Resumo Álgebra Linear P2 - 2016 | Paulo Akira 2016.2

1) Matriz de transformação linear:

def: seja E com base $B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$, F com base $B' = \{f_1, \dots, f_p\}$ e T linear de E em F. A matriz $[T]_{BB'}$ é matriz de $M_{p,n}(\mathbb{R})$ cuja a primeira coluna são as coordenadas de $T(e_1)$ na base B', a segunda coluna é coluna das coordenadas de $T(e_2)$ na base B', etc. Assim, vale a fórmula:

se $u \in E$ e $[u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ é a coluna das coordenadas de u em B;

se $v \in F$ e $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ é a coluna das coordenadas de v em B', então:

$$\boxed{\begin{array}{l} v = T(u) \Leftrightarrow [v]_{B'} = [T]_{BB'} \cdot [u]_B \\ [T(u)]_{B'} = [T]_{BB'} \cdot [u]_B \end{array}}$$

"o valor u sofre uma transformação e ainda é representado na base B'".

Obs: se T for operador em E ($T: E \to E$) é comum escolher $B' = B$. Escreve-se $[T]_B = [T]_{BB'}$

Obs²: não confundir coordenadas com o valor!

proposição:

(1) Sejam T, U de E em F, B base de E, B' base de F. Então:

$$\boxed{\begin{array}{l} [T+U]_{BB'} = [T]_{BB'} + [U]_{BB'} \\ [\lambda T]_{BB'} = \lambda [T]_{BB'} \end{array}}$$

(2) Seja $T: E \to F$, $U: F \to G$ lineares. Sejam B base de E, B' base de F e B'' base de G.

$$\boxed{[U \circ T]_{BB''} = [U]_{B'B''} \cdot [T]_{BB'}}$$

(3) Se $T: E \to E$ e B base de E escreve-se $T^n = T \circ T \circ T \circ \dots \circ T$ ($T^0 = Id$) então:

$$\boxed{[T^n]_B = ([T]_B)^n}$$

Obs: se T for operador em E ($T: E \to E$) é comum $B' = B$. Escreve-se $[T]_B = [T]_{BB'}$

Obs: seja $T: E \to E'$, com $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de E e $C = \{f_1, f_2, f_3\}$ base de E'. Dado $M = [T]_{BC} = \begin{pmatrix} g_1 & h_1 & j_1 \\ g_2 & h_2 & j_2 \\ g_3 & h_3 & j_3 \end{pmatrix}$, para achar o núcleo devemos fazer

$$\begin{pmatrix} g_1 & h_1 & j_1 \\ g_2 & h_2 & j_2 \\ g_3 & h_3 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

↳ $u \in E$ na base B

Assim teremos um sistema linear homogêneo de forma que sua resolução resultará em ker T.

Para achar a imagem, basta achar os valores l.i. (pode ser necessário escalonar) de $\operatorname{Im} T = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)] = [(g_1, g_2, g_3)_C, (h_1, h_2, h_3)_C, (j_1, j_2, j_3)_C]$.

2) Fórmulas de mudança de base:

- $[u]_B = \underbrace{M_{BC}}_{\text{matriz em que as colunas são os valores da base C escritos na base B}} \cdot [u]_C = [u]_B = M_{CB}^{-1} [u]_C$
- $[T]_{B'} = M_{B'B} \cdot [T]_B \cdot M_{BB'} = M_{BB'}^{-1} [T]_B \cdot M_{BB'}$

def: sejam A, B duas matrizes de ordem n. A e B são semelhantes ($A \sim B$) $\Leftrightarrow \exists P$ inversível de ordem n tq. $B = P^{-1} A P$.

Obs: duas matrizes que representam o mesmo operador em bases diferentes são semelhantes

Obs: se A e B são semelhantes $\Rightarrow \det A = \det B$.

3) Operadores e Matrizes inversíveis

def: seja $T: E \to E'$ linear. T é inversível $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ T é bijetora $\Leftrightarrow \forall v \in E', \exists$ único $u \in E$ tq. $T(u) = v$ $\Leftrightarrow \exists T^{-1}: E' \to E$ tq $T^{-1}(v) = u$ único $\forall$ tq $T(u) = v$

$$\begin{cases} T \circ T^{-1} = T(T^{-1}(v)) = T(u) = v = Id_{E'} \\ T^{-1} \circ T = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(v) = u = Id_E \end{cases}$$

def: $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $AB = BA = I_n$ (B é a matriz inversa de A, ou seja, $A^{-1} = B$).

Proposição: seja T operador em E de dim $<\infty$. T é inversível $\Leftrightarrow [T]_B$ é inversível para uma base B de E $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [T]_B$ é inversível para qualquer base de E.

Obs: $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$

Proposição: T é inversível $\Leftrightarrow \det [T]_B \neq 0$, B base de E.

Obs: seja E com produto interno e dim n. Seja Y sev de dim p. Seja T operador definido por $T(u) = \text{proj}_Y u$. Então existe B base de E tq $[T]_B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}p \\ \}n-p \end{array}$

De fato é só escolher $B = \{\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\in Y}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\in Y^\perp}\}$

4) Autovalores e Autovetores

def: $M \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonal se as entradas não nulas ficam na diagonal principal.

def: seja E ev e T operador em E.

(1) um vetor $x \in E$ é autovetor de T, se $x \neq 0$ e se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) = \lambda x$ (x é autovetor de T, de autovalor λ).

(2) um real λ é autovalor de T, se $\exists x \in E$, $x \neq 0$ tal que $T(x) = \lambda x$ (λ é autovalor de T, de autovetor de x.)

Obs: cada autovetor só tem um único autovalor associado mas um autovalor pode ter mais de um autovetor.

Obs: $[T]_B$ é diagonal $\Leftrightarrow B$ é base de autovetores

def: seja E ev, T operador em E, $\lambda \in \mathbb{R}$. Chamamos de $V(\lambda)$ o sev E definido por:

$$V(\lambda) = \{u \in E : T(u) = \lambda u\} = \left\{\begin{array}{l}\text{autovetores de } T \\ \text{de autovalores de } \lambda\end{array}\right\} \cup \{0\}$$

Obs:

(1) $V(\lambda)$ é sev de E

(2) $V(\lambda) = \ker(T - \lambda I_d)$

(3) λ é autovalor $\Leftrightarrow V(\lambda) \neq \{0\}$

(4) $V(0) = \ker T$ (se 0 não é autovalor então T é inversível pois $\ker T = \{0\}$).

def: seja $A \in M(\mathbb{R})$. O polinômio característico de A é $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Proposição: seja T operador em E de dim n, B base de E e $A = [T]_B$. Então λ é autovalor de $T \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda$ é raiz de p_A.

Corolário:

$\rightarrow$ se $A \in M_n(\mathbb{R})$ então A tem no máximo n autovalores

$\rightarrow$ se T é operador em E, dim $E = n$, então T tem no máximo n autovalores.

Proposição: $A \sim B \Rightarrow$ tem o mesmo polinômio característico, logo mesmos autovalores (mas não os mesmos autovetores).

5) Diagonalização:

def: seja T operador em E de dim n. T é diagonalizável $\Leftrightarrow \exists B$ base tq. $[T]_B$ diagonalizável $\Leftrightarrow \exists B$ base tq $[T]_B$ diagonal $\Leftrightarrow \exists B$ base de autovetores para T.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. A é diagonalizável $\Leftrightarrow T$ é diagonalizável, onde T é algum operador tal que $[T]_B = A$ em alguma base $B \Leftrightarrow A$ é semelhante a uma matriz diagonal $\Leftrightarrow A = P^{-1} D P$ para alguma D diagonal, P inversível.

Proposição: seja T operador em E de dim n. Autovetores em $V(\lambda_i)$'s diferentes são sempre li. Ou seja, se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ são autovalores de T, então $V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus$ $\oplus V(\lambda_p)$ é direta.

Em particular T é diagonalizável $\Leftrightarrow E = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_n)$ $\Leftrightarrow n = \dim(V(\lambda_1)) + \dots + \dim(V(\lambda_n))$.

Obs: se D é diagonal, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ então $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Se A é diagonalizável, $A = P^{-1} D P$ e $A^k = P^{-1} D^k P$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

6) Diagonalização e polinômio

def: seja T operador em E de dim n, λ autovalor.

A multiplicidade geométrica de λ é $\dim V(\lambda)$

A multiplicidade algébrica é a multiplicidade com raiz de p_T.

Obs: λ autovalor $\Rightarrow$ ambas as multiplicidades são ≥ 1

Proposição: mult. geométrica de $\lambda \leq$ mult. algébrica de λ

Teorema: seja E de dim n, T operador em E

T é diagonalizável $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ as raízes de } p_T \text{ são todas reais} \\ (2) \forall \lambda \text{ autovalor,} \\ \quad \text{mult. geom de } \lambda = \text{mult. algébrica de } \lambda \end{cases}$

Obs: se λ é raiz simples de p_T, então (2) vale automaticamente. Ou seja, basta verificar (2) para as raízes multiplas de p_T.

Corolário: se todas as raízes de p_T são reais e simples então T é diagonalizável.

7) O operador simétrico:

def: $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica se é simetrica em relação a diagonal principal.

Obs: se A e B são simétricos então $A+B$, λA são simétricos. Ou seja, matrizes simétricas formam um sev de $M_n(\mathbb{R})$ de dim $= \frac{n^2+n}{2}$

Proposição: seja E de dim $< \infty$ com produto interno e T operador em E. As seguintes afirmações equivalem:

(1) $[T]_B$ é simétrico para qualquer base B ortonormal

(2) $[T]_B$ é simetrico para alguma base B ortonormal

(3) $\forall u, v \in E$, $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$

Um operador que satisfaz (1), (2) ou (3) é chamado de operador simétrico

Obs: se T é simétrico e B não ortonormal, então $[T]_B$ pode ou não ser simétrico.