ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

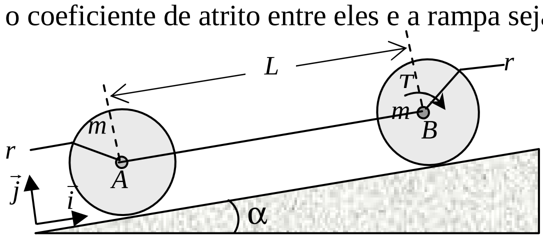
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – P3 – 26 de junho de 2009

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

ATENÇÃO: a prova consta de 3 questões de aplicação da teoria estudada valendo 10 pontos e de 4 questões teóricas, cuja resposta é opcional, com valor total de 2 pontos, e cujo resultado obtido é somado ao valor das questões de aplicação. **A nota máxima da prova é 10, ou seja, não há acumulação de pontos para as avaliações subseqüentes**.

QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Dois cilindros iguais de raio r e massa m, interligados por meio de articulações a um cabo inextensível AB de comprimento L e **massa desprezível**, sobem uma rampa de inclinação α sob a ação de um torque T aplicado ao cilindro dianteiro. Admitindo-se que ambos os cilindros rolem sem escorregar e que o coeficiente de atrito entre eles e a rampa seja μ, determinar:

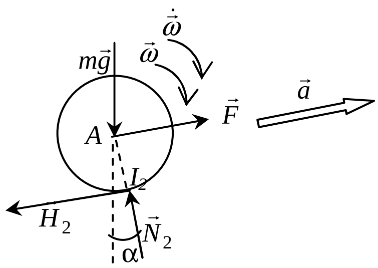


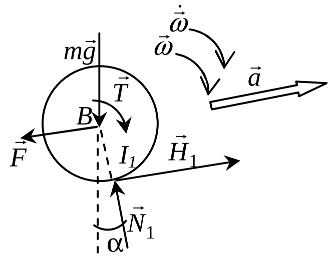
(a) Os diagramas de corpo livre dos dois cilindros.
(b) A aceleração angular dos cilindros.
(c) A força de tração no fio AB.
(d) O máximo valor do torque aplicado em B para que não ocorra escorregamento do cilindro dianteiro.

É dado o momento de inércia baricêntrico do cilindro em relação ao eixo z: $J_{Gz} = \frac{1}{2}mr^2$

SOLUÇÃO

Ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro. O cilindro traseiro movimenta-se sob a ação da força peso, da reação normal de contacto $\vec{N}_2$, da força $F\vec{i}$, transmitida pelo fio AB e da força de atrito $-H_2\vec{i}$; o cilindro dianteiro move-se sob a ação da força peso, da reação normal de contacto $\vec{N}_1$, do torque $-T\vec{k}$ aplicado ao eixo, da força $-F\vec{i}$, transmitida pelo fio, e da força de atrito $H_1\vec{i}$.





(Resposta a)

Aplicando-se ao cilindro traseiro o TMB e o TMA relativamente ao centro instantâneo de rotação I_2, tem-se:

$$F - H_2 - mg\sin\alpha = ma \qquad \text{(Eq.1)}$$

$$N_2 - mg\cos\alpha = 0 \qquad \text{(Eq.2)}$$

$$mgr\sin\alpha - Fr = J_{I_2z}\dot{\omega} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)(-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} \qquad \text{(Eq.3)}$$

Aplicando-se ao cilindro dianteiro o TMB e o TMA relativamente ao centro instantâneo de rotação I_1, tem-se:

$$H_1 - F - mg\sin\alpha = ma \qquad \text{(Eq.4)}$$

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \qquad \text{(Eq.5)}$$

$$Fr + mgr\sin\alpha - T = J_{I_2 z}(-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} \quad \text{(Eq.6)}$$

Como ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro, pode-se escrever:

$$a = \dot{\omega}r \quad \text{(Eq.7)}$$

Somando-se as equações (3) e (6), obtém-se:

$$2mgr\sin\alpha - T = -3mr^2\dot{\omega}$$

$$\therefore\ \dot{\omega} = \frac{T - 2mgr\sin\alpha}{3mr^2} \quad \text{(Eq.8)}$$

(Resposta b)

Substituindo-se (8) em (3), obtém-se:

$$F = mg\sin\alpha + \frac{3}{2}mr\dot{\omega} = mg\sin\alpha + \frac{1}{2r}(T - 2mgr\sin\alpha)$$

$$\therefore F = \frac{T}{2r} \quad \text{(Eq.9)}$$

(Resposta c)

Substituindo-se (7) e (9) em (4), obtém-se:

$$H_1 = \frac{T}{2r} + mg\sin\alpha + \frac{T - 2mgr\sin\alpha}{3r}$$

$$\therefore H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg\sin\alpha}{3} \quad \text{(Eq.10)}$$

Para que não ocorra deslizamento do cilindro dianteiro, deve-se ter:

$$H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg\sin\alpha}{3} \le \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha$$

$$\therefore\ T \le \frac{2}{5}(3\mu\cos\alpha - \sin\alpha)mrg \quad \text{(Eq.11)}$$

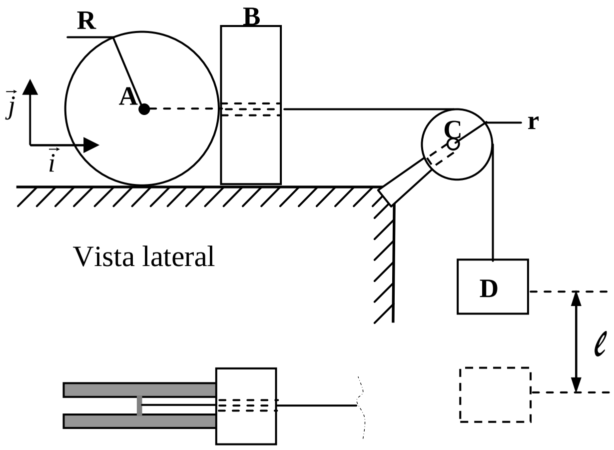
(Resposta d)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 2 (3,0 pontos). No diagrama abaixo, o carretel (baricentro *A*, massa *m* e raio de giração ρ) é ligado, por um cabo ideal, através de uma polia homogênea (centro *C*, massa *m* e raio *r*) a um bloco homogêneo *D* de massa *M*. Além disso, o cabo atravessa, por meio de um furo, o interior de um bloco homogêneo *B* de massa *M* que se mantém em contato permanente e sem atrito com o carretel. Entre o carretel e o plano horizontal e entre o bloco *B* e o referido plano há atrito cujo coeficiente é μ. O sistema é abandonado a partir do repouso e, após percorrer a distância ℓ (dada) o bloco *D* possui velocidade desconhecida de módulo *v*. Sabe-se que o movimento do carretel é de rolamento puro, que não há atrito no mancal em *C* e que não ocorre tombamento do bloco *B*. Nestas condições, pede-se, em função dos dados do problema:



Vista lateral

Vista de topo

(a) o diagrama de corpo livre da polia, do carretel e dos blocos *B* e *D*;
(b) a expressão da energia cinética do sistema em um instante $t > 0$ qualquer.
(c) a velocidade *v* do bloco *D* após este ter percorrido a distância ℓ.

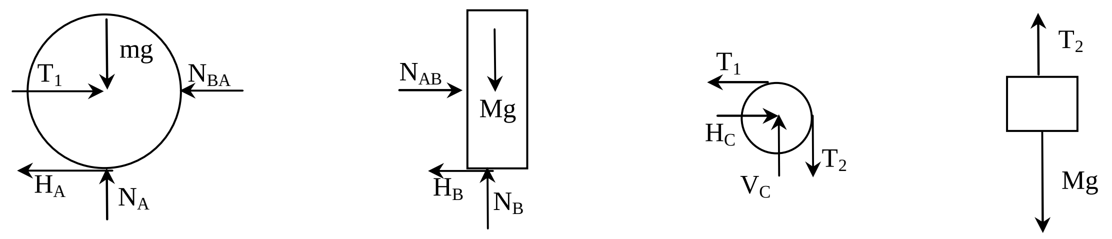
Dados:

Momento de inércia baricêntrico do carretel relativo ao eixo *z* : $J_{Az} = m\rho^2$

Momento de inércia baricêntrico da polia relativo ao eixo *z*: $J_{Cz} = \frac{1}{2}mr^2$

SOLUÇÃO

Nas figuras a seguir são apresentados os diagramas de corpo livre do carretel, da polia e dos blocos.



(Resposta a)

Analisando-se o trabalho das forças externas e internas que atuam sobre o sistema constituído pelo carretel, pela polia e pelos dois blocos, notamos que:

- As reações na articulação *C* (H_C,V_C) não realizam trabalho, uma vez que *C* é um ponto fixo.
- As reações N_A e N_B não realizam trabalho uma vez que são normais aos deslocamentos do cilindro e do bloco *A* respectivamente.
- As reações normais de contacto entre o carretel e o bloco *A*, N_{AB} e N_{BA}, têm mesmo módulo e são diretamente opostas (Princípio de Ação e Reação). Como essas reações atuam sobre corpos que sofrem o mesmo deslocamento, o trabalho realizado por ambas é nulo ($\tau = N_{AB}.\Delta x + (-N_{AB}).\Delta x = 0$).
- Como o carretel realiza movimento de rolamento puro, o ponto de contacto entre este e o plano coincide com o *CIR*. Logo, a potência da força de atrito H_A é nula ($Pot(H_A) = H_A.v_{CIR} = 0$).
- Como o cabo é inextensível, o trabalho realizado pelo par de forças de tração (T_1,-T_1) e (T_2,-T_2) é nulo, de vez que o deslocamento dessas forças é o mesmo.

- O trabalho realizado pela força peso do carretel é nulo, pois tem direção normal ao deslocamento de seu baricentro *A*.

Portanto, o trabalho total realizado pelas forças atuantes no sistema considerado corresponde às contribuições dos trabalhos da força peso do bloco *D* e da força H_B no contacto entre o bloco *B* e o plano horizontal, ou seja:

$$\tau(0,t) = Mg\,\ell - H_B\,\ell = (Mg - H_B)\ell \qquad \text{(Eq.1)}$$

No entanto, sabemos que H_B é uma força de atrito e que, como o bloco *B* se encontra em movimento, o seu valor é dado por:

$$H_B = \mu N_B = \mu Mg \qquad \text{(Eq.2)}$$

Analisando-se a variação da energia cinética T do sistema, observamos que, no instante inicial,

$$T(0) = 0$$

uma vez todos os sólidos se encontram em repouso nesse instante. Para um instante qualquer *t*, a energia cinética do carretel *A*, do bloco *B*, da polia *C* e do bloco *D* é dada, respectivamente, por:

$$T_A(t) = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_{A_z}\omega_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega_A^2 \qquad \text{(Eq.3)}$$

$$T_B(t) = \frac{1}{2}Mv_B^2 \qquad \text{(Eq.4)}$$

$$T_C(t) = \frac{1}{2}J_{C_z}\omega_C^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\omega_C^2 = \frac{1}{4}J_{C_z}\omega_C^2 \qquad \text{(Eq.5)}$$

$$T_D(t) = \frac{1}{2}Mv_D^2 \qquad \text{(Eq.6)}$$

Portanto, a energia cinética do sistema no sistema no instante *t*, é:

$$T(t) = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega_C^2 + \frac{1}{2}Mv_D^2 \qquad \text{(Eq.7)}$$

Como o movimento do carretel é de rolamento puro, a velocidade de seu baricentro *A* é dada por:

$$v_A = \omega_A R \qquad \text{(Eq.8)}$$

Essa é também a velocidade do bloco *B*, que se move em contacto permanente com o carretel, ou seja:

$$v_B = v_A = \omega_A R \qquad \text{(Eq.9)}$$

Como o cabo é inextensível e não existe deslizamento entre este e a polia *C*, a velocidade do bloco *D* é:

$$v_D = \omega_C r \qquad \text{(Eq.10)}$$

Além disso, pelo fato de o cabo ser inextensível, a seguinte relação cinemática entre as velocidades angulares da polia e do carretel se estabelece:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\omega_A R = \omega_C r \qquad \text{(Eq.11)}$$

Substituindo-se as equações (8)-(10) em (7), obtém-se:

$$T(t) = \frac{1}{2}m\omega_A^2 R^2 + \frac{1}{2}m\omega_A^2\rho^2 + \frac{1}{2}M\omega_A^2 R^2 + \frac{1}{4}m\omega_A^2 R^2 + \frac{1}{2}M\omega_A^2 R^2 = MR^2\omega_A^2 + m\left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{2}\rho^2\right)\omega_A^2 \qquad \text{(Eq.12)}$$

Substituindo-se a equação (2) em (12) e aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre os instantes 0 e t_f, correspondente à configuração em que o bloco D realiza um deslocamento ℓ, obtém-se:

$$MR^2\omega_A^2 + m\left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{2}\rho^2\right)\omega_A^2 = (Mg - \mu Mg)\ell \Rightarrow \frac{\omega_A^2}{4}\left[4MR^2 + m\left(3R^2 + 2\rho^2\right)\right] = (Mg - \mu Mg)\ell$$

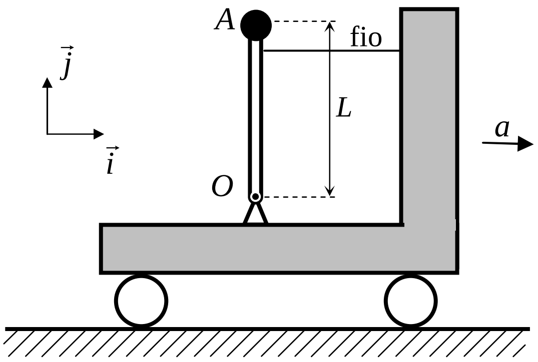
$$\therefore \omega_A = 2.\sqrt{\frac{Mg(1-\mu)\ell}{4MR^2 + m\left(3R^2 + 2\rho^2\right)}} \qquad \text{(Eq.13)}$$

Portanto, a velocidade v do bloco D após este ter percorrido a distância ℓ será:

$$v = 2R.\sqrt{\frac{Mg(1-\mu)\ell}{4MR^2 + m\left(3R^2 + 2\rho^2\right)}} \qquad \text{(Eq.14)}$$

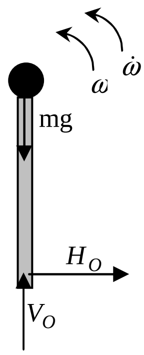
(Resposta c)

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). No dispositivo da figura, o carrinho se movimenta para a direita com aceleração constante a, carregando uma barra de massa desprezível, de comprimento L, em cuja extremidade se localiza uma massa concentrada m. A barra OA é articulada em O e mantida na vertical através de um fio de massa desprezível. Admitindo-se que o fio se rompa num determinado instante, determinar, para essa condição:



a) O diagrama de corpo livre da barra OA.
b) A aceleração angular da barra OA.
c) As reações na articulação O da barra OA.

SOLUÇÃO



O diagrama de corpo livre da barra AO, no instante em que o fio é cortado, é apresentado na Figura ao lado. ***(Resposta a)***

Notando que o baricentro da barra coincide com o ponto A, o TMA em relação ao pólo O fornece:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$m(A-O)\wedge\vec{a}_O + J_{Oz}\dot{\omega}_z\vec{k} = \vec{M}_O^{ext} \qquad \text{(Eq.1)}$$

Como o momento das forças externas atuantes na barra *AO* em relação ao pólo *O* é nulo e o seu momento de inércia corresponde apenas ao da massa concentrada em *A* (ou seja, $J_{O_z} = mL^2$), resulta:

$$mL\vec{j}\wedge a\vec{i} + mL^2\dot{\omega}\vec{k} = \vec{0}$$
$$\therefore -a + L\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a}{L} \qquad \text{(Eq.2)}$$

(Resposta b)

Aplicando-se o TMB à barra *AO*, obtém-se:

$$\begin{aligned} H_O &= ma_A \\ -mg + V_O &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(Eq.3)}$$

Mas a aceleração absoluta do ponto *A* é dada por:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k}\wedge(A-O) = a\vec{i} + \dot{\omega}\vec{k}\wedge L\vec{j} = (a - L\dot{\omega})\vec{i} \qquad \text{(Eq.4)}$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\omega}$ na equação acima, resulta que, no instante considerado, a aceleração absoluta do ponto *A* é nula, ou seja:

$$\vec{a}_A = \left(a - L\frac{a}{L}\right)\vec{i} = \vec{0} \qquad \text{(Eq.5)}$$

Portanto, no instante referido, as reações na articulação *O*, são:

$$\begin{aligned} H_O &= 0 \\ V_O &= mg \end{aligned} \qquad \text{(Eq.6)}$$

(Resposta c)

QUESTÃO 4 (0,5 pontos). Mostre que, se um corpo realiza movimento de translação, o momento das forças externas em relação ao baricentro é nulo.

SOLUÇÃO

Particularizando-se a expressão geral do Teorema do Momento Angular, ou seja,

$$\dot{\vec{H}}_O = m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \begin{bmatrix}\vec{\omega}\wedge\vec{i} & \vec{\omega}\wedge\vec{j} & \vec{\omega}\wedge\vec{k}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz}\end{bmatrix}\cdot[\omega] + \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} J_{Ox} & -J_{Oxy} & -J_{Oxz} \\ -J_{Oxy} & J_{Oy} & -J_{Oyz} \\ -J_{Oxz} & -J_{Oyz} & J_{Oz}\end{bmatrix}\cdot[\dot{\omega}] = \vec{M}_O^{ext}$$

(onde $[\omega]^T = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$), para o caso de movimento de translação ($\vec{\omega} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$), e utilizando como pólo o próprio baricentro *G* do corpo, resulta:

$$\therefore \dot{\vec{H}}_G = m(G-G)\wedge\vec{a}_G = \vec{0} = \vec{M}_G^{ext} \qquad \textbf{\textit{(C.Q.D)}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 5 (0,5 pontos). Seja *B* um corpo homogêneo contendo um eixo *z* de simetria. Mostre que os produtos de inércia de *B* em relação a um par de eixos ortogonais quaisquer, dos quais um coincide com *z*, são sempre nulos.

SOLUÇÃO

Considerando o sólido um sistema de massas puntuais m_i situadas em posições fixas $P_i(x_i,y_i,z_i)$ referidas a um referencial *Oxyz*, as expressões dos produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} são, respectivamente:

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \quad \text{e} \quad J_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

Como o sólido é homogêneo, as somatórias acima podem ser assim reescritas na forma:

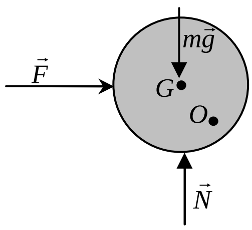
$$J_{Oxz} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \quad \text{e} \quad J_{Oxz} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

E como *z* é um eixo de simetria, a cada produto $x_i z_i$ corresponderá um produto simétrico $x_i(-z_i)$, o mesmo ocorrendo em relação aos produtos $y_i z_i$ e $y_i(-z_i)$. Portanto, conclui-se que os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} são nulos ***(C.Q.D.)***.

QUESTÃO 6 (0,5 pontos). Considere uma esfera de massa *m* inicialmente em repouso apoiada sobre uma superfície plana *xy* sem atrito e à qual se aplica uma força $\vec{F}$, paralela à direção *x* e com linha de ação passante pelo seu baricentro. O que se pode afirmar a respeito do momento angular dessa esfera? Justifique.

SOLUÇÃO

A figura abaixo representa o diagrama de corpo livre da esfera, nas condições indicadas no problema.



Utilizando-se a expressão geral do TMA para um sistema de pontos materiais, relativamente a um ponto *O* arbitrário, tem-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$$

Adotando-se, porém, o baricentro como pólo, chega-se a $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}$.

Aplicando-se essa expressão ao problema focalizado, concluímos que $\dot{\vec{H}}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_G = const$.

Em outras palavras, podemos afirmar que o momento angular do sistema se conserva. Como inicialmente a esfera não possuía movimento de rotação, a aplicação de F ao seu baricentro não ocasiona mudança em seu momento angular, que se mantém nulo. Portanto, essa força apenas acelera o baricentro da esfera, que passa a realizar movimento de translação.

QUESTÃO 7 (0,5 pontos). Mostre que, para um corpo sólido realizando movimento qualquer, o trabalho das forças internas é nulo.

SOLUÇÃO

Representando as forças internas desenvolvidas entre os pontos materiais de um sólido situados nas posições P_i e P_j na forma

$$\vec{F}_{ij} = \lambda_{ij}(P_j - P_i) \qquad \text{e} \qquad \vec{F}_{ji} = \lambda_{ji}(P_i - P_j)$$

e notando que, pelo Princípio de Ação e Reação, deve-se ter $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ e, portanto, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, o trabalho realizado pelo sistema de forças internas $\vec{F}_{ij}$ durante um deslocamento arbitrário δs do sólido será dado por:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij} . \delta s = \delta s \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}(P_j - P_i) = 0 = \delta s \vec{R}^{\text{int}} = 0$$

Como o sistema de forças internas tem resultante $\vec{R}^{\text{int}}$ nula, conclui-se, da expressão acima, que é nulo o trabalho realizado pelas forças internas de um sólido. ***(C.Q.D.)***.