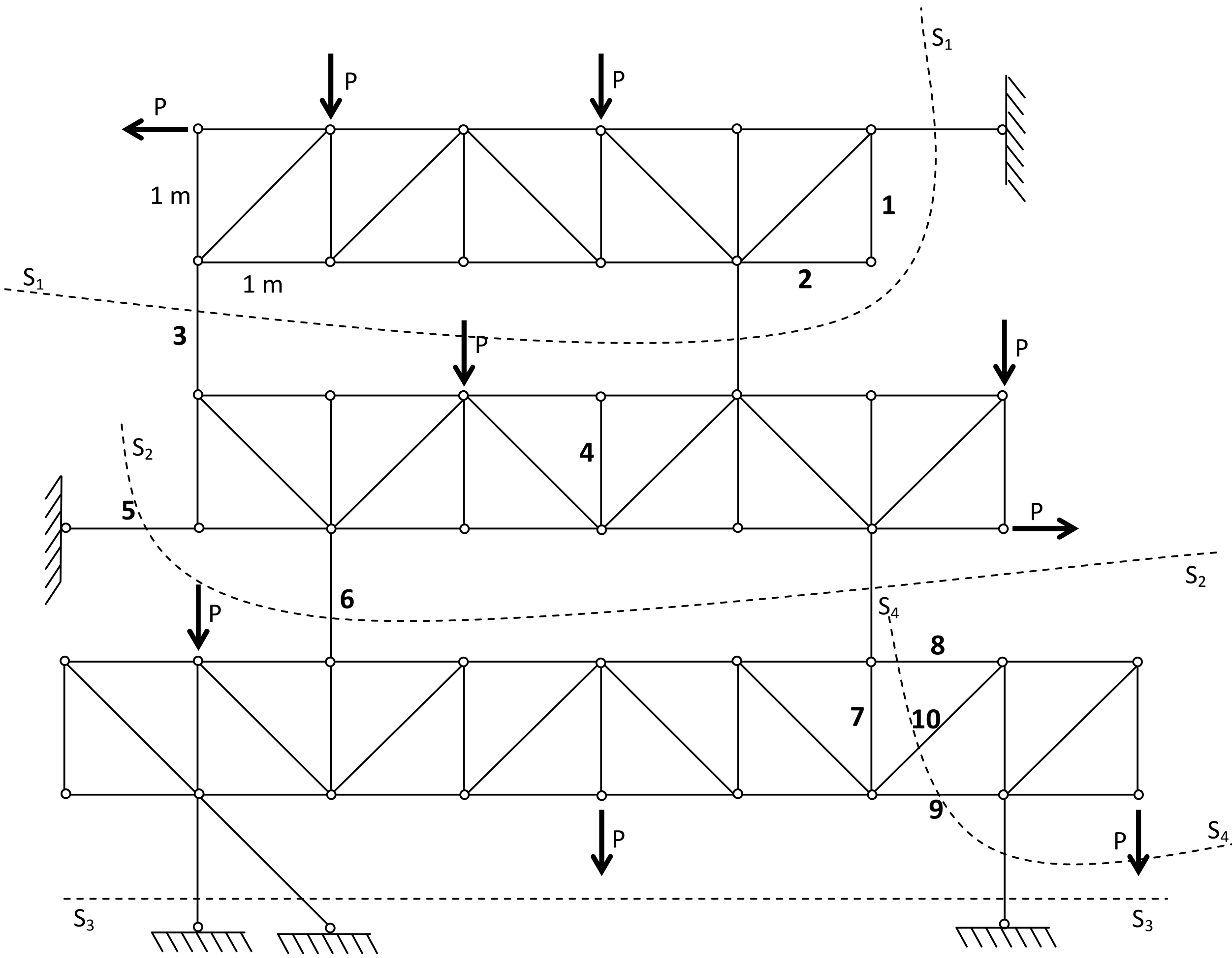
1ª Questão (3,0 pontos) – Na treliça <u>isostática</u> apresentada na figura abaixo, todas as barras possuem mesma área de seção transversal e mesmo módulo de elasticidade longitudinal. Todas as células são quadradas com aresta de 1 metro e P = 20 kN. Calcule as forças normais <u>somente para as barras numeradas</u>, completando a tabela.

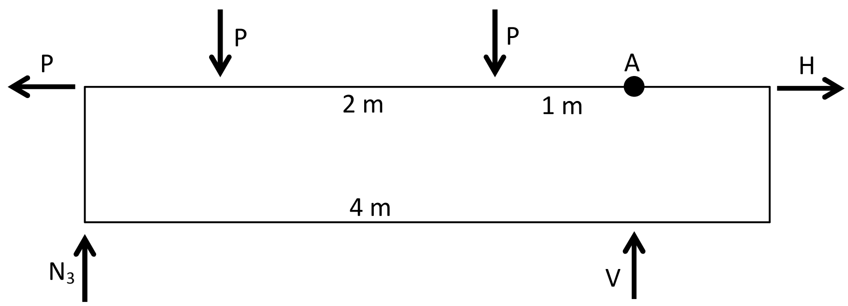


	Barra	N (kN)	$P = 20\ kN$	$P = 30\ kN$
0,3	1	0	0	0
0,3	2	0	0	0
0,3	3	$-P$	-20	-30
0,3	4	0	0	0
0,3	5	P	20	30
0,3	6	$-2P$	-40	-60
0,3	7	$-2P$	-40	-60
0,3	8	$-5P/3$	-33,3	-50
0,3	9	$-P$	-20	-30
0,3	10	$8\sqrt{2}P/3$	75,4	113,1

GABARITO

Barras 1 e 2 → São as únicas barras concorrentes em um nó onde não há carga externa aplicada. Portanto, $\boldsymbol{N_1 = N_2 = 0}$.

Para calcular a barra 3, toma-se o corte $S_1 - S_1$:



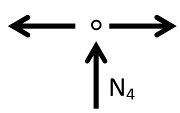
$$\sum F_H = 0 \rightarrow H = P$$

Cargas verticais simétricas em relação aos apoios: $V = \boldsymbol{N_3 = P}$ (compressão). Ou:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 1P + 3P - 4N_3 = 0 \rightarrow N_3 = P$$

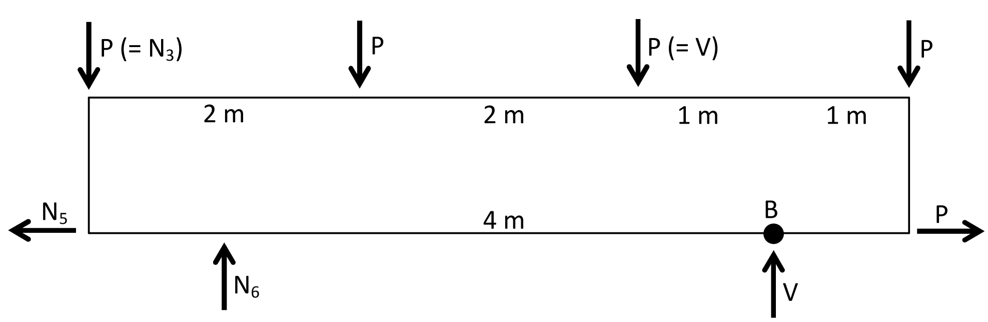
$$\sum F_V = 0 \rightarrow P + V - P - P = 0 \rightarrow V = P$$

Barra 4:



$\sum F_V = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_4 = 0}$.

Para calcular as barras 5 e 6, toma-se o corte $S_3 - S_3$:



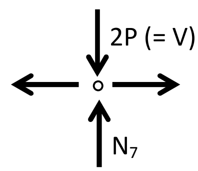
$\sum F_H = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_5 = P}$ (tração).

Cargas verticais simétricas em relação aos apoios: $V = \boldsymbol{N_6 = 2P}$ (compressão). Ou:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -1P + 1P + 3P + 5P - 4N_6 = 0 \rightarrow N_6 = 2P$$

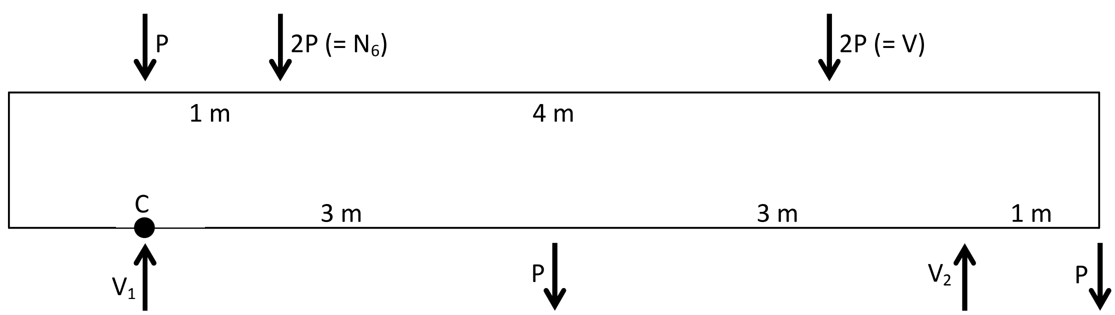
$$\sum F_V = 0 \rightarrow P + P + P + P - 2P - V = 0 \rightarrow V = 2P$$

Barra 7:



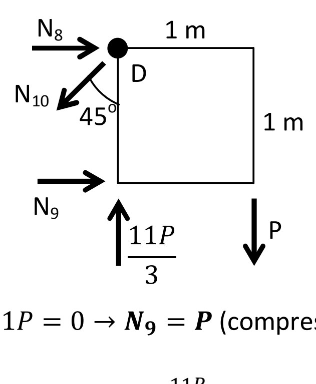
$\sum F_V = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_7 = 2P}$ (compressão).

Barra 8, 9 e 10 → Primeiramente, é calculada a reação de apoio da direita utilizando o corte $S_3 - S_3$:



$$\sum M_C = 0 \rightarrow 2P + 3P + 5 \times 2P + 7P - 6V_2 = 0 \rightarrow V_2 = \frac{11P}{3}$$

Em seguida, as barras 8, 9 e 10 são calculadas empregando o corte $S_4 - S_4$:



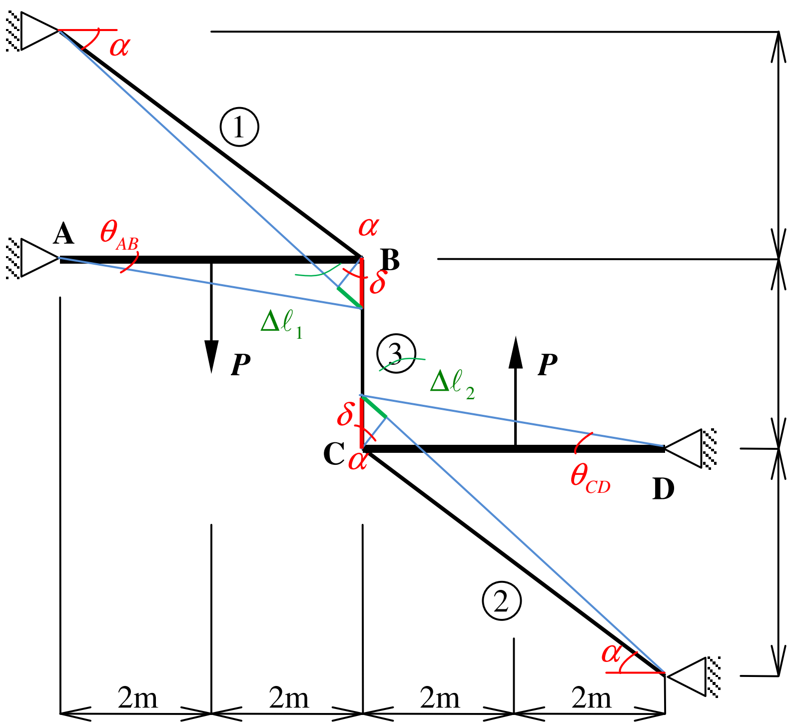
$\sum M_D = 0 \rightarrow 1N_9 - 1P = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_9 = P}$ (compressão)

$\sum F_V = 0 \rightarrow -N_{10}\cos(45^o) - P + \frac{11P}{3} = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_{10} = \frac{8\sqrt{2}P}{3}}$ (tração).

$\sum F_H = 0 \rightarrow P - \frac{8\sqrt{2}P}{3}\text{sen}(45^o) + N_8 = 0 \rightarrow P - \frac{8P}{3} + N_8 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_8 = \frac{5P}{3}}$ (compressão).

PARA P= 30 kN , multiplicar todos os resultados por 1,5

2a. questão (4,0) As barras AB e CD mostradas na figura são rígidas. Os tirantes 1 e **2** e a barra **3** são constituídos pelo mesmo material, de módulo de elasticidade $E = 70GPa$. As áreas das seções transversais destes elementos guardam as relações $A_1 = A_2 = 10A_3/3$. Determinar as forças normais nos tirantes **1** e **2** e na barra **3**, sabendo que as forças externas valem $P = 100kN$, e dimensionar as seções transversais destes elementos, sabendo que a máxima tensão admissível vale $\bar{\sigma} = 100MPa$ e a máxima rotação permitida para as barras AB e CD vale $\bar{\theta} = 0,002rad$. Note que os deslocamentos das barras AB e Cd são simétricos.



$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \ell_3 = 2,5m = \ell$$

Compatibilidade:

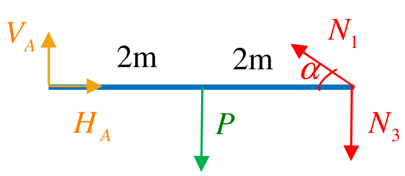
$$\begin{cases} \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \delta\sin\alpha = \dfrac{3\delta}{5} \\ \Delta\ell_3 = -2\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = A \\ A_1 = A_2 = \dfrac{10A_3}{3} = \dfrac{10A}{3} \end{cases}$$

Lei de Hooke: $N_i = \dfrac{EA_i}{\ell_i}\Delta\ell_i, \quad i = 1,2,3$

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = \dfrac{EA_1}{\ell_1}\Delta\ell_1 = \dfrac{E}{2\ell}\dfrac{10A}{3}\dfrac{3\delta}{5} = \dfrac{EA}{\ell}\delta \\ N_3 = \dfrac{EA_3}{\ell_3}\Delta\ell_3 = \dfrac{EA}{\ell}(-2\delta) = -\dfrac{2EA}{\ell}\delta = -2N_1 \end{cases}$$

Equilíbrio barra AB:



$$\sum M_{(A)} = 4N_1\sin\alpha - 4N_3 - 2P = 0$$

$$4\left(\frac{3N_1}{5} + 2N_1\right) - 2P = 0 \quad \therefore \quad \boxed{N_1 = N_2 = \frac{10P}{52}} \quad \boxed{N_3 = -\frac{20P}{52} = -2N_1}$$

Substituindo valores: $\boxed{N_1 = N_2 = 19,23kN}$ $\boxed{N_3 = -38,46kN}$

Dimensionamento:

1º Critério:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3N_1}{10A} \le \bar{\sigma} \quad \Rightarrow A \ge \frac{3N_1}{10\bar{\sigma}} = \frac{3\times 19,23\times 10^3}{10\times 100\times 10^6} = 0,0000577m^2$$

$$|\sigma_3| = \frac{|N_3|}{A_3} = \frac{|N_3|}{A} \le \bar{\sigma} \quad \Rightarrow A \ge \frac{38,46\times 10^3}{100\times 10^6} = 0,000385m^2$$

2º Critério: $\theta_{AB} = \theta_{CD} \le \bar{\theta}$

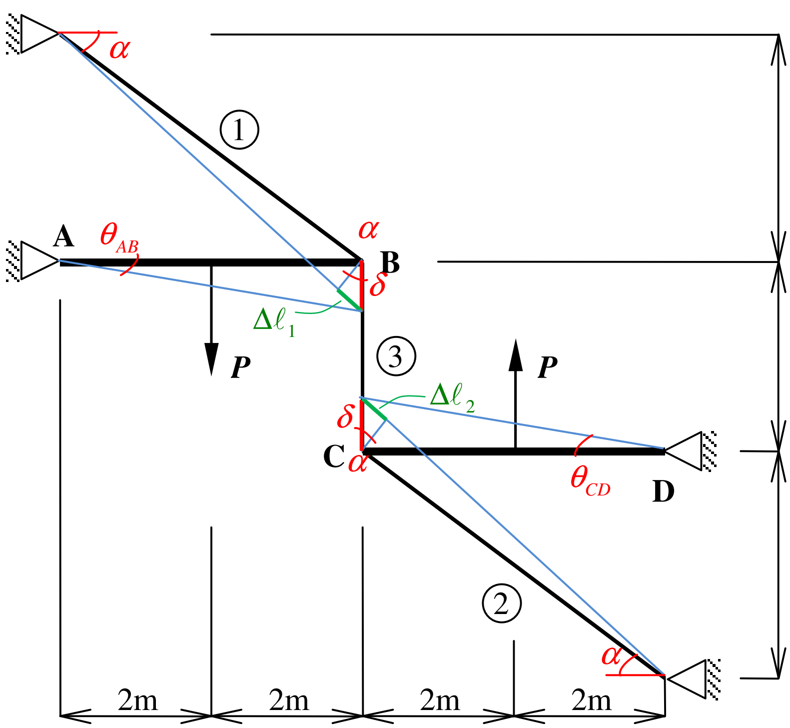
$$\theta_{AB} \cong \tan\theta_{AB} = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4}\frac{|\Delta\ell_3|}{2} = \frac{1}{8}\frac{|N_3|\ell_3}{EA_3} = \frac{1}{8}\frac{|N_3|\ell}{EA} \le \bar{\theta}$$

$$A \ge \frac{|N_3|\ell}{8E\bar{\theta}} = \frac{38,46\times 10^3\times 2,5}{8\times 70\times 10^9\times 0,002}$$

$$A \ge 0,0000858m^2$$

Logo: $\boxed{A_3 = A_{\min} = 0,000385m^2 \quad ; \quad A_1 = A_2 = \dfrac{10A_3}{3} = 0,00128m^2}$

2a. questão (4,0) As barras AB e CD mostradas na figura são rígidas. Os tirantes 1 e **2** e a barra **3** são constituídos pelo mesmo material, de módulo de elasticidade $E = 70GPa$. As áreas das seções transversais destes elementos guardam as relações $A_1 = A_2 = 10A_3/3$. Determinar as forças normais nos tirantes **1** e **2** e na barra **3**, sabendo que as forças externas valem $P = 260kN$, e dimensionar as seções transversais destes elementos, sabendo que a máxima tensão admissível vale $\bar{\sigma} = 100MPa$ e a máxima rotação permitida para as barras AB e CD vale $\bar{\theta} = 0{,}0002rad$. Note que os deslocamentos das barras AB e CD são simétricos.



$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \begin{cases} \ell_3 = 2{,}5m = \ell \\ \ell_1 = \ell_2 = 5{,}0m = 2\ell \end{cases}$$

Compatibilidade:

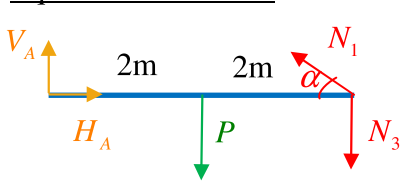
$$\begin{cases} \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \delta\sin\alpha = \dfrac{3\delta}{5} \\ \Delta\ell_3 = -2\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = A \\ A_1 = A_2 = \dfrac{10A_3}{3} = \dfrac{10A}{3} \end{cases}$$

Lei de Hooke: $N_i = \dfrac{EA_i}{\ell_i}\Delta\ell_i, \quad i = 1,2,3$

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = \dfrac{EA_1}{\ell_1}\Delta\ell_1 = \dfrac{E}{2\ell}\dfrac{10A}{3}\dfrac{3\delta}{5} = \dfrac{EA}{\ell}\delta \\ N_3 = \dfrac{EA_3}{\ell_3}\Delta\ell_3 = \dfrac{EA}{\ell}(-2\delta) = -\dfrac{2EA}{\ell}\delta = -2N_1 \end{cases}$$

Equilíbrio barra AB:



$$\sum M_{(A)} = 4N_1\sin\alpha - 4N_3 - 2P = 0$$

$$4\left(\frac{3N_1}{5} + 2N_1\right) - 2P = 0 \quad \therefore \quad \boxed{N_1 = N_2 = \frac{10P}{52}} \quad \boxed{N_3 = -\frac{20P}{52} = -2N_1}$$

Substituindo valores: $\boxed{N_1 = N_2 = 50kN}$ $\boxed{N_3 = -100kN}$

Dimensionamento:

1º Critério:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3N_1}{10A} \le \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{3N_1}{10\bar{\sigma}} = \frac{3\times50\times10^3}{10\times100\times10^6} = 0{,}00015m^2$$

$$|\sigma_3| = \frac{|N_3|}{A_3} = \frac{|N_3|}{A} \le \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{100\times10^3}{100\times10^6} = 0{,}001m^2$$

2º Critério: $\theta_{AB} = \theta_{CD} \le \bar{\theta}$

$$\theta_{AB} \approx \tan\theta_{AB} = \frac{\delta}{4} = \frac{1}{4}\frac{|\Delta\ell_3|}{2} = \frac{1}{8}\frac{|N_3|\ell_3}{EA_3} = \frac{1}{8}\frac{|N_3|\ell}{EA} \le \bar{\theta}$$

$$A \ge \frac{|N_3|\ell}{8E\bar{\theta}} = \frac{100\times10^3\times2{,}5}{8\times70\times10^9\times0{,}0002}$$

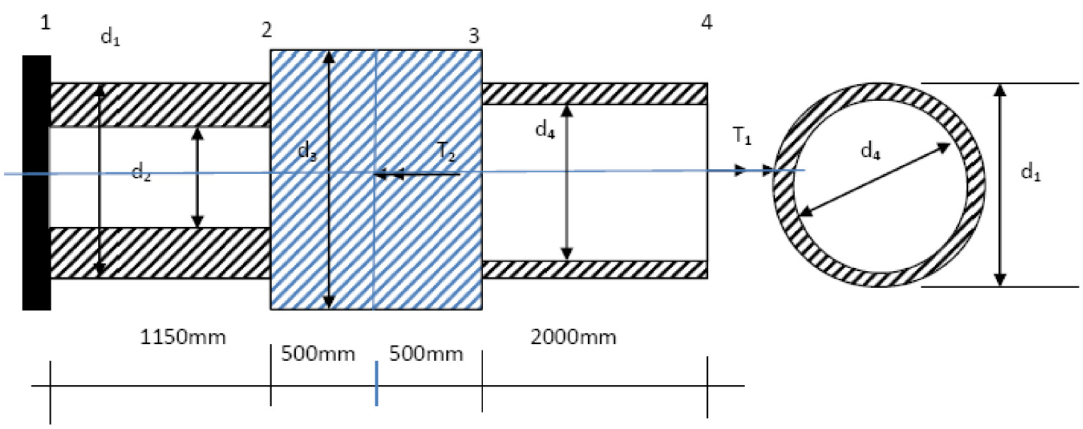
$$A \ge 0{,}00223m^2$$

Logo: $\boxed{A_3 = A_{\min} = 0{,}00223m^2 \quad ; \quad A_1 = A_2 = \dfrac{10A_3}{3} = 0{,}00743m^2}$

3ª. Questão (3pts) – Calcule a tensão máxima de cisalhamento do eixo esquematizado na figura a seguir, com carregamento T_1=50kN*m e T_2=100 kN*m, engastado na seção 1, extremidade esquerda do eixo. Considerar o diâmetro externo d_1 = 180 mm e os diâmetros interno d_2=100 e interno d_4= 140 mm. O diâmetro do trecho central maciço é d_3=250 mm, com G=80 GPa. Considerar também que o eixo no tramo 1-2 é vazado, no trecho 2-3 é maciço eno trecho 3-4 o diâmetro interno d_4=140mm.

Calcular o coeficiente de segurança do sistema, considerando uma tensão última de cisalhamento de 140 MPa.

Calcular também a rotação na extremidade da barra, seção 4.



Gabarito PEF 2202 - P2 - 3a.

$T_1 := 50\text{kN}\cdot\text{m}$ $\quad T_2 := -100\text{kN}\cdot\text{m}$ $\quad G := 80\text{GPa}$ $\quad L_{12} := 1150\text{mm}$ $\quad L_{23} := 2\cdot 500\text{mm}$ $\quad L_{34} := 2000\text{mm}$

$d_1 := 180\text{mm}$ $\quad d_2 := 100\text{mm}$ $\quad d_3 := 250\text{mm}$ $\quad d_4 := 140\text{mm}$

$$I_{34} := \frac{\pi}{32}\left(d_1^{\,4} - d_4^{\,4}\right) = 6.535\times 10^{3}\cdot\text{cm}^4 \qquad I_{23} := \frac{\pi}{32}d_3^{\,4} = 3.835\times 10^{4}\cdot\text{cm}^4$$

$$I_{12} := \frac{\pi}{32}\left(d_1^{\,4} - d_2^{\,4}\right) = 9.324\times 10^{3}\cdot\text{cm}^4 \qquad \tau_{12} := \frac{T_1 + T_2}{I_{12}}\cdot\frac{d_1}{2} = -48.261\cdot\text{MPa}$$

$$\tau_{23} := \frac{T_1}{I_{23}}\cdot\frac{d_3}{2} = 16.297\cdot\text{MPa} \qquad \tau_{34} := \frac{T_1}{I_{34}}\cdot\frac{d_1}{2} = 68.865\cdot\text{MPa}$$

$$\phi_4 := \frac{T_1\cdot L_{34}}{G\cdot I_{34}} + \frac{\left(T_1 + T_2\right)\cdot L_{12}}{G\cdot I_{12}} = 0.011 \qquad \phi_4 = 0.654\cdot\text{deg} \qquad \text{gama}_A := \frac{140}{68.8} = 2.035$$

Prova B

$T_1 := 70kN\cdot m \quad T_2 := -180kN\cdot m \quad d_1 := 180mm \quad d_2 := 100mm \quad d_3 := 250mm \quad d_4 := 140mm$

$I_{34} := \frac{\pi}{32}\left(d_1^{\ 4} - d_4^{\ 4}\right) = 6.535 \times 10^{-} \quad I_{23} := \frac{\pi}{32} d_3^{\ 4} = 3.835 \times 10^{-4} \cdot m^4$

$I_{12} := \frac{\pi}{32}\left(d_1^{\ 4} - d_2^{\ 4}\right) = 9.324 \times 10^{-5} \cdot m^4 \qquad \tau_{12} := \frac{T_1 + T_2}{I_{12}} \cdot \frac{d_1}{2} = -106.175\cdot MPa \qquad G := 80GPa$

$\tau_{23} := \frac{T_1}{I_{23}} \cdot \frac{d_3}{2} = 22.816\cdot MPa \qquad L_{12} := 1150mm \qquad L_{34} := 2000mm$

$\tau_{34} := \frac{T_1}{I_{34}} \cdot \frac{d_1}{2} = 96.411\cdot MPa \qquad \frac{L_{23}}{2} = 0.5\,m$

$$\phi_4 := \frac{T_1 \cdot L_{34}}{G \cdot I_{34}} + \frac{T_1 \cdot \frac{L_{23}}{2}}{G \cdot I_{23}} + \frac{\left(T_1 + T_2\right) \cdot \frac{L_{23}}{2}}{G \cdot I_{23}} + \frac{\left(T_1 + T_2\right) \cdot L_{12}}{G \cdot I_{12}} = 9.171 \times 10^{-3} \qquad \phi_4 = 0.525\cdot deg$$

$$gama_B := \frac{140}{106.17} = 1.319$$