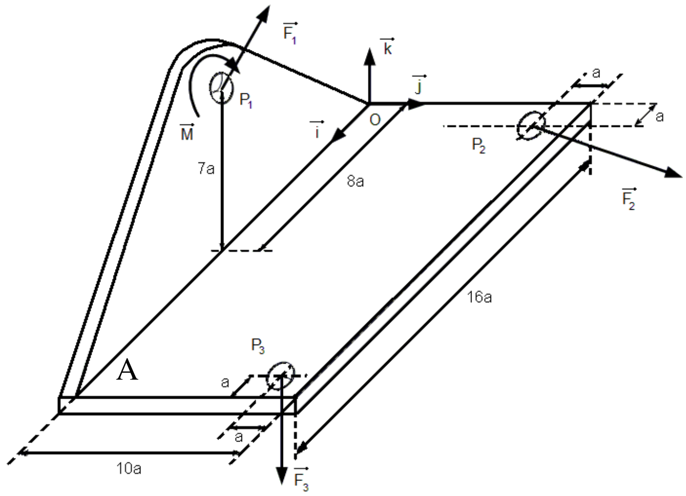
PME 2100 – MECÂNICA A – P1 – 30 de agosto de 2011
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

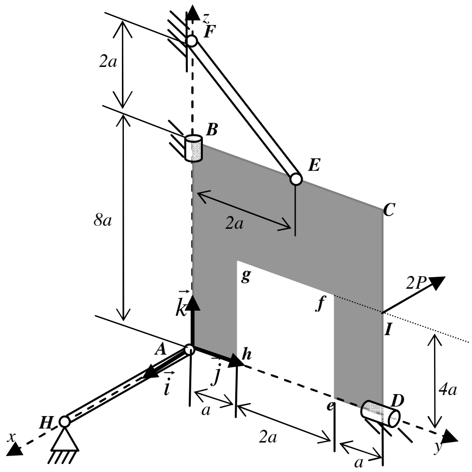
QUESTÃO 1 (3,0 pontos). O suporte de peso desprezível ilustrado na figura está sujeito a um binário $\vec{M} = -10Fa\vec{j}$ e a três forças $\vec{F}_1 = 30F\vec{j} + 20F\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 10F\vec{i} + 40F\vec{j}$ e $\vec{F}_3 = -20F\vec{k}$, aplicadas, respectivamente, nos pontos P_1, P_2 e P_3. Adotando-se a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, pede-se:

(a) calcular a resultante do sistema de forças; **(0,5)**
(b) calcular o momento resultante do sistema em relação ao pólo P_1; **(0,5)**
(c) calcular o momento resultante do sistema em relação ao pólo O; **(0,5)**
(d) calcular o momento do sistema em relação ao eixo OA; **(0,5)**
(e) verificar se o sistema é redutível a uma única força, justificando a resposta; **(0,5)**
(f) calcular o momento mínimo do sistema. **(0,5)**



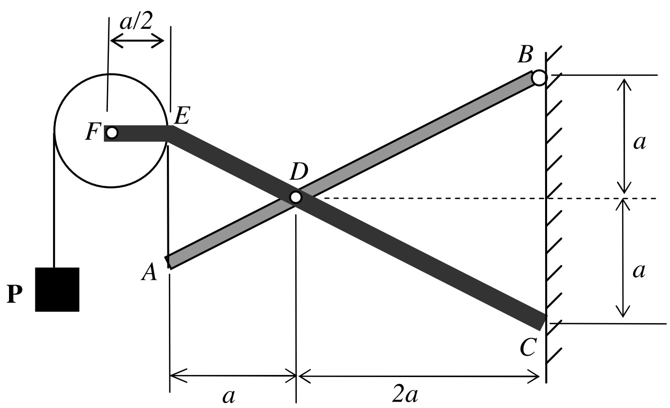
QUESTÃO 2 (3,0 pontos). A placa homogênea $ABCDefgh$ de peso P e sujeita a uma força horizontal $-2P\vec{i}$ aplicada ao ponto I, mantém-se em equilíbrio apoiada nas barras EF e AH, ambas de peso desprezível, e nos anéis B e D indicados na figura. Nessas condições, pede-se:

(a) a posição do baricentro da placa $ABCDefgh$; **(0,5)**
(b) os diagramas de corpo livre das barras AH e EF; **(0,5)**
(c) o diagrama de corpo livre da placa $ABCDefgh$; **(0,5)**
(d) as forças nas barras AH e EF e as reações nos anéis B e D. **(1,5)**



QUESTÃO 3 (4,0 pontos). Na figura ao lado, a polia tem peso $\boldsymbol{Q}$, as barras têm peso desprezível e a carga suportada pela extremidade do cabo é $\boldsymbol{P}$. As barras ADB e $CDEF$ são contínuas através do pino D que as mantém unidas. A barra ADB está articulada em B e a $CDEF$ apóia-se na parede rugosa BC. Sendo μ o coeficiente de atrito entre a parede e a barra $CDEF$, pede-se:

(a) o diagrama de corpo livre da polia, a reação em F e a força no cabo; **(0,5)**
(b) os diagramas de corpo livre das barras ADB e $CDEF$; **(1,0)**
(c) as forças atuantes na barra $CDEF$; **(1,5)**



(d) o valor mínimo de μ para que o sistema se mantenha em equilíbrio. **(1,0)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1.

A resultante do sistema de forças, é:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 30F\vec{j} + 20F\vec{k} + 10F\vec{i} + 40F\vec{j} - 20F\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = 10F\vec{i} + 70F\vec{j}$$ **(Resposta a)**

O momento resultante do sistema de forças e binários, em relação ao pólo P_1, é:

$$\vec{M}_{P1} = \vec{M} + (P_2 - P_1) \wedge \vec{F}_2 + (P_3 - P_1) \wedge \vec{F}_3 = -10Fa\vec{j} + (-7a\vec{i} + 9a\vec{j} - 7a\vec{k}) \wedge (10F\vec{i} + 40F\vec{j}) + (7a\vec{i} + 9a\vec{j} - 7a\vec{k}) \wedge (-20F\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{P1} = -10Fa\vec{j} - 280Fa\vec{k} - 90Fa\vec{k} - 70Fa\vec{j} + 280Fa\vec{i} + 140Fa\vec{j} - 180Fa\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{P1} = 100Fa\vec{i} + 60Fa\vec{j} - 370Fa\vec{k}$$ **(Resposta b)**

Aplicando-se a fórmula de mudança de pólo, determinamos o momento do sistema em relação ao pólo O, ou seja:

$$\vec{M}o = \vec{M}_{P1} + (P_1 - O) \wedge \vec{R} = 100Fa\vec{i} + 60Fa\vec{j} - 370Fa\vec{k} + (8a\vec{i} + 7a\vec{k}) \wedge (10F\vec{i} + 70F\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{M}o = 100Fa\vec{i} + 60Fa\vec{j} - 370Fa\vec{k} + 560FA\vec{k} + 70Fa\vec{j} - 490Fa\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{M}o = -390\,Fa\,\vec{i} + 130\,Fa\,\vec{j} + 190\,Fa\,\vec{k}$$ **(Resposta c)**

O momento do sistema em relação ao eixo OA, é:

$$M_{Oa} = \vec{M}_O \cdot \vec{i} = (-390Fa\vec{i} + 130Fa\vec{j} + 190Fa\vec{k}) \cdot \vec{i} = -390Fa$$ **(Resposta d)**

O invariante escalar do sistema, é:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-390Fa\vec{i} + 130Fa\vec{j} + 190Fa\vec{k}) \cdot (10F\vec{i} + 70F\vec{j}) = -3900F^2a + 9100F^2a = 5200F^2a$$

Como

$\vec{R} \neq \vec{0} \quad mas \quad I \neq 0$

concluímos que o sistema não é redutível a uma única força. **(Resposta e)**

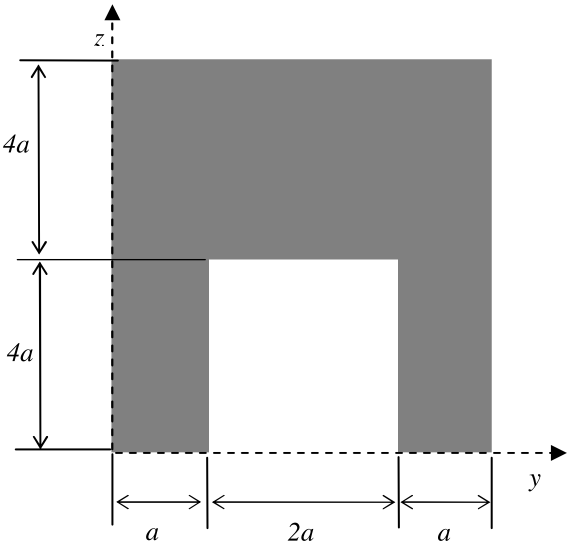
O momento mínimo do sistema, é:

$$\vec{M}_{\min} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \vec{R} = \frac{I}{|\vec{R}|^2} \cdot \vec{R} = \frac{5200F^2a}{100F^2 + 4900F^2} (10F\vec{i} + 70F\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\min} = \frac{52}{5} \cdot (Fa\vec{i} + 7Fa\vec{j})$$ **(Resposta f)**

QUESTÃO 2.

Como a figura da placa homogênea *ABCDefgh* esquematizada ao lado possui um eixo de simetria vertical, a coordenada y de seu baricentro vale:



$$y_G = 2a$$

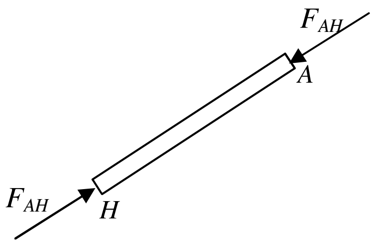
enquanto que a coordenada z é dada por:

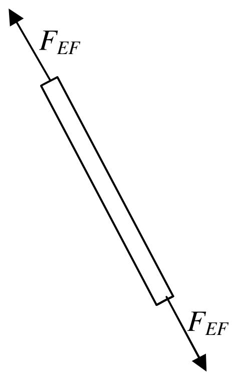
$$z_G = \frac{32a^2 \cdot 4a - 8a^2 \cdot 2a}{32a^2 - 8a^2} = \frac{14a}{3}$$

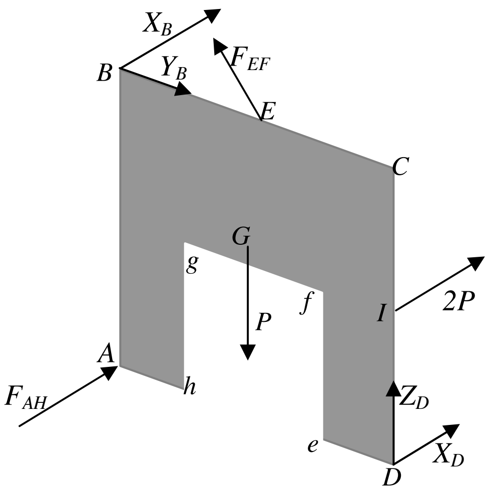
Portanto, o baricentro da placa *ABCDefgh* é o ponto

$$G = \left(0, 2a, \frac{14}{3}a\right)$$ **(Resposta a)**

Os diagramas de corpo livre da barra *AH* e da placa *ABCDefgh* são ilustrados nas figuras abaixo.







(Resposta b) **(Resposta c)**

Aplicando-se as equações de equilíbrio ao sistema de forças atuantes sobre a placa *ABCDefgh*, obtém-se:

$$\boxed{X_B + X_D + F_{AH} + 2P = 0} \tag{1}$$

$$\boxed{Y_B - F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0} \tag{2}$$

$$\boxed{F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2} + Z_D - P = 0} \tag{3}$$

$$M_{Ax} = Z_D \cdot 4a - P \cdot 2a + (E - A) \wedge \vec{F}_{EF} \cdot \vec{i} = Z_D \cdot 4a - P \cdot 2a + (2a\vec{j} + 8a\vec{k}) \wedge \left(-F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \right) \cdot \vec{i} - Y_B \cdot 8a = 0$$

$$\boxed{\therefore 4Z_D - 2P - 8Y_B + 5\sqrt{2}F_{EF} = 0} \qquad (4)$$

$$M_{Ay} = -X_B \cdot 8a - 2P \cdot 4a = 0$$

$$\boxed{\therefore X_B = -P} \qquad (5)$$

$$M_{Az} = X_D \cdot 4a + 2P \cdot 4a = 0$$

$$\boxed{\therefore X_D = -2P} \qquad (6)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1)-(6), resulta, finalmente, que:

$\boxed{X_B = -P}$, $\boxed{Y_B = P}$, $\boxed{X_D = -2P}$, $\boxed{Z_D = 0}$, $\boxed{F_{EF} = P\sqrt{2}}$, $\boxed{F_{AH} = P}$

Na barra *EF* atuam duas forças de tração com módulo $\boxed{\left|\vec{F}_{EF}\right| = P\sqrt{2}}$

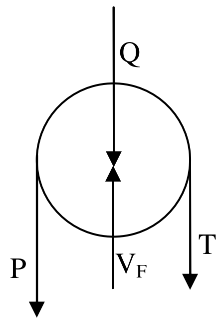
Na barra *AH* atuam duas forças compressivas de módulo $\boxed{\left|\vec{F}_{AH}\right| = P}$

Nos anéis *B* e *D* atuam, respectivamente, as reações

$\boxed{\vec{R}_B = P\vec{i} + P\vec{j}}$ e $\boxed{\vec{R}_D = 2P\vec{i}}$ **(*Resposta d*)**

QUESTÃO 3

O diagrama de corpo livre da polia é apresentado na figura abaixo.



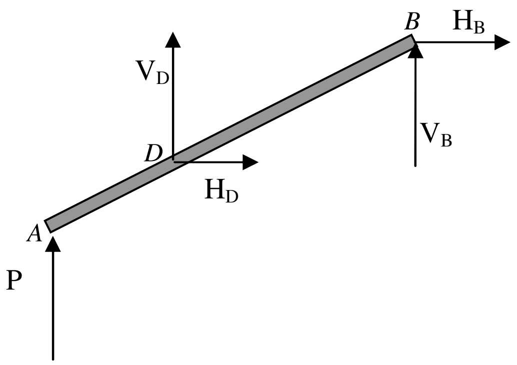
Aplicando-se as equações de equilíbrio à polia, obtêm-se:

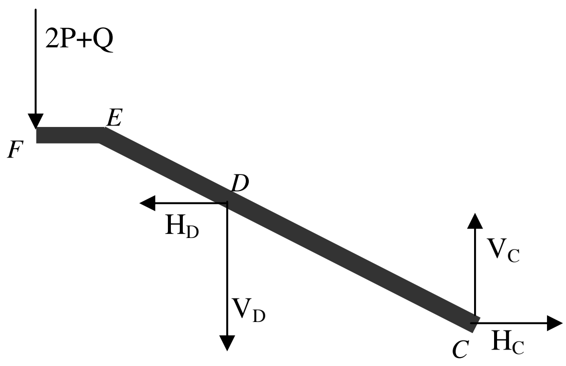
$$M_F = P.\frac{a}{2} - T\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow T = P$$

$$V_F - P - T - Q = 0 \Rightarrow V_F = 2P + Q$$

(*Resposta a*)

Os diagramas de corpo livre das barras *ADB* e *CDEF* são apresentados abaixo.





(*Resposta b*)

Aplicando-se as equações de equilíbrio aos sistemas de forças atuantes nas barras *ADB* e *CDEF*, obtêm-se:

$$H_D + H_B = 0 \qquad (1)$$

$$P + V_D + V_B = 0 \qquad (2)$$

$$M_{Bz} = 0 \Rightarrow -P \cdot 3a - V_D \cdot 2a + H_D \cdot a = 0$$

$$\therefore H_D - 2V_D - 3P = 0 \qquad (3)$$

$$-(2P + Q) - V_D + V_C = 0 \qquad (4)$$

$$-H_D + H_C = 0 \tag{5}$$

$$M_{Cz} = 0 \Rightarrow (2P+Q)\frac{7a}{2} + V_D 2a + H_D a = 0$$
$$\therefore 2H_D + 4V_D + 14P + 7Q = 0 \tag{6}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1)-(6), obtêm-se:

$\boxed{H_B = \frac{8P+7Q}{4}}$, $\boxed{V_B = \frac{12P+7Q}{8}}$

$\boxed{H_D = -\frac{8P+7Q}{4}}$, $\boxed{V_D = -\frac{20P+7Q}{8}}$

$\boxed{H_C = -\frac{8P+7Q}{4}}$, $\boxed{V_C = \frac{-4P+Q}{8}}$

(*Resposta c*)

Como a componente V_C é devida à força de atrito, o sistema se mantém em equilíbrio desde que:

$$V_C \le \mu H_C$$

É necessário analisar os seguintes casos:

(a) Se $Q > 4P \Rightarrow \mu > \frac{Q-4P}{16P+14Q}$, ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para baixo do ponto de contacto C.

(b) Se $Q < 4P \Rightarrow \mu > \frac{4P-Q}{16P+14Q}$, ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para cima do ponto de contacto C.

(c) No caso limite em que $Q = 4P$, notamos que $V_C = 0$, de modo que o sistema se mantém em equilíbrio independentemente de existir ou não atrito no ponto de contacto C da parede com a barra $CDEF$.

Portanto, excluindo-se o caso (c), concluímos que o valor mínimo de μ para que o sistema se mantenha em equilíbrio, é:

$$\mu = \left|\frac{4P-Q}{16P+14Q}\right|$$

(*Resposta d*)