabemos os baricentros desses pedaços $(P_i - O)$. Usando a fórmula, encontramos o baricentro do todo

Alternativamente: $x_G = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$; $y_G = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$; $z_G = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$

Obs: x_i, y_i, z_i → coordenadas dos baricentros das partes

Dicas: 1) usar simetria em muitos casos facilita

2) Furos: usar massa negativa



II - TMB: Teorema do movimento do Baricentro

$$\boxed{\vec{R}_{ext} = M \cdot \vec{a}_G}$$

Pode ser necessário encontrar a aceleração do baricentro em função da rotação (ω):

Poisson: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (G-O)$

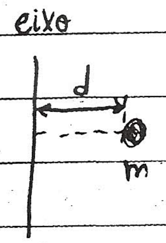
Ou então se a velocidade do baricentro estiver sempre na mesma direção, pode-se achar V_G e derivar:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (G-O)$$

III - Momento de Inércia

Assim como a massa de um corpo mede a dificuldade de transladá-lo, o momento de inércia mede a dificuldade de rotacionar um corpo ao redor de um eixo.

Para uma massa pontual:



$$\boxed{J_{eixo} = m \cdot d^2}$$

Em que d é a distância (ortogonal) ao eixo

Para um corpo: $J = \int r^2 dm$, Assim:

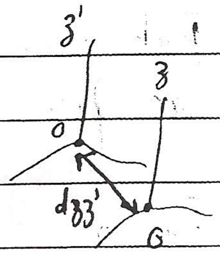
$$J_z = \int (x^2 + y^2)\, dm \qquad J_y = \int (x^2 + z^2)\, dm \qquad J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

Mas não vamos ter que calcular essas integrais. No geral o exercício nos dá J com a origem do eixo no baricentro. Se quiser em outro ponto:

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

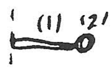
$$\begin{cases} J_{x'} = J_{Gx} + m\, d_{xx'}^2 \\ J_{y'} = J_{Gy} + m\, d_{yy'}^2 \\ J_{z'} = J_{Gz} + m\, d_{zz'}^2 \end{cases}$$

do BARICENTRO!!



Obs: 1) se der de outro ponto, ache o do baricentro primeiro.

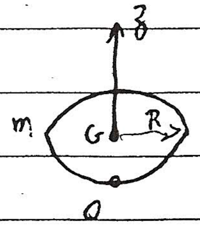
2) Podemos calcular de partes separadas e somar.

Ex.: 

$J = J_1 + J_2$

Exemplos

1)

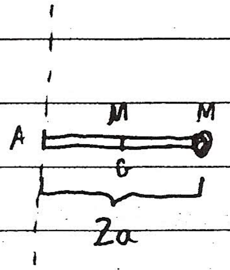


Dado que $J_{Gz} = \frac{mR^2}{2}$, ache J_{Oz}

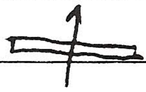
Solução: $J_{Oz} = J_{Gz} + md^2$, em que $d = R$

$\therefore J_{Oz} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$

2)



i) Para a barra: dado que:



$J_z = \frac{ml^2}{12}$

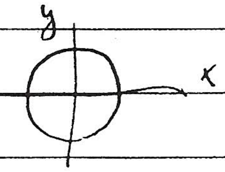
$J_{Az} = J_{Gz} + md^2$

$(J_{Az})_{barra} = \frac{M(2a)^2}{12} + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2$

ii) da massinha: $(J_{Az})_{massa} = M \cdot d^2 = M(2a)^2 = 4ma^2$

iii) do corpo: $J_{Az} = (J_{Az})_{barra} + (J_{Az})_{massa} = \frac{16}{3}ma^2$

Obs: para corpos planos



$J_z = J_x + J_y$

IV - Produto de Inércia

$J_{xy} = \int xy\,dm \qquad J_{yz} = \int yz\,dm \qquad J_{xz} = \int xz\,dm$

Novamente, não vamos calcular essas integrais. Vamos dar um jeito de zerar ou faremos mudança de polo (Teorema dos eixos paralelos)

matéria | data

Quando o produto de inércia é nulo?

1) Se um dos planos (xy, xz ou yz) é plano de simetria, então os momentos de inércia que envolvem o outro eixo são nulos

- Por exemplo, se xy é plano de simetria $\Rightarrow J_{xz} = J_{yz} = 0$
- Outro exemplo: corpo plano, no plano xy. Neste

caso xy é plano de simetria $\Rightarrow$ Corpo plano em $xy \rightarrow J_{xz} = J_{yz} = 0$

2) Se o corpo tem um eixo de simetria – ou seja, todo plano que o contem é plano de simetria – então: $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

Se não der para falar que o produto de inércia é nulo, usamos teorema dos eixos paralelos

$$\begin{cases} J_{x'y'} = J_{xy} + m\, x_G'\, y_G' \\ J_{x'z'} = J_{xz} + m\, x_G'\, z_G' \\ J_{y'z'} = J_{yz} + m\, y_G'\, z_G' \end{cases}$$

do BARICENTRO (em geral é nulo)

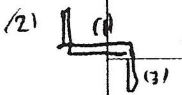
coordenadas do baricentro na base em que quero

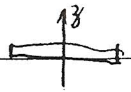
matéria | data

Exemplo : Q1 - 2006

a) $\circ$ $m = ap + ap + 2ap = 4ap$

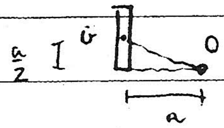
$G = (0,0,0)$ por simetria



b) i) da barra grande :  $(J_z)_1 = \frac{m\ell^2}{12} = \frac{(2pa)(2a)^2}{12} = \frac{2pa^3}{3}$

ii) da barra pequena (igual para 2 e 3)

$(J_z)_2 = \frac{m \cdot \ell^2}{12} + md^2 = \frac{pa \cdot a^2}{12} + (pa)\left[a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$



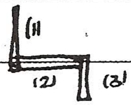
$(J_z)_2 = \frac{4}{3} pa^3$

iii) total : $J_z = (J_z)_1 + (J_z)_2 + (J_z)_3$

$\boxed{J_z = \frac{10}{3} pa^3}$

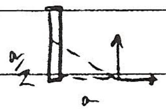
c) Note que xy é plano de simetria. Logo : $J_{xz} = J_{yz} = 0$

d) $J_{xy} = ?$ Não podemos falar que é zero, pois nem xz nem yz são planos de simetria.

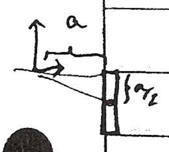
Vamos fazer por partes 

① $(J_{xy})_1 = 0 + m x_G' y_G' = (pa)(-a)\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{pa^3}{2}$

no baricentro



② $(J_{xy})_2 = 0$ (x é eixo de simetria)



③ $(J_{xy})_3 = 0 + m x_G' y_G' = pa\,(a)\left(-\frac{a}{2}\right) = -pa^3$

$\therefore \boxed{J_{xy} = -pa^3}$ (Somando as partes)

matéria | data

V - Relembrando

Alguns pontos importantes a relembrar:

- Momento de Força:

$$\vec{M}_O = (P-O)\wedge\vec{F}$$

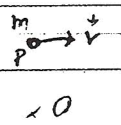
(ou se for caso plano use regra da mão direita)

- Se o enunciado diz que NÃO HÁ ESCORREGAMENTO, a velocidade do ponto de contato é igual nos dois corpos

VI - TMA: Teorema do Momento Angular

1) Quantidade de Momento Angular: ou momento da quantidade de movimento. ($\vec{K}_O$ ou $\vec{H}_O$)

Para um ponto: $\vec{K}_O = (P-O)\wedge m\vec{v}$



Para um corpo: $\vec{K}_O$ (ou $\vec{H}_O$) $= m(G-O)\wedge\vec{v}_O + [\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}][J_O]\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix}$

ou: $\boxed{\vec{K}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + [\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}][J_O][\omega]}$

Em que $[J_O] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz}\\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z\end{bmatrix}$ é a matriz de inércia

IMPORTANTE!! Os momentos e produtos de inércias são calculados com os eixos de origem O.