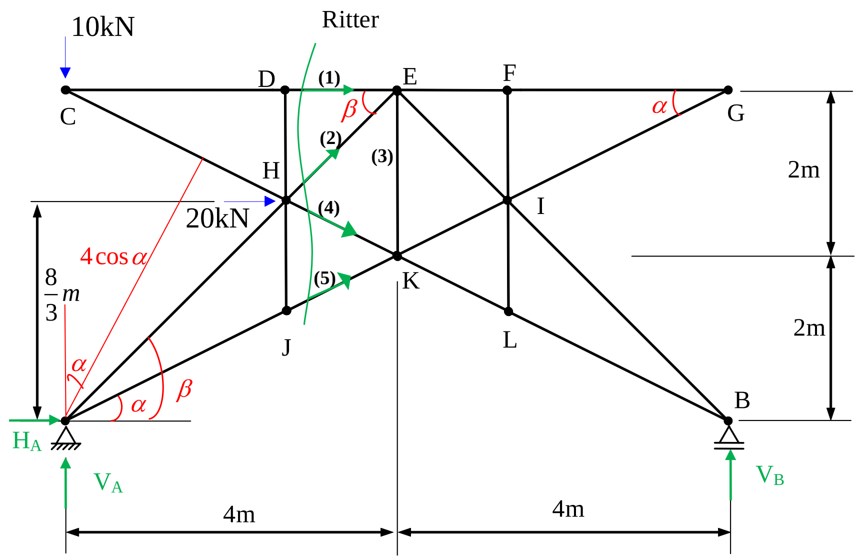
Questão 1 (3,0 pontos). Determine as forças normais nas barras numeradas da treliça abaixo.



Esforço	[kN]
N_1	+20,00
N_2	-47,13
N_3	+46,65
N_4	-37,27
N_5	+52,17

$$\sin\beta = \cos\beta = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711$$

$$\sin\alpha = \tfrac{BC}{AG} = \frac{4}{\sqrt{8^2+4^2}} = 0,44721$$

$$\cos\alpha = \tfrac{AB}{AG} = \frac{8}{\sqrt{8^2+4^2}} = 0,89443$$

Reações de Apoio:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_H = H_A + 20 = 0 \\ \sum_V = V_A + V_B - 10 = 0 \\ \sum M_{(A)} = 8V_B - \frac{8}{3}\times 20 = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{ll} H_A = -20kN & (\leftarrow) \\ V_A = \frac{10}{3} = 3,33kN & (\uparrow) \\ V_B = \frac{20}{3} = 6,67kN & (\uparrow) \end{array}\right.$$

Inspeção do equilíbrio dos nós D e J: $N_1 = N_{CD};\quad N_5 = N_{AJ};\quad N_{DH} = N_{HJ} = 0$

Inspeção do equilíbrio dos nós G e F: $N_{GI} = N_{FG} = N_{EF} = N_{FI} = 0$

Equilíbrio Nó C:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_H = N_{CH}\cos\alpha + N_{CD} = 0 \\ \sum_V = -N_{CH}\sin\alpha - 10 = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} N_{CH} = -\frac{10}{\sin\alpha} = -\frac{10}{0,44721} = -22,361 \\ N_{CD} = -N_{CH}\cos\alpha = 22,361\times 0,89443 = 20\text{kN} \quad \therefore \quad N_1 = 20kN \end{array}\right.$$

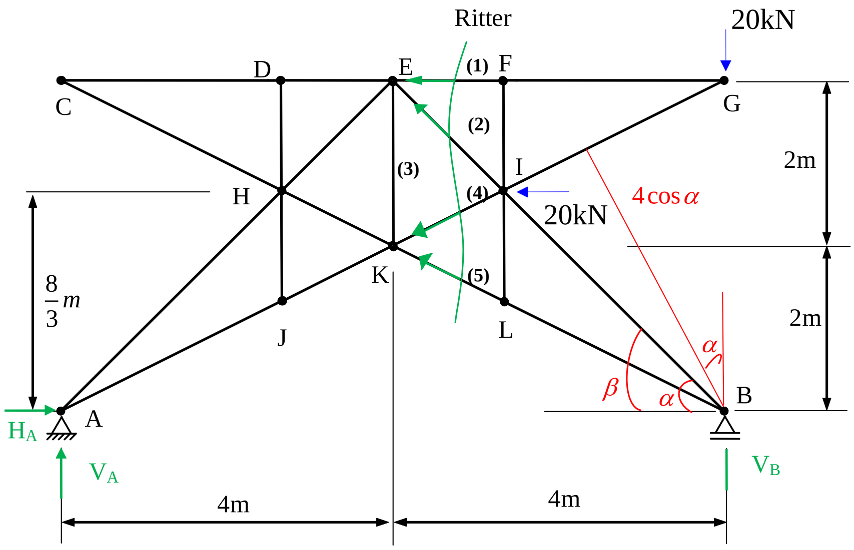
Corte de Ritter passando pelas barras (1), (2), (4) e (5):

$$\left.\begin{array}{l} \sum_H = N_1 + N_2\cos\beta + N_4\cos\alpha + N_5\cos\alpha + 20 + H_A = 0 \\ \sum_V = N_2\sin\beta - N_4\sin\alpha + N_5\sin\alpha - 10 + 3,33 = 0 \\ \sum M_{(A)} = N_1\times 4 + N_4\times 4\cos\alpha + 20\times\frac{8}{3} = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} N_2 = -47,13kN \\ N_4 = -37,27kN \\ N_5 = +52,17kN \end{array}\right.$$

Equilíbrio Nó E:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_H = N_{EI}\cos\beta - N_1 - N_2\cos\beta = 0 \\ \sum_V = -N_3 - N_{EI}\sin\beta - N_2\sin\beta = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} N_{EI} = -18,85\text{kN} \\ N_3 = +46,65kN \end{array}\right.$$

Questão 1 (3,0 pontos). Determine as forças normais nas barras numeradas da treliça abaixo.



Esforço	[kN]
N_1	+40,00
N_2	-47,13
N_3	+26,65
N_4	-59,63
N_5	+29,81

$$\sin\beta = \cos\beta = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711$$

$$\sin\alpha = \tfrac{BC}{AG} = \frac{4}{\sqrt{8^2+4^2}} = 0,44721$$

$$\cos\alpha = \tfrac{AB}{AG} = \frac{8}{\sqrt{8^2+4^2}} = 0,89443$$

Reações de Apoio:

$$\left.\begin{aligned} &\sum\nolimits_H = H_A - 20 = 0 \\ &\sum\nolimits_V = V_A + V_B - 20 = 0 \\ &\sum M_{(B)} = 8V_A + \frac{8}{3}\times 20 = 0 \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &H_A = +20kN \quad (\rightarrow) \\ &V_A = \frac{20}{3} = 6,67kN \quad (\uparrow) \\ &V_B = \frac{40}{3} = 13,33kN \quad (\uparrow) \end{aligned}\right.$$

Inspeção do equilíbrio dos nós F e L: $N_1 = N_{FG};\quad N_5 = N_{BL};\quad N_{FI} = N_{IL} = 0$

Inspeção do equilíbrio dos nós C e D: $N_{CD} = N_{DE} = N_{DH} = N_{CH} = 0$

Equilíbrio Nó G:

$$\left.\begin{aligned} &\sum\nolimits_H = -N_{GI}\cos\alpha - N_{FG} = 0 \\ &\sum\nolimits_V = -N_{GI}\sin\alpha - 20 = 0 \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &N_{GI} = -\frac{10}{\sin\alpha} = -\frac{10}{0,44721} = -47,722 \\ &N_{CD} = -N_{CH}\cos\alpha = 47,722\times 0,89443 = 40\text{kN} \quad \therefore \quad N_1 = 40kN \end{aligned}\right.$$

Corte de Ritter passando pelas barras (1), (2), (4) e (5):

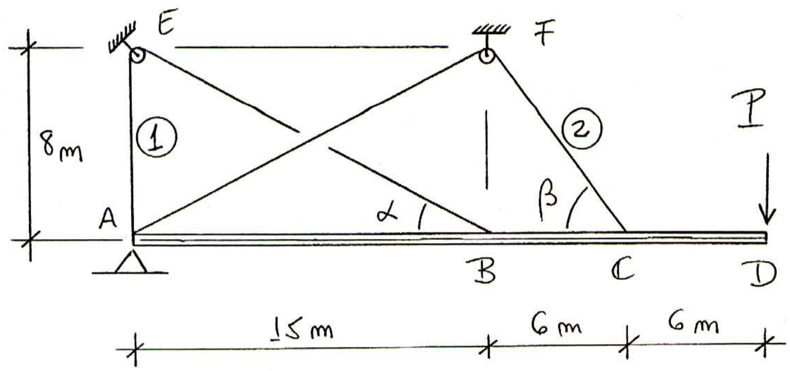
$$\left.\begin{aligned} &\underset{\leftarrow}{\sum}\nolimits_H = N_1 + N_2\cos\beta + N_4\cos\alpha + N_5\cos\alpha + 20 = 0 \\ &\uparrow\sum\nolimits_V = N_2\sin\beta - N_4\sin\alpha + N_5\sin\alpha - 20 + 13,33 = 0 \\ &\sum M_{(B)} = N_1\times 4 + N_4\times 4\cos\alpha + 20\times\frac{8}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &N_2 = -47,13kN \\ &N_4 = -59,63kN \\ &N_5 = +29,81kN \end{aligned}\right.$$

Equilíbrio Nó E:

$$\left.\begin{aligned} &\sum\nolimits_H = -N_{EH}\cos\beta + N_1 + N_2\cos\beta = 0 \\ &\sum\nolimits_V = -N_3 - N_{EH}\sin\beta - N_2\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &N_{EI} = 9,44\text{kN} \\ &N_3 = +26,65kN \end{aligned}\right.$$

Nome: ______________________________ **Nº USP:** ______________

Questão 2 (2,0 pontos) A barra horizontal é composta de um material hipotético, que não se deforma ($E = \infty$). Os dois tirantes, que passam sem atrito pelas polias E e F, são feitos de um mesmo material ($E = 10^6\ kgf/cm^2$), e têm a mesma área de seção transversal ($A = 7,65\ cm^2$). Sabendo-se que a carga aplicada vale $P = 67.444\ kgf$, e desprezando o peso próprio do sistema, calcule as forças de tração que agem nos tirantes (N_1 e N_2).



EQUILÍBRIO

$$P(27) = (N_1 \operatorname{sen}\alpha)15 + (N_2 \operatorname{sen}\beta)21 \qquad (1)$$

COMPATIBILIDADE

$$\begin{cases} \Delta L_1 = v_B \operatorname{sen}\alpha \\ \Delta L_2 = v_C \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Mas $5 v_C = 7 v_B \Rightarrow 50\, \Delta L_2 = 119\, \Delta L_1 \qquad (2)$

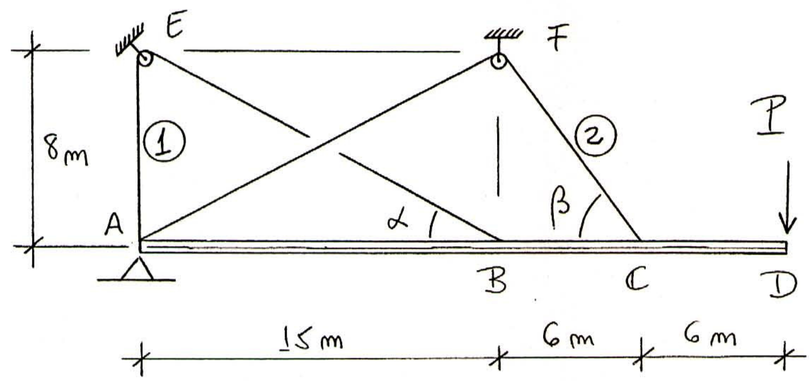
LEI DE HOOKE $\qquad \Delta L_1 = \dfrac{N_1 (2500)}{EA}$ e $\Delta L_2 = \dfrac{N_2 (2700)}{EA} \qquad (3)$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} N_1 = 41.310\ kgf \\ N_2 = 91.035\ kgf \end{cases}$$

Nome: ______________________________ **Nº USP:** ______________

Questão 2 (2,0 pontos) A barra horizontal é composta de um material hipotético, que não se deforma ($E = \infty$). Os dois tirantes, que passam sem atrito pelas polias E e F, são feitos de um mesmo material ($E = 10^6\ kgf/cm^2$), e têm a mesma área de seção transversal ($A = 7{,}65\ cm^2$). Sabendo-se que a carga aplicada vale $P = 134.888\ kgf$, e desprezando o peso próprio do sistema, calcule as forças de tração que agem nos tirantes (N_1 e N_2).



EQUILÍBRIO

$$P(27) = (N_1 \operatorname{sen}\alpha)15 + (N_2 \operatorname{sen}\beta)21 \qquad (1)$$

COMPATIBILIDADE

$$\begin{cases} \Delta L_1 = v_B \operatorname{sen}\alpha \\ \Delta L_2 = v_C \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Mas $5 v_C = 7 v_B \Rightarrow 50 \Delta L_2 = 119 \Delta L_1 \qquad (2)$

LEI DE HOOKE $\quad \Delta L_1 = \dfrac{N_1 (2500)}{EA}, \quad \Delta L_2 = \dfrac{N_2 (2700)}{EA} \qquad (3)$

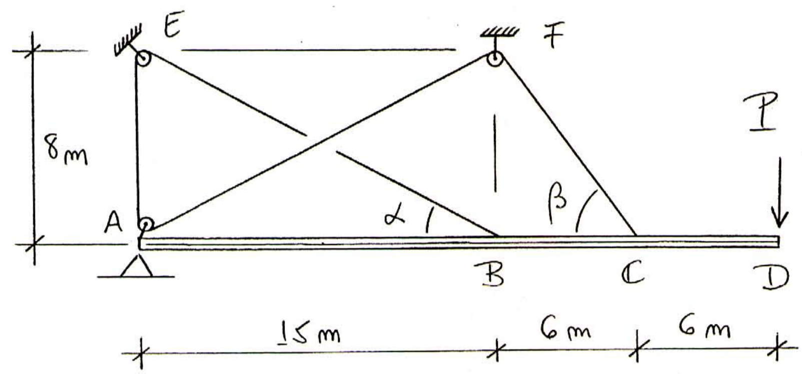
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} N_1 = 82.620\ kgf \\ N_2 = 182.070\ kgf \end{cases}$$

Nome: ______________________________ **Nº USP:** ____________

Questão 3 (2,0 pontos) Na questão anterior é introduzida uma terceira polia no ponto A, e os dois tirantes se transformam num único, para o qual são dados: $E = 10^6\ \text{kgf/cm}^2$ e $A = 7{,}65\ \text{cm}^2$. Sendo $P = 43.940\ \text{kgf}$, calcule:

a) a força que age no tirante (N)
b) a tensão normal de tração no tirante (σ)
c) o coeficiente de segurança do sistema (s), sabendo-se que a tensão de escoamento do material que compõe o tirante vale $\sigma_e = 11.700\ \text{kgf/cm}^2$
d) o alongamento do tirante (ΔL)
e) o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (v_D)



a) $P(27) = N(15 \operatorname{sen} \alpha + 21 \operatorname{sen} \beta) \Rightarrow N = 49.725\ \text{kgf}$

b) $\sigma = \dfrac{N}{A} = 6.500\ \text{kgf/cm}^2$

c) $s = \dfrac{\sigma_e}{\sigma} \cong 1{,}8$

d) $\Delta L = \dfrac{49725\,(5200)}{7{,}65\,(10)^6} \Rightarrow \Delta L = 33{,}8\ \text{cm}$

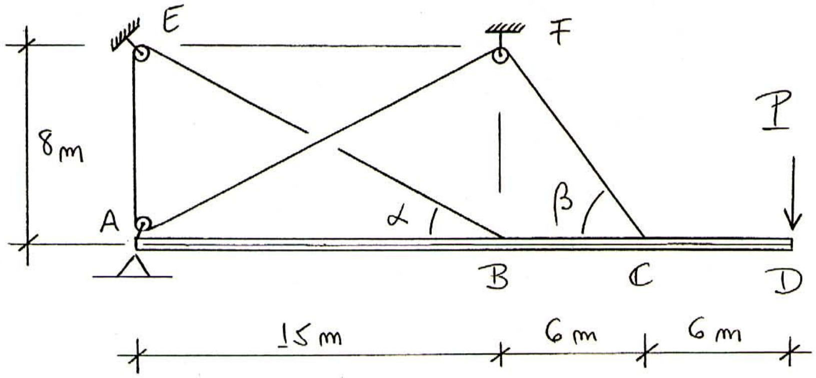
e) $\Delta L = \left(\dfrac{5}{9} v_D\right) \operatorname{sen} \alpha + \left(\dfrac{7}{9} v_D\right) \operatorname{sen} \beta$

$\Rightarrow v_D = \dfrac{765}{676} \Delta L \Rightarrow v_D = 38{,}25\ \text{cm}$

Nome: ______________________________ **Nº USP:** ______________

Questão 3 (2,0 pontos) Na questão anterior é introduzida uma terceira polia no ponto A, e os dois tirantes se transformam num único, para o qual são dados: $E = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ e $A = 7{,}65 \text{ cm}^2$. Sendo $P = 52.728 \text{ kgf}$, calcule:

a) a força que age no tirante (N)
b) a tensão normal de tração no tirante (σ)
c) o coeficiente de segurança do sistema (s), sabendo-se que a tensão de escoamento do material que compõe o tirante vale $\sigma_e = 11.700 \text{ kgf/cm}^2$
d) o alongamento do tirante (ΔL)
e) o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (v_D)



a) $P(27) = N(15 \operatorname{sen}\alpha + 21 \operatorname{sen}\beta) \Rightarrow N = 59.670 \text{ kgf}$

b) $\sigma = \dfrac{N}{A} \Rightarrow \sigma = 7.800 \text{ kgf/cm}^2$

c) $s = \dfrac{\sigma_e}{\sigma} \Rightarrow s = 1{,}5$

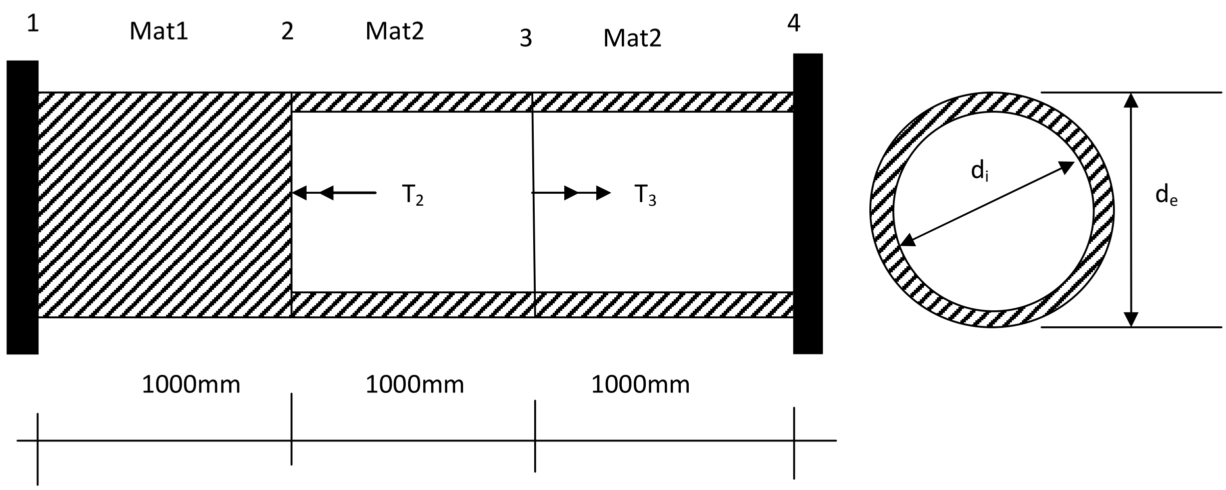
d) $\Delta L = \dfrac{N(5200)}{EA} \Rightarrow \Delta L = 40{,}56 \text{ cm}$

e) $\Delta L = \left(\dfrac{5}{9} v_D\right) \operatorname{sen}\alpha + \left(\dfrac{7}{9} v_D\right) \operatorname{sen}\beta$

$$\Rightarrow v_D = \frac{765}{676} \Delta L \Rightarrow v_D = 45{,}9 \text{ cm}$$

NOME:____No.:______________

4ª. Questão (3pts) – Calcule a tensão máxima de cisalhamento do eixo formado por dois materiais Mat1 e Mat2, esquematizado na figura a seguir, com carregamento T_2=100kN*m e T_3=40 kN*m, engastado nas duas seções de extremidade (1) e (4). Considerar o diâmetro externo d_e = 154mm e o diâmetro interno d_i=0,8d_e , com G_{mat1}=60 GPa e G_{mat2}=80 GPa. Considerar também que o eixo no tramo 1-2 é maciço e em 2-4 é vazado, com diâmetro interno d_i=0,8d_e.



Resolução da questão

Comprimento do tramo: $L_1 := 1000mm$

Comprimento total da barra: $L_t := 3 \cdot L_1 \qquad L_t = 3\,m$

Modulo de elasticidade transversal do Mat1 e Mat2: $G_1 := 60GPa \qquad G_2 := 80GPa$

diametro externo e interno do eixo-tubo: $d_e := 154mm \quad d_i := 0.8 \cdot d_e \qquad d_i = 123.2 \cdot mm$

Momentos torçores aplicados em 2 e 3: $T_2 := -100kN \cdot m \qquad T_3 := 40kN \cdot m$

Reações nas seções 1 e 4: $T_{r1} \qquad T_{r4}$

Equação de equilibrio $T_{r1} + T_2 + T_3 + T_{r4} = 0 \qquad T_{r1} + T_{r4} = -T_2 - T_3$

Equação de compatibilidade - rotação nula na seção 4 $\phi_{4T} + \phi_{4Tr4} = 0$

Momento de inercia a torção $I_{p1} := \dfrac{\pi \cdot d_e^4}{32} \qquad I_{p1} = 5.522 \times 10^3 \cdot cm^4$

$$I_{p2} := \frac{\pi}{32} \cdot \left(d_e^4 - d_i^4\right) \qquad I_{p2} = 3.260 \times 10^3 \cdot cm^4$$

$$\phi_{4T12} := \frac{(T_2 + T_3) \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} \qquad \phi_{4T23} := \frac{T_3 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}$$

$$\phi_{4T23} = 0.015 \qquad \phi_{4T12} = -0.018$$

$$\frac{T_{r4} \cdot 1 \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \frac{T_{r4} \cdot 2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}} + \phi_{4T12} + \phi_{4T23} = 0$$

$$T_{r4}\left(\frac{L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \frac{2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}\right) = -\left(\phi_{4T2} + \phi_{4T3}\right)$$

$$T_{r4} := \frac{-\left(\phi_{4T12} + \phi_{4T23}\right)}{\left(\dfrac{L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \dfrac{2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}\right)} \qquad T_{r4} = 2.59 \cdot kN \cdot m$$

$$T_{r1} := -T_2 - T_3 - T_{r4} \qquad T_{r1} = 57.41 \cdot kN \cdot m$$

$$\tau_{23} := \frac{(T_{r1} + T_2)}{I_{p1}} \cdot \frac{d_e}{2} \qquad \tau_{23} = -59.383MPa$$

$$\tau_{12} := \frac{T_{r1}}{I_{p1}} \cdot \frac{d_e}{2} \qquad \tau_{12} = 80.063MPa$$

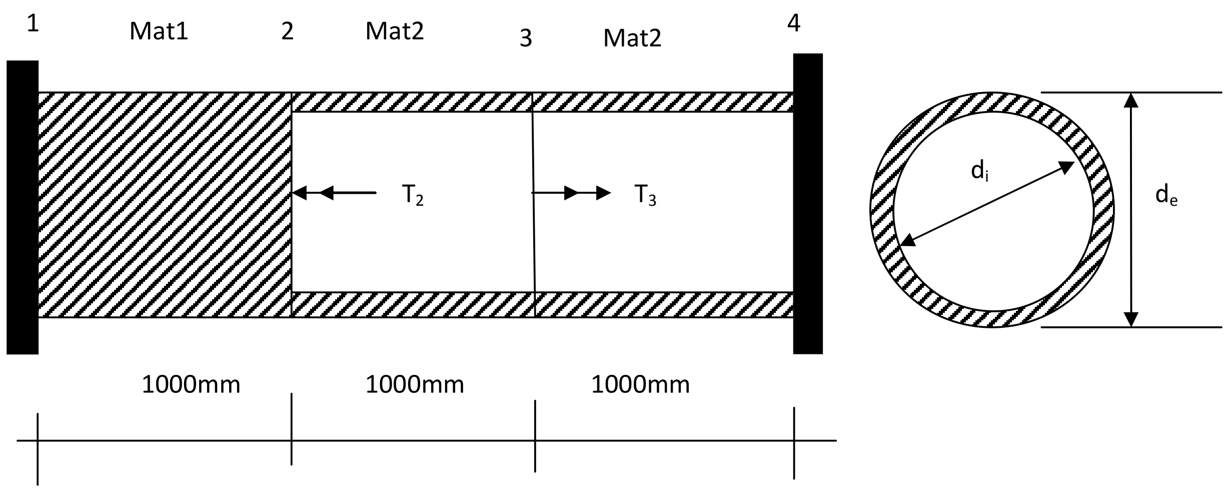
resposta da questão com di=0,8de

$T_{12} := T_{r1}$ $\quad T_{23} := T_{r1} + T_2$ $\quad T_{23} = -42.59 \cdot kN \cdot m$ $\quad T_{r1} + T_2 = -42.59 \cdot kN \cdot m$

$T_{34} := T_{r1} + T_2 + T_3$ $\quad T_{34} = -2.59 \cdot kN \cdot m$

NOME:____No.:______________

4ª. Questão (3pts) – Calcule a tensão máxima de cisalhamento do eixo formado por dois materiais Mat1 e Mat2, esquematizado na figura a seguir, com carregamento T_2=100kN*m e T_3=40 kN*m, engastado nas duas seções de extremidade (1) e (4). Considerar o diâmetro externo d_e = 154mm e o diâmetro interno d_i=0,6d_e , com G_{mat1}=60 GPa e G_{mat2}=80 GPa. Considerar também que o eixo no tramo 1-2 é maciço e em 2-4 é vazado, com diâmetro interno d_i=0,6d_e.



Resolução da questão

Comprimento do tramo: $L_1 := 1000mm$

Comprimento total da barra: $L_t := 3 \cdot L_1$ $\quad L_t = 3\,m$

Modulo de elasticidade transversal do Mat1 e Mat2: $G_1 := 60GPa$ $\quad G_2 := 80GPa$

diametro externo e interno do eixo-tubo: $d_e := 154mm$ $\quad d_i := 0.6 \cdot d_e$ $\quad d_i = 92.4\,mm$

Momentos torçores aplicados em 2 e 3: $T_2 := -100kN \cdot m$ $\quad T_3 := 40kN \cdot m$

Reações nas seções 1 e 4: T_{r1} $\quad T_{r4}$

Equação de equilibrio $T_{r1} + T_2 + T_3 + T_{r4} = 0$ $\quad T_{r1} + T_{r4} = -T_2 - T_3$

Equação de compatibilidade - rotação nula na seção 4 $\phi_{4T} + \phi_{4Tr4} = 0$

Momento de inercia a torção $I_{p1} := \dfrac{\pi \cdot d_e^4}{32}$ $\quad I_{p1} = 5.522 \times 10^3 \cdot cm^4$

$I_{p2} := \dfrac{\pi}{32} \cdot \left(d_e^4 - d_i^4\right)$ $\quad I_{p2} = 4.806 \times 10^3 \cdot cm^4$

$\phi_{4T12} := \dfrac{(T_2 + T_3) \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{p1}}$ $\quad \phi_{4T23} := \dfrac{T_3 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}$

$\phi_{4T23} = 0.01$ $\quad \phi_{4T12} = -0.018$

$$\frac{T_{r4} \cdot 1 \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \frac{T_{r4} \cdot 2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}} + \phi_{4T12} + \phi_{4T23} = 0$$

$$T_{r4}\left(\frac{L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \frac{2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}\right) = -\left(\phi_{4T2} + \phi_{4T3}\right)$$

$$T_{r4} := \frac{-\left(\phi_{4T12} + \phi_{4T23}\right)}{\left(\dfrac{L_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \dfrac{2 \cdot L_1}{G_2 \cdot I_{p2}}\right)}$$ $\quad T_{r4} = 9.376\,kN \cdot m$

$T_{r1} := -T_2 - T_3 - T_{r4}$ $\quad T_{r1} = 50.624\,kN \cdot m$

$\tau_{23} := \dfrac{(T_{r1} + T_2)}{I_{p1}} \cdot \dfrac{d_e}{2}$ $\quad \tau_{23} = -68.853\,MPa$

$\tau_{12} := \dfrac{T_{r1}}{I_{p1}} \cdot \dfrac{d_e}{2}$ $\quad \tau_{12} = 70.594\,MPa$ $\quad$ resposta da questão com di=0,6de

$T_{12} := T_{r1}$ $\quad T_{23} := T_{r1} + T_2$ $\quad T_{23} = -49.376\,kN\cdot m$ $\quad T_{r1} + T_2 = -49.376\,kN\cdot m$

$T_{34} := T_{r1} + T_2 + T_3$ $\quad T_{34} = -9.376\,kN\cdot m$