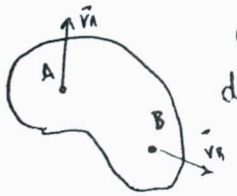
Resumo - Mecânica 1 - PZ 2014

Por Arthur Salles R$ 1.50

I - Cinemática do Corpo Rígido - Conceitos básicos

Desde tempos imemoriais sabemos calcular velocidade e aceleração de objetos pontuais (ou no máximo da ousadia, de bloquinhos). Aprendemos a analisar velocidades e acelerações (lineares e angulares) em corpos mais complexos.

Corpo rígido: é um corpo com dimensões não-desprezíveis cujas partes não se movem entre si (não há deformação)



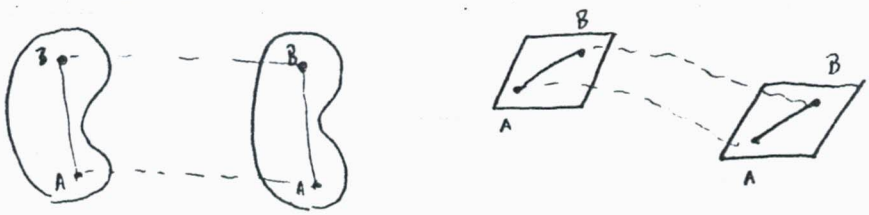
O que pode ser enunciado como: para todos pares de pontos A e B do corpo

$$\boxed{\vec{V}_A \cdot (A - B) = \vec{V}_B \cdot (A - B)}$$

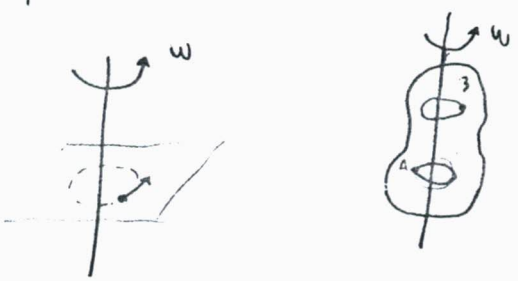
Esse é o chamado Teorema do corpo rígido.

- Tipos de Movimento

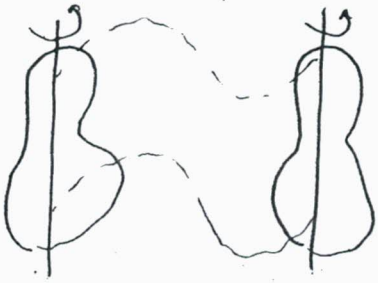
- Translação: o corpo não sofre rotação, ou seja, toda reta ligando dois pontos do corpo não muda de direção



- Rotação em torno de um eixo fixo: trajetórias em forma de circunferências em planos perpendiculares ao eixo



- Movimento rototranslatório: mistura os dois anteriores. O eixo de rotação, no entanto, mantém sempre a mesma direção

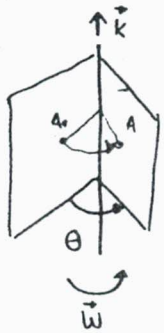


- Movimento plano geral: movimento rototranslatório em que os pontos do corpo só se movem nas direções de um plano; o eixo de rotação é ortogonal ao plano

→ o eixo está perpendicular ao plano, saindo do plano.

• <u>Vetor rotação</u>

No movimento de rotação ao redor de eixo fixo podemos entender mais facilmente o que é o vetor rotação ($\vec{w}$)



Considerando que o eixo de rotação está na direção $\vec{k}$:

$$\vec{w} = \dot{\theta}\,\vec{k}$$, pois w é a velocidade angular:

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

II - Fórmulas de Poisson

A seguinte fórmula não pode jamais ser esquecida:

$$\boxed{\vec{V_P} = \vec{V_0} + \vec{w} \wedge (P - O)}$$

É a chamada Fórmula de Poisson para as velocidades e permite:

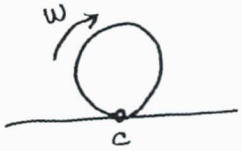
- Sabendo as velocidades de dois pontos, achar a rotação
- Sabendo a velocidade de um ponto e $\vec{w}$, determinar a velocidade de outro ponto.

Obs: se quero descobrir $\vec{\omega}$ em exercícios de caso plano, substitui $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, calcula ω e depois dá resposta em vetor (põe $\vec{k}$)

Aceleração

- Posso sempre derivar velocidade e achar aceleração? NÃO

Vejamos um exemplo: um disco rola sem escorregar sobre o chão. Podemos dizer que a aceleração do ponto de contato com o chão (C) é zero?



i) $\vec{v_C} = \vec{0}$, pois como rola sem escorregar o ponto C do disco tem a mesma velocidade da superfície em contato (no caso o chão, que costuma ter velocidade nula).

ii) $\dot{\vec{v}}_C = 0$ mas $\vec{a}_C \neq \vec{0}$ pois há uma componente de aceleração centrípeta. Ou seja, nesse caso $\vec{a}_C \neq \dot{\vec{v}}_C$

- Regra: $\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P$, APENAS se ao analisar a figura vermos que $\vec{v}_P$ não muda de direção.

Exemplo

conforme o disco gira, a velocidade do centro se mantém horizontal, logo $\vec{a}_C = \dot{\vec{v}}_C$

- Fórmula de Poisson para acelerações: no geral, se quisermos calcular a aceleração de um ponto P, usamos:

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]}$$

Para tanto, precisamos da aceleração de um ponto do corpo ($\vec{a}_O$). No geral usamos um ponto fixo, se houver ($\vec{a}_O = \vec{0}$), ou um ponto em que $\vec{a}_O = \dot{\vec{v}}_O$.

III - Bases girantes

Notem que apareceram derivadas de vetores ($\dot{\vec{v}}_P$, $\dot{\vec{\omega}}$). Como fazemos isso?

Se por exemplo $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, pela regra do produto:

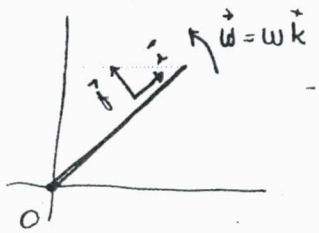
$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k} + \omega \dot{\vec{k}}$$

Mas se $\vec{k}$ não muda de direção (por exemplo no movimento plano), $\dot{\vec{k}} = 0$. Assim:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k} \quad \text{(movimento plano)}$$

<u>Conclusão</u>: Se os vetores da base não se movem, tratamos seus versores como constantes na hora de derivar.

Por outro lado, em algumas situações alguns vetores da base se movem. Por exemplo se consideramos x, y <u>solidários</u> a uma barra que gira com velocidade $\vec{\omega}$:



Ou seja, $\vec{i}$ e $\vec{j}$ estão "colados" na barra. Logo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ não são constantes ($\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}} \neq 0$)

Nesse caso:

$$\begin{cases} \dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \end{cases}$$

, em que $\vec{\omega}$ é o vetor de rotação do corpo ao qual a barra é solidária.

IV - Eixo Helicoidal Instantâneo

Nunca vi cai em prova, mas vou falar para não sentir remorso se cair.

Dado que $\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \wedge (A - B)$

Multiplicando escalarmente por $\vec{\omega}$ nos dois lados:

$\vec{V_A} \cdot \vec{\omega} = \vec{V_B} \cdot \vec{\omega}$

Ou seja, as projeções das velocidades sobre o eixo de rotação são sempre iguais. Lembrando de eixo de momento mínimo, a velocidade será mínima quando for paralela a $\vec{\omega}$

Os pontos E de velocidade mínima formam o eixo helicoidal instantâneo e:

$$\boxed{(E - O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V_O}}{\|\vec{\omega}\|^2} + \lambda \vec{\omega}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{V_E} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V_O}}{\|\vec{\omega}\|^2} \cdot \vec{\omega}}$$

V - O Centro Instantâneo de Rotação (CIR)

Para problemas planos, o CIR é o ponto do corpo em que a velocidade é nula. Nada mais é que o ponto no plano do eixo helicoidal instantâneo.

Usando a fórmula de Poisson:

$\vec{V_{CIR}} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge (CIR - O)$

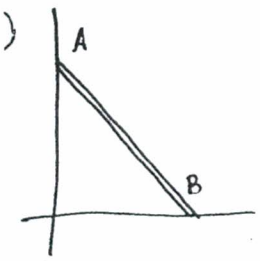
$0 = \vec{V_O} + \omega \vec{k} \wedge (CIR - O)$

ou $(CIR - O) \wedge \omega \vec{k} = \vec{V_O}$

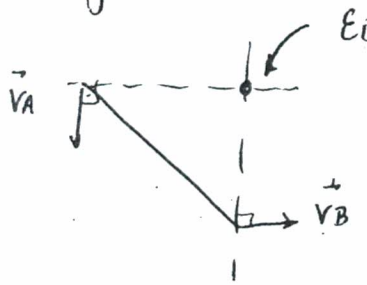
Ou seja, $(CIR - O)$ é perpendicular a $\vec{V_O}$, para todo ponto O do corpo.

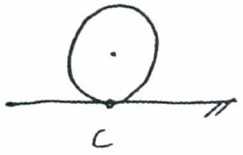
Assim um método de determinar onde está o CIR é partir da direção da velocidade de dois pontos de um corpo, traçar suas perpendiculares e achar o ponto de encontro.

Exemplos

1) 

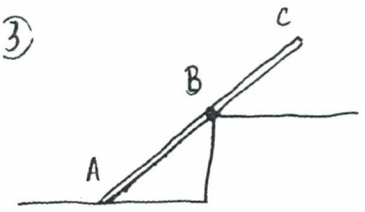
Se a barra escorrega, $\vec{V_A}$ é vertical e $\vec{V_B}$ é horizontal



2) 

No caso de disco girando sem escorregar, a velocidade de C (ponto de contato) é igual à velocidade da superfície em contato ∴ $\vec{V_C} = 0$

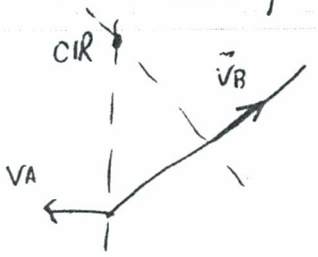
C é o CIR do disco!

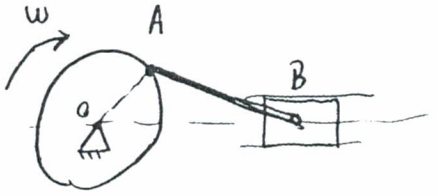
3) 

Sabemos duas velocidades

- $\vec{V_A}$ é horizontal
- $\vec{V_B}$ tem a direção da barra pois é o contato.

Se tivesse parcila fora, a barra "descolaria" do apoio.

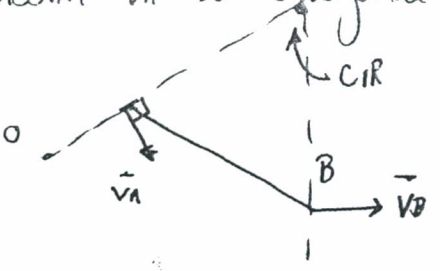


4) 

Na barra AB:

- B está preso num anel e só pode se mover na horizontal
- A velocidade de A pode ser determinada pelo disco. No disco O é o CIR ($\vec{V_O} = \vec{0}$)

Assim $\vec{V_A}$ é ortogonal a (A − O)



VI - Composição de Movimentos

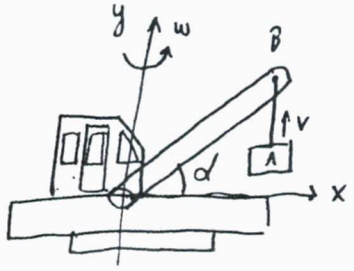
Para analisar movimentos mais complexos, o que vimos até agora não é suficiente o que vimos até agora. Na lista são os exercícios do 21 em diante. Explicarei por cima o método aqui, para entender melhor veja alguns exemplos na lista resolvida

- Quando usa? Problemas em que temos dois corpos conectados e sei o movimento absoluto de um deles e do outro sabemos o movimento em relação ao primeiro
- Como resolver? Fixamos o sistema de coordenadas no corpo chamado referencial móvel, que é aquele que sei o movimento em relação ao solo.

I - Dividirei então o movimento em dois

1) Movimento relativo - imaginamos o referencial móvel parado e soltamos o movimento relativo. Medi em relação ao referencial móvel.
2) Movimento de arrastamento - paramos o movimento relativo e deixamos o corpo do referencial móvel mover-se. Mede em relação ao referencial fixo (preso no chão)

Exemplo (22 da lista 2): um guindaste gira com velocidade constante ω em torno de um eixo vertical passando por O. O peso A é içado com velocidade v, constante. Supondo AB sempre vertical e usando a cabine como referencial móvel...



No caso o que é o que?

- Movimento relativo: travamos o referencial móvel, ou seja, a cabine não gira. Só sobra o movimento do bloco subindo
- Movimento de arrastamento: para o relativo e solta o

movimento da cabine. Ou seja, a cabine gira mas o bloco não sobe mais

---

II - Para continuar, se queremos calcular velocidade e aceleração de um ponto P

- Calculamos $\vec{v}_P$ e $\vec{a}_P$ imaginando o movimento relativo, no ref móvel
  ↳ Obtem $\vec{v}_{P,rel}$ e $\vec{a}_{P,rel}$
- Calculamos $\vec{v}_P$ e $\vec{a}_P$ imaginando o movimento de arrastamento, no referencial fixo.
  ↳ Obtem $\vec{v}_{P,ar}$ e $\vec{a}_{P,ar}$
- Calculamos velocidade e aceleração absolutas:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,ar}}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,ar} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel}}}$$

esse termo é chamado de aceleração de Coriolis; $\vec{\omega}$ é o $\vec{\omega}$ do referencial móvel

III - Composição do vetor rotação

Se
- o corpo se move em relação ao referencial móvel com velocidade angular $\vec{\Omega}_{rel}$
- o referencial móvel se move em relação ao chão com velocidade angular $\vec{\omega}$

$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{rel} + \vec{\omega}}$ é a velocidade angular absoluta do corpo.

Se quiser $\dot{\vec{\Omega}}$ basta derivar $\vec{\Omega}$ lembrando que os versores da base se movem e:

$$\begin{cases} \dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} \\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \end{cases}$$

Exemplo: voltando ao exemplo do guindaste, pede-se:

a) velocidade absoluta de A, com α constante

b) aceleração absoluta de A, com α constante

c) velocidade absoluta de A, com $\dot{\alpha} = w$

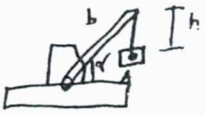
Solução: Para α = constante:

i) Movimento relativo: bloco sobe o disco

a) $\vec{V}_{A,rel} = v\vec{j}$

b) $\vec{a}_{A,rel} = 0$, pois nesse caso sobe sem mudar direção (o referencial móvel está parado)

ii) Movimento de arrastamento: gira sem subir o bloco



a) $\vec{V}_{A,an} = \vec{V}_0 + \vec{w} \wedge (A-O)$

$\vec{V}_{A,an} = 0 + w\vec{j} \wedge (b\cos\alpha\,\vec{i} + (L\sin\alpha - h)\vec{j})$

$\vec{V}_{A,an} = -wb\cos\alpha\,\vec{k}$

b) $\vec{a}_{A,an} = \cancel{\vec{a}_0}_{0} + \cancel{\dot{\vec{w}}}_{0} \wedge (A-O) + \vec{w} \wedge [\vec{w} \wedge (A-O)]$

(O parado) (w é cte)

$\vec{a}_{A,an} = w\vec{j} \wedge [w\vec{j} \wedge (L\cos\alpha\,\vec{i} + (\ldots)\vec{j})]$

$\vec{a}_{A,an} = -w^2 b\cos\alpha\,\vec{i}$

iii) Coriolis: $\vec{a}_{cor} = 2\vec{w} \wedge \vec{V}_{A,rel}$

$\vec{a}_{A,cor} = 2w\vec{j} \wedge v\vec{j} = 0$

iv) Absoluto: basta somar

$\vec{V}_A = \vec{V}_{A,rel} + \vec{V}_{A,an} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_A = v\vec{j} - wb\cos\alpha\,\vec{k}}$ (a)

$\vec{a}_A = \vec{a}_{A,rel} + \vec{a}_{A,an} + \vec{a}_{A,cor} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = -w^2 b\cos\alpha\,\vec{i}}$ (b)

c) No caso da haste girar com velocidade $\vec{w} = w\vec{k}$:

- Movimento relativo: se para o referencial móvel (a cabine), vai sobrar o bloco subindo e o braço girando

Podemos achar $\vec{v}_B$ e ver que $\vec{v}_A - \vec{v}_B = v\vec{j}$ ou dividir em 2 novos movimentos relativos

(relativo)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{w} \wedge (B - O)$$
$$\vec{v}_B = w\vec{k} \wedge (L\cos\alpha\,\vec{i} + L\sin\alpha\,\vec{j})$$
$$\vec{v}_B = wL(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

Como $\vec{v}_A = \vec{v}_B + v\vec{j}$

$$\vec{v}_{A,rel} = -wL\sin\alpha\,\vec{i} + (wb\cos\alpha + v)\,\vec{j}$$

- Movimento de arrastamento: não mudou, ainda é a cabine girando

$$\vec{v}_{A,ar} = -wb\cos\alpha\,\vec{k}$$

- Absoluto: $\vec{v}_A = \vec{v}_{A,rel} + \vec{v}_{A,ar}$

$$\boxed{\vec{v}_A = -wL\sin\alpha\,\vec{i} + (wb\cos\alpha + v)\,\vec{j} - wb\cos\alpha\,\vec{k}}$$