PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos (01/07/2015)

Nome: ____ **nUSP:** _______________

Questão 1 (5,0)

Para a estrutura da figura 1, calcule:

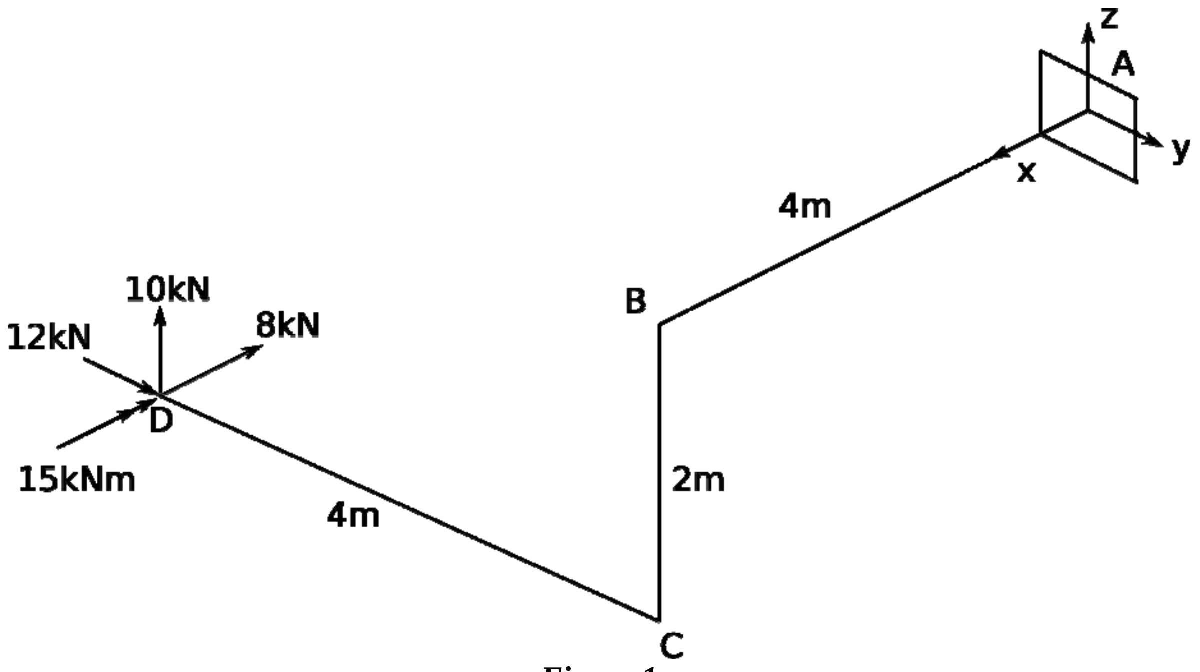


Figura 1

(a) Encontre as reações de apoio em A. (0,4)

(b) Trace o diagrama de força normal. (0,9)

(c) Trace o diagrama de força cortante. (0,9)

(d) Trace o diagrama de momento fletor. (0,9)

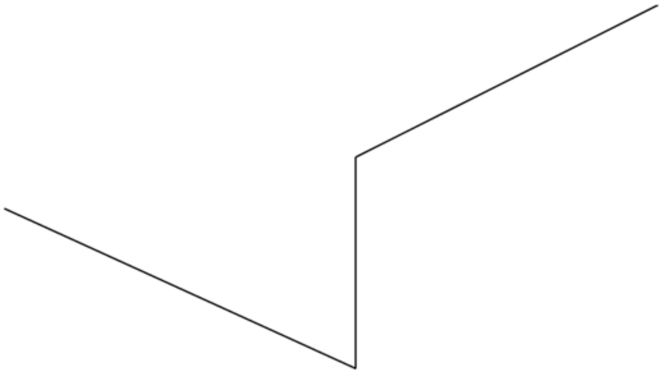
(e) Trace o diagrama de momento torçor. (0,9)

Obs: traçar os diagramas na folha seguinte. Somente esses serão considerados.

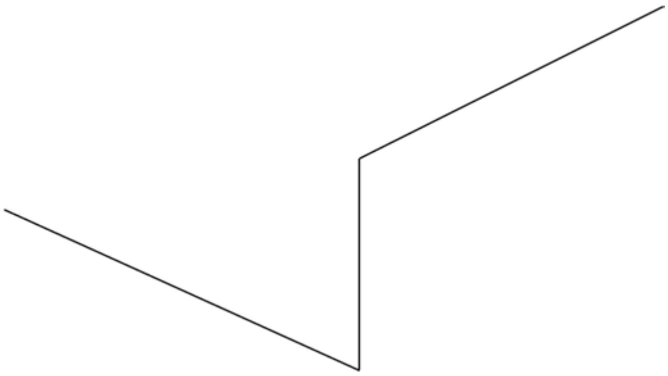
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos (01/07/2015)

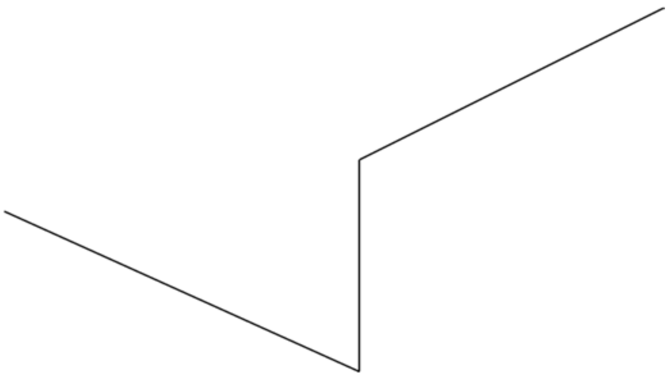
Nome: ____ **nUSP:** ____________



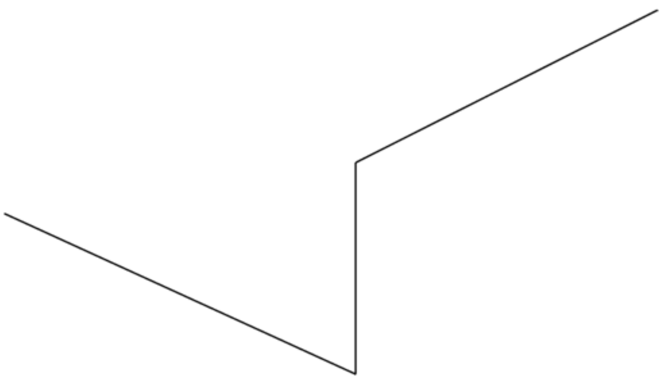
N[kN]



V[kN]



Mf[kNm]



T[kNm]

PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos (01/07/2015)

Nome: ____ **nUSP:** ____________

Questão 2 (2,0)

Para a estrutura da figura 2, determine o raio mínimo da seção transversal (considerando que a seção é circular e de raio R) dos tendões 1 e 2, com os seguintes critérios:

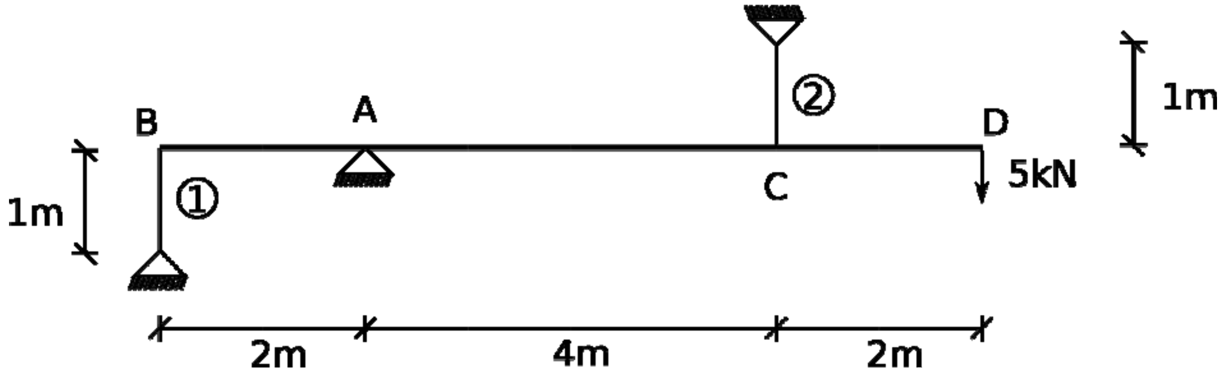


Figura 2

- A barra BD é rígida.
- Os tendões 1 e 2 possuem mesma área e mesmo material, cujo módulo de elasticidade vale $180\ GPa$.
- A tensão máxima admissível nos tendões é $60\ MPa$.
- O deslocamento máximo admissível do tendão e $5\ cm$.

Calcule:

(a) As reações de apoio em A, bem como os valores de força normal nos tendões 1 e 2. (1,0)

(b) O raio mínimo necessário para atender os critérios. (1,0)

PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos (01/07/2015)

Nome: ____ **nUSP:** _______________

Questão 3 (3,0)

Para o pilar com seção transversal dada na figura 3, obtenha:

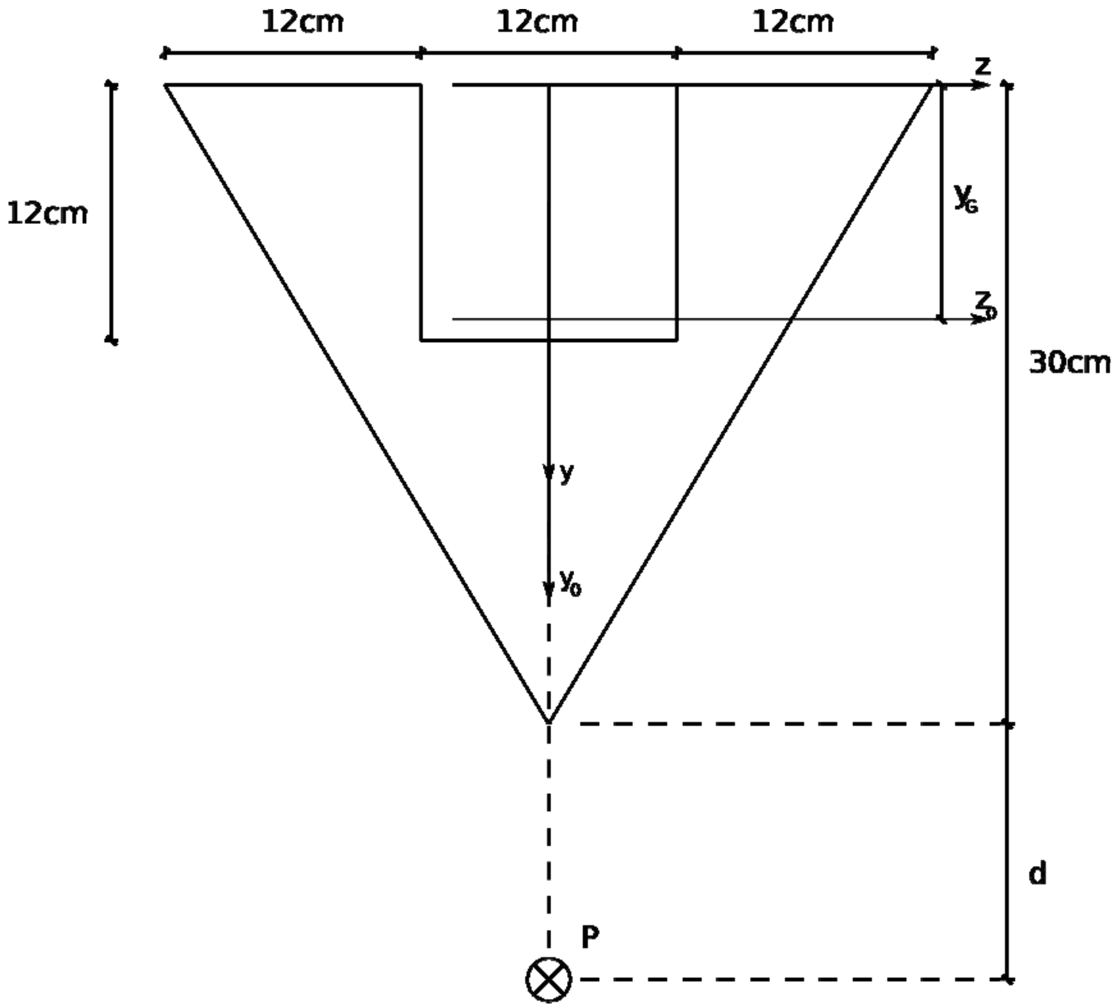


Figura 3

(a) O valor de d para que não haja tração na seção transversal. (1,5)

(b) O valor de P para que a tensão de tensão máxima admissível seja 50 MPa. Nesse cálculo, considere $d = 2m$. (1,5)

PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos (01/07/2015)

Nome: ____ **nUSP:** ______________

Formulário

Propriedades de Figuras Planas

Momento estático: $M_{sz} = \int ydA$, $M_{sy} = \int zdA$

Momento de inércia: $I_z = \int y^2 dA$, $I_y = \int z^2 dA$

Retângulo: $I_{Z0} = \frac{bh^3}{12}$

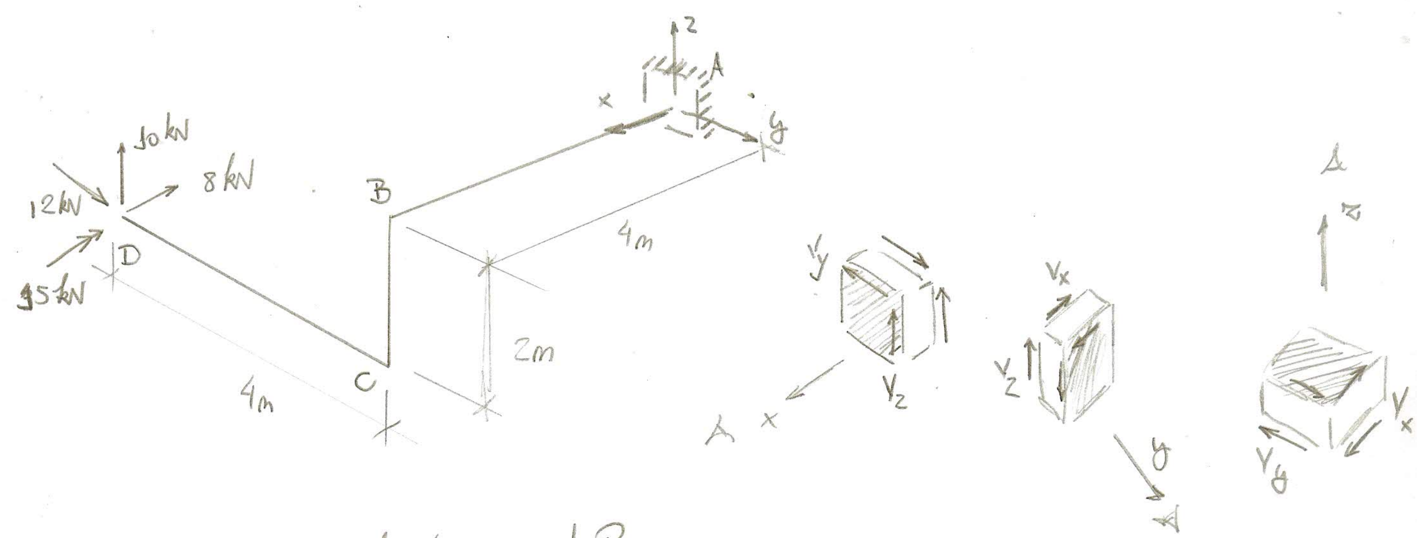
Triângulo $I_{Z0} = \frac{bh^3}{36}$

Steiner $I_z = I_{Z0} + A \cdot d^2$

Tensões

Tensão normal: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{Z0}} y$

Tensão de cisalhamento: $\tau = \frac{V \cdot M_S^*}{b^* \cdot I_{Z0}}$



Todas as forças são aplicadas no ponto P_D:

$P_D = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$

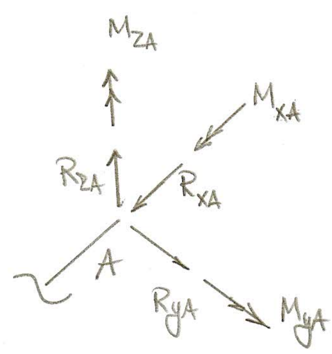
As forças e momento são:

$\vec{F}_1 = -8\vec{i}$

$\vec{F}_2 = 12\vec{j}$

$\vec{F}_3 = 10\vec{k}$

$\vec{M}_1 = -15\vec{i}$



As reações de apoio em A ficam:

$R_{XA} - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{R_{XA} = 8\ kN}$

$R_{yA} + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{R_{yA} = -12\ kN}$

$R_{ZA} + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{R_{ZA} = -10\ kN}$

E os momentos:

$M_{XA} - 31 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{XA} = 31\ kNm}$

$M_{yA} - 24 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{yA} = 24\ kNm}$

$M_{ZA} + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{ZA} = -16\ kNm}$

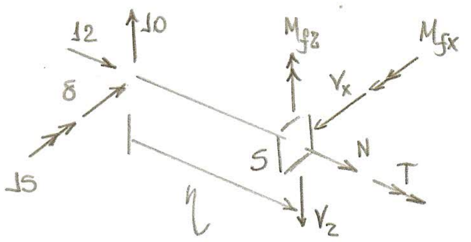
Momentos: $\left(\vec{M} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{M}_j\ ,\ \vec{r}_i = P_i - O = P_i = P_D\right)$

$\vec{M} = (4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}) \wedge (-8\vec{i}) + (4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}) \wedge (12\vec{j}) + (4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}) \wedge (10\vec{k}) - 15\vec{i}$

$\vec{M} = (-32\vec{k} + 16\vec{j}) + (48\vec{k} + 24\vec{i}) + (-40\vec{j} + 40\vec{i}) - 15\vec{i} = -31\vec{i} - 24\vec{j} + 16\vec{k}$

Diagramas:

- Barra CD:



$\sum F_x = 0: \ V_x - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{V_x = 8\,kN}$

$\sum F_y = 0: \ N + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{N = -12\,kN}$

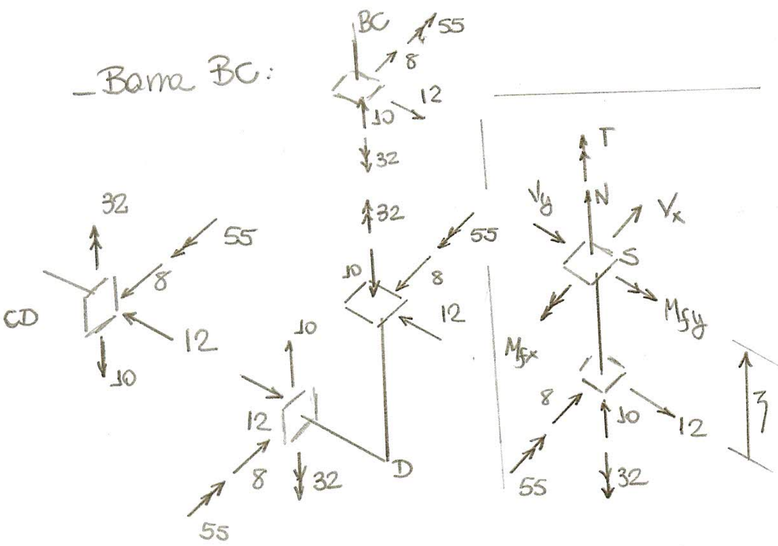
$\sum F_z = 0: \ 10 - V_z = 0 \Rightarrow \boxed{V_z = 10\,kN}$

$\sum M_{S,x} = 0: \ M_{fx} - 10\eta - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{M_{fx} = 15 + 10\eta}$ (⊕ embaixo)

$\sum M_{S,y} = 0: \boxed{T = 0}$

$\sum M_{S,z} = 0: \ M_{fz} - 8\eta = 0 \Rightarrow \boxed{M_{fz} = 8\eta}$ (⊕ na frente)

- Barra BC:



$\sum F_x = 0: \ -V_x - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{V_x = -8\,kN}$

$\sum F_y = 0: \ V_y + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{V_y = -12\,kN}$

$\sum F_z = 0: \ N + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{N = -10\,kN}$

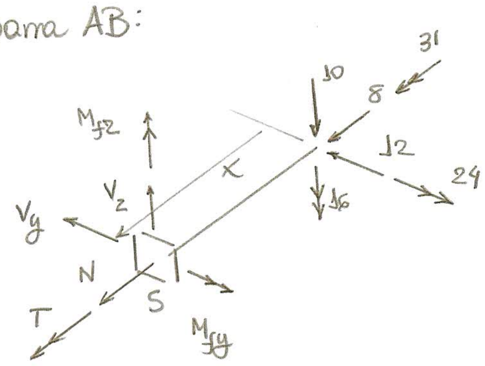
$\sum M_{S,x} = 0: \ M_{fx} - 55 + 12z = 0 \Rightarrow$

$\boxed{M_{fx} = 55 - 12z}$ (⊕ direita)

$\sum M_{S,y} = 0: \ M_{fy} + 8z = 0 \Rightarrow \boxed{M_{fy} = -8z}$ (⊕ atrás)

$\sum M_{S,z} = 0: \ T - 32 = 0 \Rightarrow \boxed{T = 32\,kNm}$

- Barra AB:



$\sum F_x = 0: \ N + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{N = -8\,kN}$

$\sum F_y = 0: \ -V_y - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{V_y = -12\,kN}$

$\sum F_z = 0: \ V_z - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{V_z = 10\,kN}$

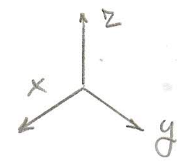
$\sum M_{S,x} = 0: \ T + 31 = 0 \Rightarrow \boxed{T = -31\,kNm}$

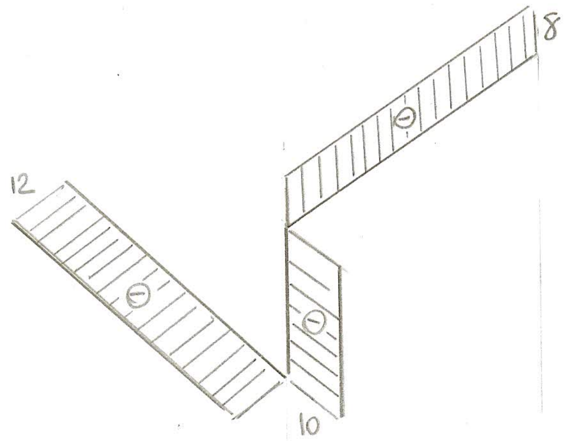
$\sum M_{S,y} = 0: \ M_{fy} + 24 - 10x = 0 \Rightarrow$

$\boxed{M_{fy} = 10x - 24}$ (⊕ em cima)

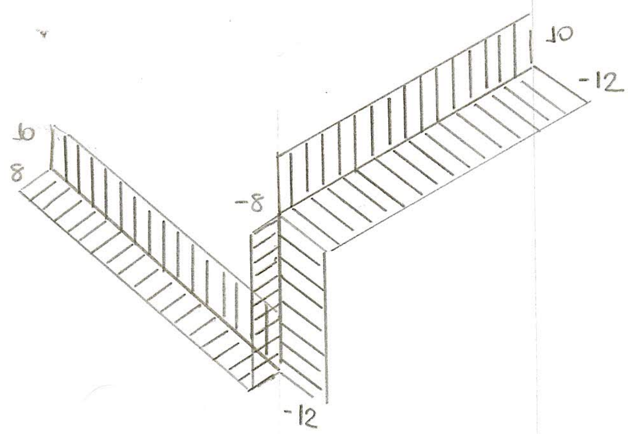
$\sum M_{S,z} = 0: \ M_{fz} - 16 + 12x = 0 \Rightarrow \boxed{M_{fz} = 16 - 12x}$

(⊕ esquerda)

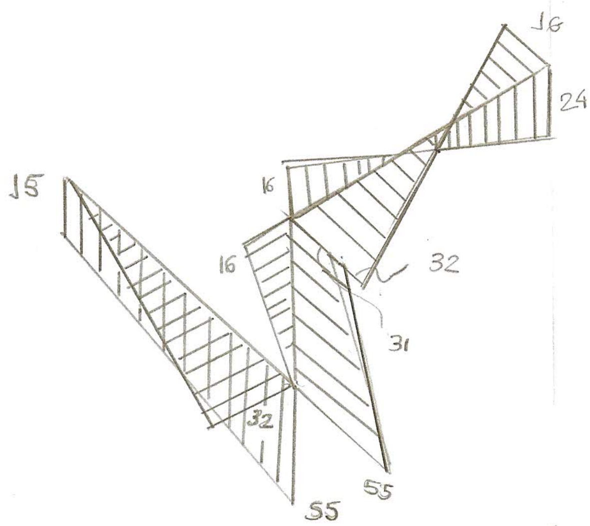




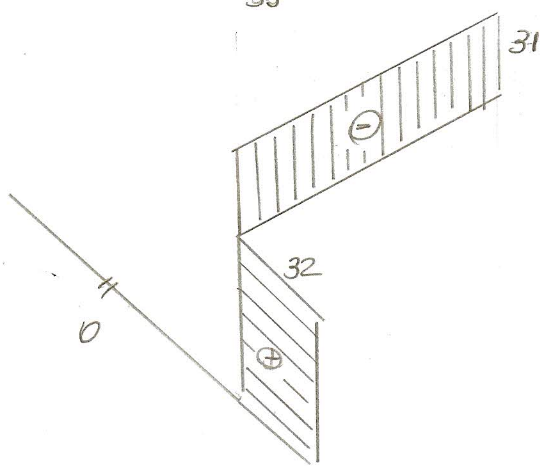
N [kN]



V [kN]

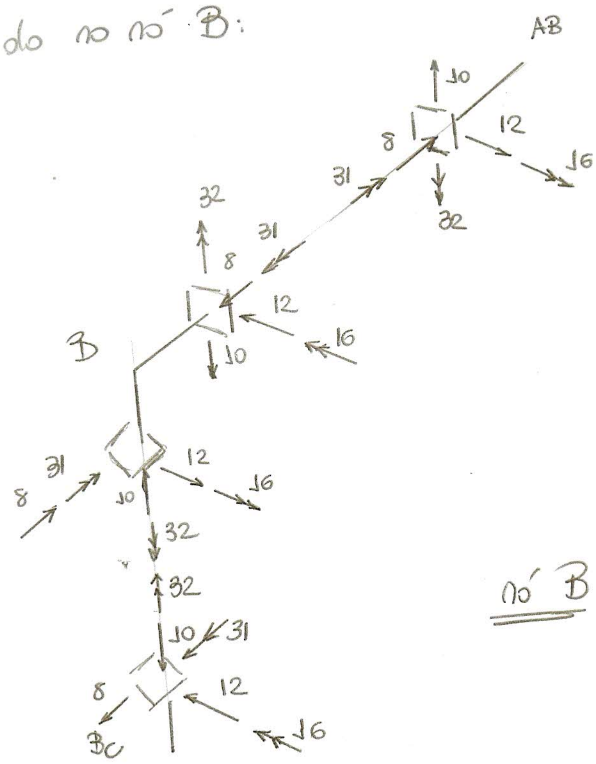


M_f [kNm]

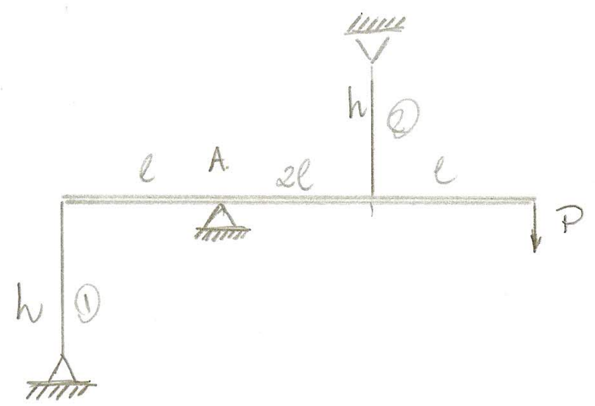


T [kNm]

Conferindo no nó B:

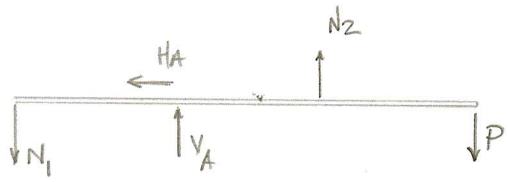


nó B em equilíbrio!



$H_A = 0$

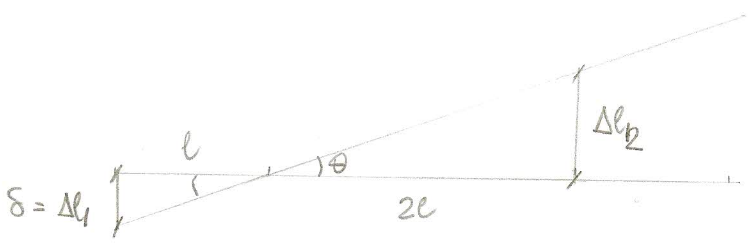
$V_A + N_2 - N_1 - P = 0$



$N_1 \cdot \ell + N_2 \cdot 2\ell - P \cdot 3\ell = 0$

$\boxed{N_1 + 2N_2 = 3P}$

Compatibilidade:



$$tg\theta = \frac{\Delta\ell_1}{\ell} = \frac{\Delta\ell_2}{2\ell}$$

$$\Delta\ell_2 = 2\Delta\ell_1 = 2\delta$$

Calculando a deformação em cada tendão:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta\ell_1}{h} = \frac{\delta}{h}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta\ell_2}{h} = \frac{2\delta}{h} \qquad \text{logo: } \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$$

Para mesmos materiais:

$$N_1 = EA\varepsilon_1 \; ; \; N_2 = EA\varepsilon_2 \Rightarrow \frac{N_1}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow N_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} N_1 = \boxed{2N_1}$$

Assim:

$$N_1 + 2 \cdot (2N_1) = 3P \Rightarrow N_1 = \frac{3P}{5} \text{ e } N_2 = \frac{6P}{5} \text{ e } V_A = P + N_1 - N_2 = P + \frac{3P}{5} - \frac{6P}{5}$$

$$\boxed{V_A = \frac{2}{5}P}$$

Projetar barra para $\delta \leq \bar{\delta}$ e $\sigma \leq \bar{\sigma}$ $(A=?)$

$$\delta_{máx} = \delta_2 = \Delta l_2 = \frac{N_2 h}{EA} = \frac{6P.h}{5EA} \leq \bar{\delta}$$

$$\frac{5EA}{6Ph} \geq \frac{1}{\bar{\delta}} \Rightarrow \boxed{A \geq \frac{6Ph}{5E\bar{\delta}}}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{N_2}{A} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{A}{N_2} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}} \qquad \frac{5A}{6P} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}}$$

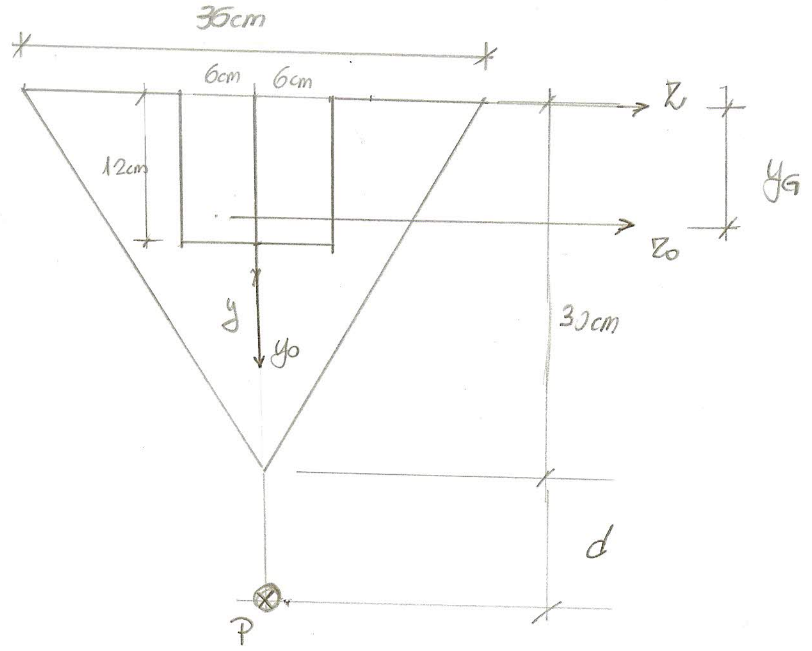
$$\boxed{A \geq \frac{6P}{5\bar{\sigma}}}$$

Para $P = 5kN$, $\bar{\sigma} = 60MPa$, $\bar{\delta} = 5cm$, $E = 180GPa$, $h = 1m$, $l = 2m$:

$$A \geq \frac{6.5.10^3.1}{5.180.10^9.5.10^{-2}} = \frac{30.10^3}{45.10^9} \Rightarrow \pi R^2 \geq \frac{2}{3}.10^{-6} \qquad R \geq 0,00046m = 0,46mm$$

$$A \geq \frac{6.5.10^3}{5.60.10^6} = 10^{-4} \Rightarrow \pi R^2 \geq 10^{-4} \Rightarrow R \geq 0,0056m = 5,6mm$$

Logo $R_{min} = 5,6\ mm$ //



determinar d para que não haja traços.

Propriedades da secção:

CG $z_G = 0$ (no centro)/simetria

$$A_1 = \frac{36.30}{2} = 540cm^2 \qquad A_2 = 12.12 = 144cm^2$$

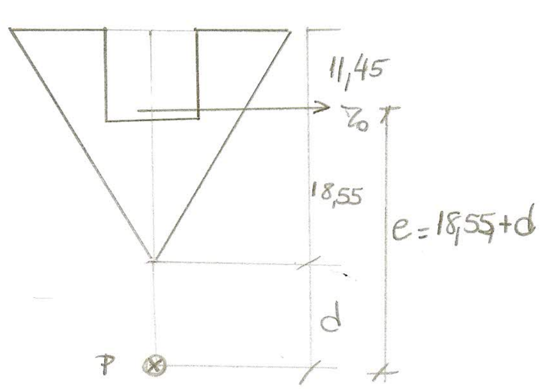
$$y_G = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} \qquad y_1 = 10\,cm \qquad y_2 = 6cm$$

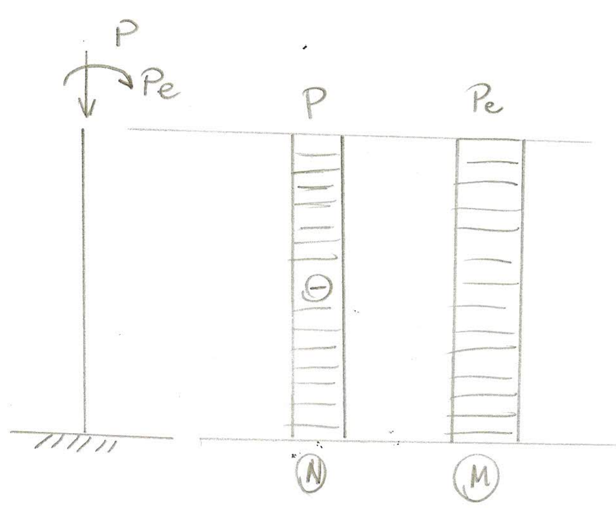
$$y_G = \frac{540.10 - 144.6}{540 - 144} = \frac{5400 - 864}{396} = 11{,}45cm$$

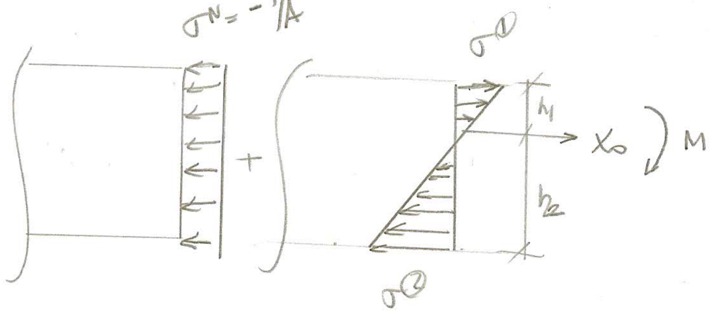
$$I_{z_0} = I_z^{①} - I_z^{②} = \left[\frac{36.30^3}{\cancel{36}} + 540(10-11{,}45)^2\right] - \left[\frac{12.12^3}{12} + 144(6-11{,}45)^2\right] =$$

$$= [27000 + 1135{,}35] - [1728 + 4277{,}16] = 22130{,}19\ cm^4$$

Assim:







$$\sigma^{①} = \frac{(-Pe)\cdot(-h_1)}{I_{x_0}} = \frac{Peh_1}{I_{x_0}}$$

$$\sigma^{②} = \frac{(-Pe)(h_2)}{I_{x_0}} = \frac{Peh_2}{I_{x_0}}$$

$$\sigma_T^{máx} = \frac{-P}{A} + \frac{Pl h_1}{I_{x_0}} \quad ; \quad \sigma_c^{máx} = -\frac{P}{A} - \frac{Plh_2}{I_{x_0}}$$

Para $\sigma_T^{máx} = 0$:

$$\frac{\cancel{P}}{A} = \frac{\cancel{P}eh_1}{I_{x_0}} \Rightarrow e = \frac{I_{x_0}}{Ah_1} = \frac{22130,19}{396 \cdot 11,45} = 4,88$$

$$d + 18,55 = e = 4,88 \Rightarrow \boxed{d = -13,67\,cm}$$

Para qual valor de P $\sigma_T^{máx} = \bar{\sigma}$? Considere $d = 2cm$ $\quad \bar{\sigma} = 50MPa = 500 kgf/cm^2$

$$\sigma = \frac{-P}{A} + \frac{Peh_1}{I_{x_0}} = \bar{\sigma} \qquad P\left(\frac{eh_1}{I_{x_0}} - \frac{1}{A}\right) = \bar{\sigma} \qquad e = 18,55 + d = 20,55cm$$

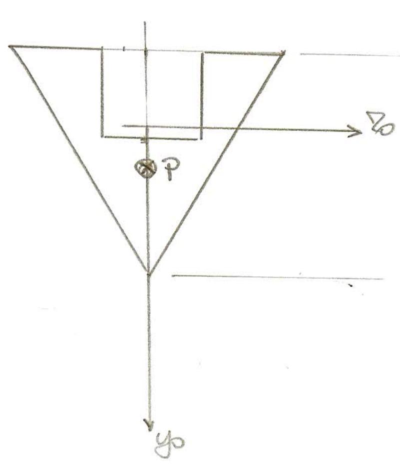
$$P \cdot \left(\frac{20,55 \cdot 11,45}{22130,19} - \frac{1}{396}\right) = \bar{\sigma} \Rightarrow P \cdot (0,0106 - 0,0025) = \bar{\sigma} \qquad 0,008\,P = \bar{\sigma}$$

$$P = \bar{\sigma}/0,008 = 625000N = 625\,kN = 62500\,kgf.$$

$$10^6 Pa = 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{10^6 N}{10^4 cm^2} = 10^2 \frac{N}{cm^2} = 10 \frac{kgf}{cm^2}$$

$$1N = 0,1 kgf$$

O que significa isso? Indicar na figura o lugar de P.



P é aplicada na seção transversal, apenas pouco abaixo do baricentro.